

部分相干光照明下旋转双光栅衍射干涉效应

屠 锦 洪 詹 黎

上海交通大学应用物理系, 上海, 200030

1990 年 10 月 31 日收到

本文研究部分相干光照明下有旋转夹角的双光栅衍射干涉效应, 它是 Lau-Talbot-Moiré 效应的推广. 运用模糊函数方法给出系统观察面上一个更为普遍的光强分布数学表达式, 并分析讨论一些特殊情况及相应的实验结果.

PACC: 4210; 4230; 0760L

一、引 言

近 10 年来, 人们对双光栅衍射干涉现象作了相当广泛的研究, 其中一方面是基于相干照明情况下的 Talbot 效应^[1]和 Moiré 效应, 由此产生的研究领域包括 Talbot 干涉仪^[2], Moiré 偏折仪^[3,4], joint-Talbot 效应^[5]等; 另一方面是基于完全非相干照明情况下的 Lau 效应^[6], 各种不同的理论被用来解释该现象^[7,13], 增进了人们对 Lau 现象物理本质的理解.

最近, 刘立人系统地研究了空间部分相干照明下两个栅线相互平行矩型光栅 Lau 装置的衍射干涉现象^[14,17]. 发现存在着介于非相干 Lau 条纹和相干的 Talbot 衍射图象之间的新的条纹花样, 从而将这两种效应纳入统一的理论框架. 与此同时, Chitrlekha 等研究了第二块光栅相对第一块光栅有一转角情况下的 Lau 现象^[18,19], 从实验上证实^[18], 旋转灵敏度 (rotational sensitivity) 与照明光的空间相干度有一定的关联. 并采用部分相干理论对此作了解释^[19], 然而他们的理论结果在取相干的极限情况下与实际情况不符合.

本文综合文献[14—18]的结果, 用模糊函数方法分析部分相干照明下有旋转夹角的双光栅衍射干涉现象, 发现随着空间相干度的增强, 不仅 Lau 条纹的旋转灵敏度增大^[18], 而且当旋转光栅时, Lau 条纹会发生倾斜, 并向由 Talbot 效应引起的双光栅叠加 Moiré 差频条纹转化, 条纹对比度受照明光空间相干性以及照明空间尺寸, 光栅旋转角和观察面上的空间坐标等影响. 本文导出的理论公式与实际情况相符, 在一些特定的情况下可以给出前人已有的结果. 因此, 本文对光栅衍射干涉理论以及光栅计量技术有一定的指导意义.

二、系统原理简介

本文实验系统原理见图 1. 波长 $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ 的 He-Ne 激光束经扩束投射到一块

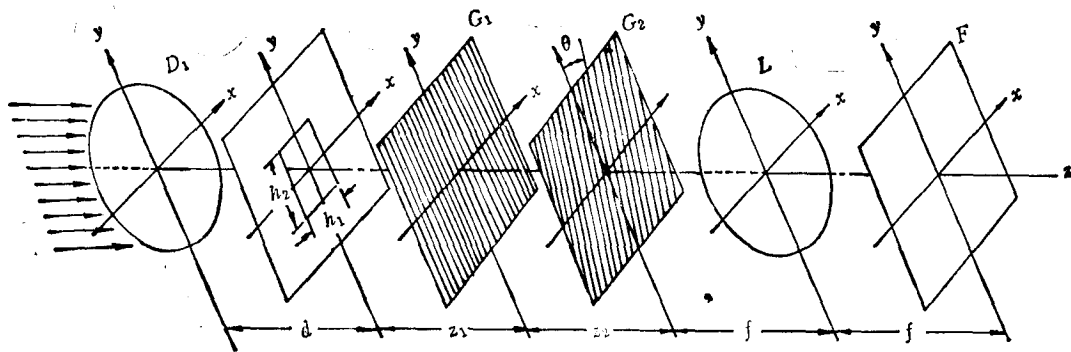


图1 旋转双光栅衍射干涉系统

旋转着的毛玻璃 D_1 上, 距其 d 处的光瞳 S 面上放置一块静止毛玻璃 D_2 , 调节距离 d 可改变光瞳出射光的空间相干度^[18], 光瞳横向与纵向尺寸分别为 h_1 和 h_2 , 距 S 面 z_1 处垂直光轴 z 放置一空间周期为 p 的光栅 G_1 , G_1 的栅线方向与矩形光瞳竖边平行. 在间隔 G_1 为 z_2 处再放置一相同周期的光栅 G_2 , 可令其栅线与 G_1 的栅线方向绕光轴旋转 θ 角, 光栅 G_2 后面是透镜 L , 它的前焦面与 G_2 面重合, 后焦面即为本系统的观察平面 F .

三、理论推导

本文采用的模糊函数方法^[15,20]是用相位空间表达法处理部分相干光学系统, 它可用几何光学的矩阵运算来处理传递过程, 运算中有可能丢失常数项^[19]但并不影响最终结果的正确性.

模糊函数与互强度有内在的关联. 互强度用中心位置坐标 s 和位置坐标差 Δs 表征即 $J(s, \Delta s)$, 模糊函数定义为互强度对位置 s 的 Fourier 积分, 它是空间频率差 $\Delta \nu$ 和位置差 Δs 的函数, 即

$$A(\Delta \nu, \Delta s) = \int_{-\infty}^{\infty} J(s, \Delta s) \exp(-2\pi i s \cdot \Delta \nu) ds. \quad (1)$$

模糊函数 $A_1(\Delta \nu, \Delta s)$ 通过薄扰动介质 $A_2(\Delta \nu', \Delta s)$ 后的模糊函数 $A_3(\Delta \nu, \Delta s)$ 为卷积积分,

$$A_3(\Delta \nu, \Delta s) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\Delta \nu - \Delta \nu', \Delta s) A_2(\Delta \nu', \Delta s) d\Delta \nu'. \quad (2)$$

同几何光学一样, 可用矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 来表达模糊函数的传递,

$$A_2(\Delta \nu, \Delta s) = A_1(a\Delta \nu + b\Delta s, d\Delta s + c\Delta \nu), \quad (3)$$

其中 $ad - bc = 1$. 例如:

对自由空间的传递, 矩阵 $D(z)$ 为

$$D(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda z & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

透镜传递矩阵 $L(f)$ 为

$$L(f) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda f} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

两焦点间的透镜 Fourier 变换为

$$F(f) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda f} \\ -\lambda f & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

整个系统的传递矩阵可由各单元传递矩阵以次序相乘而得。根据光强与互强度间的关系 $I(s) = J(s, 0)$ 很容易通过模糊函数求得光强分布

$$I(s) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\Delta v, 0) \cdot \exp(2\pi i \Delta v \cdot s) d\Delta v. \quad (7)$$

根据上述结论,可以写出图 1 所示系统中各单元的模糊函数。

对于任意周期性光栅均可通过傅里叶展开式表示,

$$g(x, y) = \sum_n c_n \exp\left(\frac{2\pi n i x}{p}\right), \quad (8)$$

其中 c_n 为 $g(x, y)$ 的傅里叶展开系数。

因此,对光栅 G_1 其互强度为

$$\begin{aligned} J_{g_1}(s, \Delta s) &= g_1\left(s + \frac{\Delta s}{2}\right) g_1^*\left(s - \frac{\Delta s}{2}\right) \\ &= \sum_n \sum_m c_n c_m^* \exp\left[\frac{2\pi i(n-m)x}{p}\right] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{2\pi i(n+m)}{2p} \Delta x\right], \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $*$ 表示函数的复共轭。

据(1)式, G_1 的模糊函数可表示为

$$\begin{aligned} A_{g_1}(\Delta s, \Delta v) &= \int_{-\infty}^{\infty} J_{g_1}(s, \Delta s) \exp(-2\pi i s \cdot \Delta v) \cdot ds \\ &= \sum_n \sum_m c_n c_m^* \exp\left[\frac{2\pi i(n+m)}{2p} \Delta x\right] \\ &\quad \cdot \delta\left(\Delta v_x - \frac{n-m}{p}\right) \delta(\Delta v_y). \end{aligned} \quad (10)$$

同样对光栅 G_2 也可表示成傅里叶展开式

$$g_2(x, y) = \sum_k c_k \exp\left[\frac{2\pi k i}{p} (x \cos \theta + y \sin \theta)\right]. \quad (11)$$

上式及以下的各式推导中,将垂直于光轴 z 的各个平面内的横轴与纵轴均以 x, y 表示而不加区分,各个平面内的横轴与横轴互相平行,它们的轴心为 z 轴穿过平面上的点。由(11)式可得 G_2 的模糊函数

$$\begin{aligned}
 A_{s_2}(\Delta s, \Delta v) = & \sum_k \sum_l c_k c_l^* \exp \left[\frac{2\pi i(k+l)}{2p} \Delta x \cos \theta \right] \\
 & \cdot \exp \left[\frac{2\pi i(k+l)\Delta y \sin \theta}{2p} \right] \\
 & \cdot \delta \left(\Delta v_x - \frac{k-l}{p} \cos \theta \right) \delta \left(\Delta v_y - \frac{k-l}{p} \sin \theta \right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

现在假定光瞳面 S 上的互强度 $J_s(s, \Delta s)$ 为

$$J_s(s, \Delta s) = I_0 \text{rect} \left(\frac{x}{h_1} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{h_2} \right) \exp \left[-\frac{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\xi^2} \right]. \quad (13)$$

式中等号右端前二部分代表光强分布为“慢”函数;后一部分代表横向相干性,是“快函数” ξ 为相干因数^[15-17].

因此, S 面上部分相干光的模糊函数为

$$A_s(\Delta v, \Delta s) = \text{sinc}(h_1, \Delta v_x) \text{sinc}(h_2, \Delta v_y) \exp \left[-\frac{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\xi^2} \right]. \quad (14)$$

据(3)和(4)式,可写出经自由空间传播到第一块光栅前表面上的模糊函数 (A^- 表示前表面, A^+ 为后表面)

$$\begin{aligned}
 A_{G_1}^-(\Delta v, \Delta s) = & A_s(\Delta v_x, \Delta v_y; \Delta x - \lambda z_1 \Delta v_x, \Delta y - \lambda z_1 \Delta v_y) \\
 = & \text{sinc}(h_1 \Delta v_x) \text{sinc}(h_2 \Delta v_y) \exp \left\{ -\frac{2[(\Delta x - \lambda z_1 \Delta v_x)^2]}{\xi^2} \right\} \\
 & \cdot \exp \left\{ -\frac{2(\Delta y - \lambda z_1 \Delta v_y)^2}{\xi^2} \right\}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

据(2)和(10)式可知 G_1 出射面上的模糊函数为

$$\begin{aligned}
 A_{G_1}^+(\Delta v, \Delta s) = & \int_{-\infty}^{\infty} A_{G_1}^-(\Delta v - \Delta v', \Delta s) A_{G_1}(\Delta v', \Delta s) d\Delta v' \\
 = & \sum_n \sum_m c_n c_m^* \text{sinc} \left[h_1 \left(\Delta v_x - \frac{n-m}{p} \right) \right] \\
 & \cdot \text{sinc}(h_2 \Delta v_y) \exp \left[\frac{2\pi(n+m)i \cdot \Delta x}{2p} \right] \\
 & \cdot \exp \left\{ -\frac{2 \left[\Delta x - \lambda z_1 \left(\Delta v_x - \frac{n-m}{p} \right) \right]^2}{\xi^2} \right\} \\
 & \cdot \exp \left\{ -\frac{2(\Delta y - \lambda z_1 \Delta v_y)^2}{\xi^2} \right\}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

则从光栅 G_1 后表面经 z_2 距离传播到光栅 G_2 前表面的模糊函数为

$$\begin{aligned}
 A_{G_2}^-(\Delta v, \Delta s) = & A_{G_1}^+(\Delta v_x, \Delta v_y; \Delta x - \lambda z_2 \Delta v_x, \Delta y - \lambda z_2 \Delta v_y) \\
 = & \sum_n \sum_m c_n c_m^* \text{sinc} \left[h_1 \left(\Delta v_x - \frac{n-m}{p} \right) \right] \text{sinc}(h_2 \Delta v_y) \\
 & \cdot \exp \left[\frac{2\pi(n+m)i(\Delta x - \lambda z_2 \Delta v_x)}{2p} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \exp \left\{ -\frac{2 \left[(\Delta x - \lambda z_2 \Delta v_x) - \lambda z_1 \left(\Delta v_x - \frac{n-m}{p} \right) \right]^2}{\xi^2} \right\} \\
& \cdot \exp \left\{ -\frac{2 [(\Delta y - \lambda z_2 \Delta v_y) - \lambda z_1 \Delta v_y]^2}{\xi^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{17}$$

同样, G_2 出射面上的模糊函数为

$$\begin{aligned}
A_{G_2}^+(\Delta v, \Delta s) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_{G_1}^-(\Delta v - \Delta v', \Delta s) A_{G_1}(\Delta v', \Delta s) d\Delta v' \\
&= \sum_n \sum_m \sum_k \sum_l c_n c_m^* c_k c_l^* \sin c \\
&\quad \cdot \left[h_1 \left(\Delta v_x - \frac{n-m}{p} - \frac{(k-l)}{p} \cos \theta \right) \right] \\
&\quad \cdot \sin c \left[h_2 \left(\Delta v_y - \frac{(k-l)}{p} \sin \theta \right) \right] \\
&\quad \cdot \exp \left\{ -2 \left[\left(\Delta x - \lambda z_2 \left(\Delta v_x - \frac{(k-l)}{p} \cos \theta \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \lambda z_1 \left(\Delta v_x - \frac{n-m}{p} - \frac{(k-l)}{p} \cos \theta \right) \right]^2 / \xi^2 \right\} \\
&\quad \cdot \exp \left\{ -2 \left[\Delta y - \lambda z_2 \left(\Delta v_y - \frac{(k-l)}{p} \sin \theta \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \lambda z_1 \left(\Delta v_y - \frac{(k-l)}{p} \sin \theta \right) \right]^2 / \xi^2 \right\} \\
&\quad \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i (n+m)}{2p} \left[\Delta x - \lambda z_2 \left(\Delta v_x - \frac{(k-l)}{p} \cos \theta \right) \right] \right\} \\
&\quad \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i (k+l) \cos \theta}{2p} \cdot \Delta x \right\} \\
&\quad \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i (k+l) \sin \theta}{2p} \Delta y \right\}.
\end{aligned} \tag{18}$$

因为光栅 G_2 位于透镜 L 的前焦面。根据(6)和(3)式, 可得 L 后焦面即观察面上的模糊函数为

$$\begin{aligned}
A_F(\Delta v, \Delta s) &= A_{G_2}^+(\Delta s/\lambda f; -\lambda f \Delta v) \\
&= \sum_n \sum_m \sum_k \sum_l c_n c_m^* c_k c_l^* \sin c \\
&\quad \cdot \left[h_1 \left(\frac{\Delta x}{\lambda f} - \frac{n-m + (k-l) \cos \theta}{p} \right) \right] \\
&\quad \cdot \sin c \left[h_2 \left(\frac{\Delta y}{\lambda f} - \frac{(k-l) \sin \theta}{p} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \exp \left\{ -2 \left[-\lambda f \Delta v_x - \lambda z_2 \left(\frac{\Delta x}{\lambda f} - \frac{(k-l) \cos \theta}{p} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \lambda z_1 \left(\frac{\Delta x}{\lambda f} - \frac{n-m+(k-l) \cos \theta}{p} \right) \right]^2 / \xi^2 \right\} \\
& \cdot \exp \left\{ -2 \left[-\lambda f \Delta v_y - \lambda z_2 \left(\frac{\Delta y}{\lambda f} - \frac{(k-l) \sin \theta}{p} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \lambda z_1 \left(\frac{\Delta y}{\lambda f} - \frac{n-m+(k-l) \cos \theta}{p} \right) \right]^2 / \xi^2 \right\} \\
& \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i(n+m)}{p} \left[-\lambda f \Delta v_x - \lambda z_2 \left(\frac{\Delta x}{\lambda f} - \frac{(k-l) \cos \theta}{p} \right) \right] \right\} \\
& \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i(k+l) \cos \theta}{2p} (-\lambda f \Delta v_x) \right\} \\
& \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i(k+l) \sin \theta}{2p} (-\lambda f \Delta v_y) \right\}. \tag{19}
\end{aligned}$$

令上式中坐标差 $\Delta s = 0$ 。从而据(7)式可得光强分布

$$\begin{aligned}
(I_F x, y) &= \int A_F(\Delta v; 0) \exp(2\pi i \Delta v \cdot s) d\Delta v \\
&= \int A_F(\Delta v_x, \Delta v_y; 0, 0) \exp(2\pi i \Delta v_x x) \exp(2\pi i \Delta v_y \cdot y) \\
& \quad \cdot d\Delta v_x d\Delta v_y. \tag{20}
\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}
I_F(x, y) &= \sum_n \sum_m \sum_k \sum_l c_n c_m^* c_k c_l^* \sin c \left[h_1 \left(\frac{n-m+(k-l) \cos \theta}{p} \right) \right] \\
& \quad \cdot \sin c \left[h_2 \left(\frac{(k-l) \sin \theta}{p} \right) \right] \exp \left\{ \frac{2\pi i(n+m) \cos \theta (k-l) \lambda z_2}{p} \right\} \\
& \quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left\{ -2 \left[-\lambda f \Delta v_x + \lambda z_2 \frac{(k-l) \cos \theta}{p} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\lambda z_1}{p} (n-m+(k-l) \cos \theta) \right]^2 / \xi^2 \right\} \right. \\
& \quad \cdot \exp \left[\frac{2\pi i(n+m)}{2p} (-\lambda f \Delta v_x) \right] \\
& \quad \cdot \exp \left[\frac{2\pi i(k+l) \cos \theta}{p} (-\lambda f \Delta v_x) \right] \exp(2\pi i \Delta v_x \cdot x) \Big\} d\Delta v_x \\
& \quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left\{ -2 \left[-\lambda f \Delta v_y + \lambda z_2 \frac{(k-l) \sin \theta}{p} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \lambda z_1 \frac{(k-l) \sin \theta}{p} \right]^2 / \xi^2 \right\} \right. \\
& \quad \cdot \exp \left[\frac{2\pi i(k+l) \sin \theta}{2p} (-\lambda f \Delta v_y) \right] \exp(2\pi i \Delta v_y \cdot y) \Big\} d\Delta v_y. \tag{21}
\end{aligned}$$

对(21)式进行积分运算,再经整理后得

$$\begin{aligned}
 I_F(x, y) = & \sum_n \sum_m \sum_k \sum_l c_n c_m^* c_k c_l^* \text{sinc} \\
 & \cdot \left[h_1 \frac{n - m + (k - l) \cos \theta}{p} \right] \\
 & \cdot \text{sinc} \left[h_2 \frac{(k - l) \sin \theta}{p} \right] \exp \\
 & \cdot \left\{ -\frac{\pi^2 \xi^2}{2} \left[\left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{n + m + (k + l) \cos \theta}{2p} \right)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{y}{\lambda f} - \frac{(k + l) \sin \theta}{2p} \right)^2 \right] \right\} \cdot \exp \left[-\frac{2\pi i \lambda z_2}{2p^2} (k^2 - l^2) \right] \\
 & \cdot \exp \left[-\frac{2\pi i \lambda z_1}{2p^2} (n^2 - m^2 + 2nk \cos \theta - 2ml \cos \theta + k^2 - l^2) \right] \\
 & \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i z_1}{fp} [x(n - m + (k - l) \cos \theta) + y(k - l) \sin \theta] \right\} \\
 & \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i z_2}{fp} [x(k - l) \cos \theta + y(k - l) \sin \theta] \right\}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

显然,基于文献[17]的观点,可将观察面上的光强分布看作由“透过”函数因数 T_{L-M} 、空间位相函数因数 P_z 和 Lau-Moiré 函数因数 F_{L-M} 三项构成,它们分别为

$$\begin{aligned}
 T_{L-M}^{n,m,k,l}(x, y) = & \text{sinc} \left[h_1 \frac{n - m + (k - l) \cos \theta}{p} \right] \\
 & \cdot \text{sinc} \left[h_2 \frac{(k - l) \sin \theta}{p} \right] \\
 & \cdot \exp \left\{ -\frac{\pi^2 \xi^2}{2} \left[\left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{n + m + (k + l) \cos \theta}{2p} \right)^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{y}{\lambda f} - \frac{(k + l) \sin \theta}{2p} \right)^2 \right] \right\}, \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_z^{n,m,k,l}(x, y) = & \exp \left[-\frac{\pi i \lambda z_2}{p^2} (k^2 - l^2) \right] \\
 & \exp \left[-\frac{\pi i \lambda z_1}{p^2} (n^2 - m^2 + 2nk \cos \theta - 2ml \cos \theta + k^2 - l^2) \right], \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{L-M}^{n,m,k,l}(x, y) = & \exp \left\{ \frac{2\pi i z_1}{fp} [x(n - m + (k - l) \cos \theta) + y(k - l) \sin \theta] \right\} \\
 & \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i z_2}{fp} [x(k - l) \cos \theta + y(k - l) \sin \theta] \right\}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

因此

$$I_F(x, y) = \sum_n \sum_m \sum_k \sum_l c_n c_m^* c_k c_l^* T_{L-M}^{n,m,k,l}(x, y) P_z^{n,m,k,l}(x, y) F_{L-M}^{n,m,k,l}(x, y). \quad (26)$$

四、讨论与实验结果

为进一步理解光强分布表达式 $I_F(x, y)$ 的物理意义, 分几种特殊情况加以讨论, 并给出一些相应的实验结果.

1. 照明光区域与光栅周期相比足够大, $h_1/p \gg 1$, $h_2/p \gg 1$. 此时, “透过”函数因数 T_{L-M} 中的 sinc 函数相当于一个 δ 函数, 仅当下式成立为 1.

$$n - m + (k - l) \cos \theta = 0; \quad (27a)$$

$$(k - l) \sin \theta = 0. \quad (27b)$$

1) 当双光栅互相平行即 $\theta = 0$, $I_F(x, y)$ 的三个函数因数分别简化成

$$T_{L-M}^{k,l}(x, y) = \exp \left\{ -\frac{\pi^2 \xi^2}{2} \left[\left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{n+k}{p} \right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda f} \right)^2 \right] \right\}, \quad (28)$$

$$P_{\pm}^{k,l}(x, y) = \exp \left[-\frac{\pi i \lambda z_2}{p^2} (k^2 - l^2) \right], \quad (29)$$

$$F_{L-M}^{k,l}(x, y) = \exp \left[\frac{2\pi i}{fp} z_2 x (k - l) \right]. \quad (30)$$

一般取双光栅间距 z_2 为 Talbot 距离,

$$z_L = \frac{Mp^2}{\lambda}. \quad (31)$$

因此光强分布 $I_F(x, y)$ 可写成

$$I_F(x, y) = \sum_n \sum_k \sum_q c_n c_{q+n}^* c_k c_{k-q}^* \exp \left(\frac{2\pi i}{fp} z_2 qx \right) \cdot \exp \left[-\frac{\pi^2 \xi^2}{2} \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{n+k}{p} \right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda f} \right)^2 \right], \quad (32)$$

其中 $q = k - l$.

若光栅 G_1, G_2 均为 Ronchi 光栅, 则有^[21]

$$|g(x)|^2 = g(x)g_{(x)}^* = g(x). \quad (33)$$

取两种极限情况:

(a) 相干照明, $\xi \rightarrow \infty$, 有

$$I_F(x, y) = \sum_n \sum_k \sum_q c_n c_{q+n}^* c_k c_{k-q}^* \delta \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{n+k}{p} \right) \delta(y). \quad (34)$$

因为 q 可取任意整数, 不妨令 $q = n + k$,

$$I_F(x, y) \propto \sum_q |c_q|^2 \delta \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{q}{p} \right) \delta(y). \quad (35)$$

所以在观察面上可见一系列频谱点.

(b) 完全非相干照明, $\xi \rightarrow 0$, 有

$$I_F(x, y) = \sum_q |c_q|^2 \exp \left(\frac{2\pi i}{fp} z_2 qx \right). \quad (36)$$

此即著名的 Lau 条纹表达式.

2) 当双光栅栅线不平行, 绕 z 轴有 θ 角 ($\theta \neq 0$), 据(27)式, 知 $k = l$, $n = m$, 仍取 z_2 为 Talbot 距离. 则

$$I_F(x, y) = \sum_n \sum_k |c_n|^2 |c_k|^2 \times \exp \left\{ -\frac{\pi^2 \xi^2}{2} \left[\left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{n + k \cos \theta}{p} \right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda f} - \frac{k \sin \theta}{p} \right)^2 \right] \right\}. \quad (37)$$

取极限情况如下:

(a) 相干照明. $\xi \rightarrow \infty$, 则

$$I_F(x, y) = \sum_n \sum_k |c_n|^2 |c_k|^2 \delta \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{n + k \cos \theta}{p} \right) \delta \left(\frac{y}{\lambda f} - \frac{k \sin \theta}{p} \right). \quad (38)$$

这便是 Moiré 频谱强度公式(图 2, 见图版 1).

(b) 完全非相干照明, $\xi \rightarrow 0$, 有

$$I_F(x, y) = \sum_n \sum_k |c_n|^2 |c_k|^2. \quad (39)$$

上式表明当照明面积为无限大时, 非相干光情况下旋转光栅, Lau 条纹立即消失.

2. 照明光区域与光栅周期可比拟. $h_1 \sim h_2 \sim 10p$.

此时再分两种情况讨论:

1) 相干照明, $\xi \rightarrow \infty$, 则透过函数因数为

$$\begin{aligned} T_{L-M}^{m,n,k,l}(x, y) &= \sin c \left[h_1 \frac{n - m + (k - l) \cos \theta}{p} \right] \\ &\times \sin c \left[h_2 \frac{(k - l) \sin \theta}{p} \right] \\ &\cdot \delta \left(\frac{x}{\lambda f} - \frac{n + m + (k + l) \cos \theta}{2p} \right) \\ &\times \delta \left(\frac{y}{\lambda f} - \frac{(k + l) \sin \theta}{2p} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

可见它与第 1 节中讨论的情况类似. 见(34), (38)式, 区别在于(40)式中 T_{L-M} 还受与 h_1 , h_2 有关的 $\sin c$ 函数调制.

2) 完全非相干照明, $\xi \rightarrow 0$. 则透过函数因数为

$$T_{L-M}^{m,n,k,l}(x, y) = \sin c \left[h_1 \frac{n - m + (k - l) \cos \theta}{p} \right] \sin c \left[h_2 \frac{(k - l) \sin \theta}{p} \right].$$

因为 h_1, h_2 较小, 即使 m, n, k, l 取很大, T_{L-M} 并不立刻趋于零, 为方便起见. 假设 z_1, z_2 取合适的值使 $P_{L-M}^{m,n,k,l}(x, y) = 1$, 并令 $n - m = r$, $k - l = q$, r, q 仍为整数. 则光强 $I_F(x, y)$ 为

$$I_F(x, y) = \sum_n \sum_k \sum_q \sum_r c_n c_{n-r}^* c_k c_{k-q}^* \sin c$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left[h_1 \frac{r + q \cos \theta}{p} \right] \sin c \left[h_2 \frac{q \sin \theta}{p} \right] \\
 & \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i z_1}{fp} [x(r + q \cos \theta) + yq \sin \theta] \right\} \\
 & \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i z_2}{fp} (xq \cos \theta + yq \sin \theta) \right\}. \quad (41)
 \end{aligned}$$

上式表征当第二块光栅开始旋转, Lau 条纹不是象(42)式立即消失,而是发生旋转且对比度下降。这个结论可以从(41)式中的一级项中看得更清楚,令 $r = -1$, $q = 1$,

$$\begin{aligned}
 I_P(x, y) & \approx c_{-1}c_1 \sin c \left[\frac{h_1(1 - \cos \theta)}{p} \right] \sin c \left[\frac{h_2 \sin \theta}{p} \right] \\
 & \cdot \exp \left\{ \frac{2\pi i}{fp} \{ [z_1(\cos \theta - 1) + z_2 \cos \theta]x + (z_1 + z_2) \sin \theta \cdot y \} \right\}. \quad (42)
 \end{aligned}$$

条纹的对比度取决于 $\text{sinc}[h_1(1 - \cos \theta)/p] \text{sinc}[h_2 \sin \theta/p]$, (θ 较小), 条纹旋转角度 φ 满足下式:

$$\text{ctan } \varphi = \frac{z_1(\cos \theta - 1) + z_2 \cos \theta}{(z_1 + z_2) \sin \theta}. \quad (43)$$

由此可见, 当第二块光栅发生旋转, Lau 条纹在向 Moiré 条纹演变, 对比度在下降。实验结果见图 3 (见图版 I)

分析(41)式, 还可发现当光瞳为无限长狭缝情况。即 $h_1 \rightarrow 0$, $h_2 \rightarrow \infty$, 当双光栅互相平行时。在观察面上可以看到两光栅由 Talbot 效应产生叠加差频 Moiré 条纹, 方向与栅线方向一致; 当第二块光栅发生旋转时, 该光栅不能自成象, 观察面上只能看到第一块光栅的象。

通过上述分析讨论, 我们明确了“透过”函数 T_{L-M} , 空间位相函数 P_s 以及 Lau-Moiré 函数 F_{L-M} 对结果的影响。对更为一般的情况, 观察面上条纹对比度取决于空间坐标 x, y, z , 相干因数 ξ , 光瞳尺寸 h_1, h_2 和光栅旋转角 θ 。

五、结 论

本文综合性地研究了部分相干光照明下有旋转夹角的双光栅衍射干涉效应, 不仅就前人研究过的特殊情况^[14-19]作了分析。而且提出一些新的现象, 为研究部分相干照明下的光栅干涉计量技术提供了较完整的理论基础。此外, 本文涉及的光栅并不限于矩形振幅光栅, 可直接用于位相光栅^[21,22]或复光栅情况。

刘立人教授曾就光栅自成象及 Lau 效应与本文作者之一作过有益的讨论, 在此表示感谢。

- [1] F. Talbot, *Phil. Mag.*, 9(1836), 401.
- [2] K. Patorski, *J. Opt. Soc. Am. A*, 3(1986), 667.
- [3] E. Keren, O. Kafri, *J. Opt. Soc. Am. A*, 2(1985), 111.
- [4] 屠锦洪等, 上海交通大学学报, 8(1989), 90.

- [5] Liren Liu *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. A.*, 7(1990), 970.
- [6] E. Lau, *Ann. Phys.*, 6(1948), 417.
- [7] M. L. Roblin, *Opt. Acta*, 18(1971), 539.
- [8] J. Jahns, A. Lohmann, *Opt. Comm.*, 28(1979), 263.
- [9] S. Sudol, B. J. Thompson, *Opt. Comm.*, 31(1979), 105.
- [10] F. Gori, *Opt. Comm.*, 31(1979), 4.
- [11] G. J. Swanson, E. N. Leith, *J. Opt. Soc. Am.*, 72(1982), 552.
- [12] K. Patorski, *Opt. Acta*, 30(1983), 745.
- [13] J. Ojeda-Castaneda, E. E. Sicre, *Opt. Acta*, 32(1985), 17.
- [14] 刘立人, 光学学报, 7(1987), 501.
- [15] 刘立人, 光学学报, 8(1988), 1080.
- [16] L. Liu, *J. Opt. Soc. Am. A.*, 5(1988), 709.
- [17] 刘立人, 中国科学 A 辑, (11)(1988), 1180.
- [18] S. Chitralkha *et al.*, *Appl. Opt.*, 28(1989), 345.
- [19] S. Chitralkha *et al.*, *Appl. Opt.*, 29(1990), 125.
- [20] A. Papoulis, *J. Opt. Soc. Am.*, 64(1974), 779.
- [21] Tu Jinhong, *J. Mod. Opt.*, 35(1988), 1399.
- [22] Tu Jinhong, *J. Mod. Opt.*, 34(1987), 307.

DIFFRACTION AND INTERFERENCE EFFECT OF DOUBLE GRATINGS WITH A ROTATION-ANGLE UNDER PARTIALLY COHERENT ILLUMINATION

TU JIN-HONG ZHAN LI

Department of Applied Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 200030

(Received 31 October 1990)

ABSTRACT

In this paper, the diffraction and interference effect of double gratings with a rotation-angle under partially coherent illumination is studied, it is a generalization of Lau-Talbot-Moire effect. A general analytic expression of light intensity distribution at the observation plane is obtained by means of ambiguity function method. Some special cases are discussed and verified by experiments.

PACC: 4210; 4230; 0760L