

迭加态与压缩效应增强

朱开成 王 琴 颜占先

湖南吉首大学物理系, 吉首, 416000

1990年4月29日收到

本文运用量子力学态迭加原理, 讨论由真空态和压缩态的迭加态获取更深压缩光场的可能性。结果表明, 对弱场强浅压缩光场压缩加强效应非常显著; 并且在迭加态中还呈现出反聚束的非经典效应。

PACC:4250

一、引 言

光场压缩态是电磁场的一种量子化状态^[1], 在此态中场的某个正交分量具有比相干态更小的量子起伏, 因而在光通信、精密测量等方面具有潜在而重要的应用前景^[2]。以往对压缩态光场的研究局限于光学非线性相互作用过程(诸如四波混频、参量放大、共振荧光等)^[3,4]。1987年 Wodkiewicz 等人发现^[5], 真空态与单光子或双光子 Fock 态的迭加态

$$|\phi_m\rangle = \alpha_m|0\rangle + \beta_m|m\rangle \quad m=1,2 \quad (1)$$

中存在压缩效应, 而 Fock 态的其它类型迭加态则不具有压缩效应, 这给寻求压缩光场指出一个新途径。最近, 夏云杰等人指出^[6], 光场真空态与相干态的迭加态,

$$|\phi_3\rangle = \alpha_3|0\rangle + \beta_3|z\rangle \quad (2)$$

也具有压缩效应, 这里 $|z\rangle$ 代表相干态; 并且发现压缩程度与相干光场的平均光子数密切相关, 在一定条件下还呈现出很强的反聚束效应。这似乎表明, 迭加态中广泛地存在着非经典效应。

但是, 迄今为止, 还很少有文献论及对一已是压缩光场的压缩程度进行改进的问题。本文通过真空态与压缩态的迭加态, 理论上讨论了获得更大压缩的可能性。

二、迭加态中的方差计算

根据量子力学的态迭加原理, 设单模光场存在下面形式的迭加态:

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|z, \xi\rangle, \quad (3)$$

式中 α, β, z 和 ξ 都是复参数。 $|z, \xi\rangle$ 为光场压缩态, 其归一化条件为

$$\langle\phi|\phi\rangle = 1, \quad (4)$$

且光场压缩态 $|z, \xi\rangle$ 中的平均光子数为^[7]

$$\langle\hat{n}\rangle = |z|^2 + \sinh^2\gamma, \quad (5)$$

式中 r 为压缩参数, 而 $\xi = r e^{i\theta}$.

引进算符

$$d_1 = \frac{1}{2} (d^+ + d), \quad d_2 = \frac{1}{2i} (d - d^+), \quad (6)$$

d^+ , d 分别为单模光场的产生算符和湮没算符. 按照压缩态的定义, 若在某状态下光场的 d_1 分量处于压缩态时, 则其方差应有

$$\langle \Delta d_1^2 \rangle = \langle d_1^2 \rangle - \langle d_1 \rangle^2 < \frac{1}{4}. \quad (7)$$

于是由(3), (4), (6)诸式, 可得

$$\begin{aligned} \langle \Delta d_1^2 \rangle_{\text{sup}} &= \frac{1}{4} + A_2 r_1 r_2 + r_2^2 \left[\langle \Delta d_1^2 \rangle_{\text{sq}} - \frac{1}{4} + R^2 \cos^2 \varphi \right] \\ &\quad - (A_1 r_1 r_2 + R r_2^2 \cos \varphi)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

不失一般性, 其中已取 $\alpha = r_1$, $\beta = r_2 e^{i\varphi}$, $z = R e^{i\varphi}$; 下标 sup, sq 分别表征相应量按选加态或压缩态进行计算, 且

$$\langle \Delta d_1^2 \rangle_{\text{sq}} = \frac{1}{4} \left(e^{-2r} \cos^2 \frac{\theta}{2} + e^{2r} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (9)$$

利用关系式^[7]

$$\begin{aligned} \langle n | z, \xi \rangle &= (n! \cosh r)^{-1/2} \left[\frac{1}{2} e^{i\theta} \tanh r \right]^{n/2} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} [|z|^2 + z^* \tanh r \cdot e^{i\theta}] \right\} H_n \left(\frac{z + z^* e^{i\theta} \tanh r}{(2 e^{i\theta} \tanh r)^{1/2}} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $H_n(x)$ 为 n 阶厄密多项式, 于是(8)式中各系数为

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{Re} \{ e^{i\varphi} \langle 1 | z, \xi \rangle \} \\ &= (\cosh r)^{-1/2} R \exp \left\{ -\frac{R}{2} [R + \tanh r \cdot \cos(\theta - \varphi)] \right\} \\ &\quad \cdot [\cos(Q + \varphi) + \tanh r \cdot \cos(Q + \theta - \varphi)], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \text{Re} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\varphi} \langle 2 | z, \xi \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\cosh r)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{R}{2} [R + \tanh r \cdot \cos(\theta - \varphi)] \right\} \\ &\quad \cdot \{ R^2 [\cos(Q + 2\varphi) + \tanh^2 r \cdot \cos(Q + 2(\theta - \varphi))] \\ &\quad + (2R^2 - 1) \tanh r \cdot \cos(Q + \theta) \}, \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$Q = \rho - \frac{1}{2} R \tanh r \cdot \sin(\theta - \varphi). \quad (13)$$

而归一化条件为

$$r_1^2 + r_2^2 + 2\theta r_1 r_2 = 1, \quad (14)$$

且

$$Q = \operatorname{Re}\{e^{i\rho}\langle 0|z, \xi\rangle\} \\ = (\cosh\gamma)^{-1/2} \cos Q \cdot \exp\left\{-\frac{R}{2}[R + \tanh\gamma \cdot \cos(\theta - \varphi)]\right\}. \quad (15)$$

为了讨论方便, 引进迭加态中的压缩增强参量 u , 定义为

$$u = (\langle \Delta d_i^2 \rangle_{s,q} - \langle \Delta d_i^2 \rangle_{s,up}) / \left(\frac{1}{4}\right). \quad (16)$$

它表征迭加态场相对于压缩态场的压缩增强或减弱。 $u > 0$ 意味着压缩加强, $u < 0$ 则表示压缩减弱或消失。

三、特殊参数条件下的压缩增强

由(8)式直接讨论压缩加强还相当复杂, 下面的讨论中将取 $\theta = 0$, 因而 $\langle \Delta d_i^2 \rangle_{s,q} = \frac{1}{4}e^{-2\gamma}$, 并就几种特殊参数情况用数值方法讨论迭加态场中的压缩增强问题。

1. $Q = \varphi = \pi/2$

这时有

$$Q = 0, A_2 = 0, \quad (17)$$

$$A_1 = (\cosh\gamma)^{-1/2} R(1 - \tanh\gamma) \exp\left(-\frac{1}{2}R^2\right). \quad (18)$$

因而算符 d_i 的方差(8)式和归一化条件(14)式分别化成

$$\langle \Delta d_i^2 \rangle_{s,up} = \frac{1}{4} - Br_2^2 - A_1^2 r_1^2 r_2^2, \quad (19)$$

$$r_1^2 + r_2^2 = 1, \quad (20)$$

式中 $B = \frac{1}{4}(1 - e^{-2\gamma})$, 利用(20)式, (19)式又可表为

$$\langle \Delta d_i^2 \rangle_{s,up} = \frac{1}{4} - (A_1^2 + B)r_2^2 + A_1^2 r_2^4. \quad (21)$$

而压缩增强参数 u 可表为

$$u = 4(A_1^2 r_2^2 - B)(1 - r_2^2). \quad (22)$$

对于固定的 R^2 和 γ 值, 容易证明, 当

$$r_2^2 = (B + A_1^2)/2A_1^2 \quad (23)$$

时, $\langle \Delta d_i^2 \rangle_{s,up}$ 取最小值, u 取最大值, 即实现最大压缩增强

$$u_{\max} = e^{-2\gamma} - 1 + (B + A_1^2)^2/A_1^2. \quad (24)$$

由于 $r_i (i=1, 2)$ 都为实数(复数的模), $r_i^2 \leq 1$ 要求 $A_i^2 \geq B$, 根据(22)式, 显然, 当 $r_2^2 = 1$ 或 $r_2^2 \leq B/A_1^2$ 时, $u \leq 0$, 因而迭加态中不存在非经典效应增强——压缩增强; 但在 $B/A_1^2 < r_2^2 < 1$ 范围内, $u > 0$, 故迭加态场中呈现出比原始压缩态光场更强的压缩效应。运用数值方法讨论 u 随 r_2 的变化关系, 典型结果如图 1 所示。图 1(a) 的曲线是对同一 γ 值 ($\gamma = 0.05$), 而 R^2 取不同值时作的, 显然以 $R^2 = 1$ 时所给出的压缩增强效

果最佳且开始出现 $u > 0$ 的 r_2 值最小, 并且对固定的 γ 值, 具有 $u > 0$ 即压缩增强的 R^2 值即有上界还有非零下界(如 $\gamma = 0.05$ 时, 在 $0.028 \leq R^2 \leq 5.637$ 范围内才有 $u > 0$); 在此两界之外, 总是 $u < 0$, 即迭加态场使诸压缩态场的压缩减弱或消失. 图 1(b) 为 $R^2 = 1$ 时取不同 γ 值时作的各曲线. 显然, γ 值愈小, 即原始压缩光场的非经典效应愈弱时, 非经典效应增强愈明显, 即压缩增强愈大.

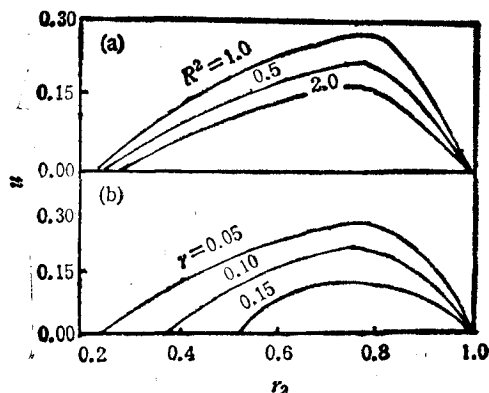


图 1 u 随 r_2 的变化
(a) $\gamma = 0.05$; (b) $R^2 = 1$

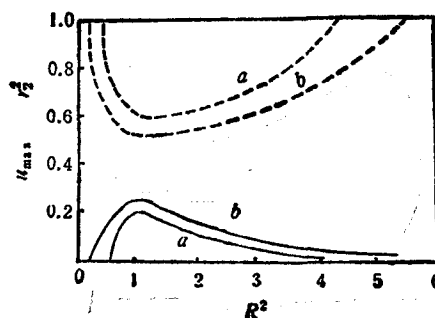


图 2 (24), (23) 式作的 $u_{\max}$, r_2^2 (虚线) 随 R^2 的变化
曲线 a 为 $\gamma = 0.1$; 曲线 b 为 $\gamma = 0.05$

按照(24)式, 可讨论 γ 不变时, $u_{\max}$ 随 R^2 变化的关系, 结果示于图 2, 同一图中还给出按(23)式计算的 r_2^2 平方值. 对于不同的 γ 值, 各曲线在 $R^2 = 1$ 处达到最大值, 而 r_2^2 在该处有最小值. 如 $\gamma = 0.05$ 时, 压缩增强参数 Q 达 28.56%, 此时算符 A_1 的方差在原始压缩光场中约为 0.2262, 而在迭加态场中则为 0.1558. 当 R^2 太小或太大时, $u_{\max}$ 近于零或为负. 因而这时迭加态中不存在非经典效应增强.

$$2. Q = 0, \varphi = \pi/2$$

在此参数条件下, 有

$$A_1 = 0, Q = (\cosh \gamma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} R^2\right) \quad (25)$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} Q [R^2 (1 - \tanh \gamma)^2 + \tanh \gamma]. \quad (26)$$

这时归一化条件和方差取下面形式:

$$r_1^2 + r_2^2 + 2Qr_1r_2 = 1, \quad (27)$$

$$\langle \Delta \hat{d}_i^2 \rangle_{\text{up}} = \frac{1}{4} + A_2 r_1 r_2 - B r_2^2. \quad (28)$$

而压缩增强参数为

$$u = 4B(r_2^2 - 1) - A_2 r_1 r_2. \quad (29)$$

由(27)式, 可解出

$$r_1 = -Qr_2 + \sqrt{(Q^2 - 1)r_2^2 + 1}. \quad (30)$$

这里只取正号解是因为 $Q > 0$, 而 r_1, r_2 都应为小于或等于 1 的正实数之故. 由(29), (30)式知, 当

$$r_{2\pm}^2 = \frac{1}{2(1-Q^2)} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{A_2^2(1-Q^2)}{B^2 + A_2^2 + 2QB A_2}} \right] \quad (31)$$

时, (28) 式中的 $\langle \Delta \hat{q}_1 \rangle_{u,p}$ 取最小值, 即呈现最小方差, 而 u 取最大值 $u_{\max}$, 即出现最大压缩增强效应。

根据(29)式, 讨论 u 和 r_2 的关系, 结果如图 3 所示, 情形和前面的极其相似, 图 3(a) 中的曲线是按 $\gamma = 0.05$ 而 R^2 取不同值时作的。图 3(b) 取 $R^2 = 1$ 而 γ 取不同值时作的。由讨论知, 当 $\gamma = 0.05$, $R^2 = 2.5$ 时, 最大压缩增强参数 u 为 45.70%, 这时 $\langle \Delta \hat{q}_1 \rangle_{u,q} \approx 0.2262$, 而 $\langle \Delta \hat{q}_1 \rangle_{u,p} \approx 0.1120$ 。

图 4 是按照(31)式给出的 $r_{2\pm}$ 计算的 $u_{\max}$ 随 R^2 的变化, 同时也给出 $r_{2\pm}$ 随 R^2 变化的关系, 结果表明: 对于恒定的 γ , 无论 r_2 取 r_{2+} 还是 r_{2-} , 当 R^2 很小或是很大时, 都有 $u \leq 0$, 即不可能有压缩增强。当 r_2 取 r_{2+} 时, $R^2 \approx 3$ 时所给出的压缩增强效果最显著, 但当 γ 值愈小时, 首先出现 $u_{\max} > 0$ 的 R^2 值愈大, 大体讲, γ 值愈小则压缩增强效果愈好; 而 r_{2+} 曲线, 则在 $u_{\max} > 0$ 的 R^2 值域内是凹曲线, 上端以 1 为界。同样, 在 r_2 取 r_{2-} 时, $u_{\max}$ 在 R^2 约为 2.5 处达最大值, 并且 γ 愈小时, 首先呈现 $u_{\max} > 0$ 的 R^2 值也愈小, 压缩增强参数愈大。但 r_{2-}^2 随 R^2 变化的关系则较为复杂。在 R^2 较小时, 压缩增强效果不显著, r_{2-}^2 由 1 单调减少, 在压缩增强效果明显的 R^2 值域内, r_{2-}^2 非单调变化, 直至较大 R^2 值后, 再单调地趋近于零。此时压缩增强效应亦不明显或消失。

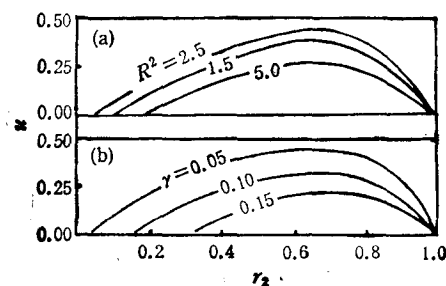


图 3 u 随 r_2 的变化
(a) $\gamma = 0.05$ (b) $R^2 = 2.5$

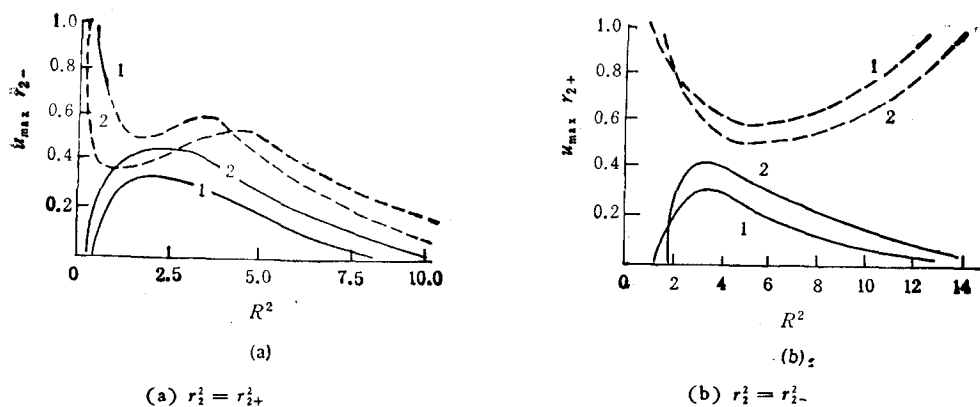


图 4 r_2 按(31)式取值时, u 随 R^2 的变化及相应的 r_2 (虚线) 曲线 1 为 $\gamma = 0.1$; 曲线 2 为 $\gamma = 0.05$

由上讨论可知, u 与 r_2 及原始压缩态场的特征参量 R^2 和 γ 的关系表明压缩效应增强与迭加态场中的压缩态场之强度及两个态所占权重密切相关, 这是因为非经典效应增强是两态间既竞争又协同作用的结果, 具体地讲两个态间存在干涉. 正是这种干涉效应使得迭加态中的非经典效应有增强的可能. 因此为能产生出明显的相互作用效应. 两个态场的强度及相对权重就必须匹配. 这就使得压缩态场的强度 (以平均光子数 $(R^2 + \sinh^2 \gamma)$ 表征) 及在迭加态中所占比重不能太小或太大, 如果太小, 则不足以支配真空态, 因而迭加态倾向于表现真空态的涨落特性; 如果太大, 则压缩态场本身的特征不容易被真空场所影响, 故在此两种情况下迭加态场不会增强原压缩态场中的非经典效应, 而使得压缩减弱乃至消失.

四、迭加态中的反聚束效应

反聚束效应也是光场的非经典特性之一, 在单模情况下, 它与光场的 Sub-Poisson 分布对应.

对于压缩态光场^[7]

$$\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle = R^2 \left[e^{-2\gamma} \cos^2 \left(\varphi - \frac{1}{2} \theta \right) + e^{2\gamma} \sin^2 \left(\varphi - \frac{1}{2} \theta \right) \right] + 2 \sinh^2 \gamma \cosh^2 \gamma. \quad (32)$$

因而由二阶等时相关因数的定义, 迭加态场的二阶相关因数 $g_{\text{sup}}^{(2)}(0)$ 为

$$g_{\text{sup}}^{(2)}(0) = g_{\text{sq}}^{(2)}(0)/r_1^2 \quad (33)$$

式中 $g_{\text{sq}}^{(2)}(0) = 1 + (\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2) / \langle \hat{n} \rangle^2$ 为压缩态光场的二阶相关因数.

显然, 上述两种呈现压缩增强情况, 总有 $\cos(2\varphi - \theta) = -1$, $\tanh \gamma > 0$, 由(5), (32)式知 $g_{\text{sq}}^{(2)}(0) \geq 1$. 即压缩态光场呈聚束特性, 又 $r_1^2 \leq 1$ 总是为真, 因之总有 $g_{\text{sup}}^{(2)}(0) \geq g_{\text{sq}}^{(2)}(0) \geq 1$ 成立. 这表明迭加态场只有比压缩光场更强的聚束效应, 而不会出现反聚束效应.

下面讨论 $Q = \pi$, $\varphi = \pi/2$ 的情况这时仍有 $g_{\text{sq}}^{(2)}(0) \geq 1$, 此时归一化条件为

$$r_1^2 + r_2^2 - 2Qr_1r_2 = 1, \quad (34)$$

式中 Q 由(25)式给出. 因而 r_1, r_2 可为大于 1 的正数, 故有可能使 $g_{\text{sup}}^{(2)}(0)$ 出现小于 1 的情况. 即迭加态中呈现出反聚束效应.

由(34)式知, 把 r_2 看成是 r_1 的函数. 对于确定的 γ 和 R^2 值, 当 $Q \approx 1$ (即 γ 和 R^2 不同时为零) 时, 若

$$r_1^2 = Q^2(1 - Q^2), \quad (35)$$

则 r_2^2 取最大值

$$r_{2\text{max}}^2 = 1/(1 - Q^2). \quad (36)$$

这时迭加态场的二阶相关因数取最小值, 即呈现最强反聚束效应,

$$g_{\text{sup}}^{(2)}(0) = g_{\text{sq}}^{(2)}(0)(1 - Q^2). \quad (37)$$

根据(37)式, 数值方法讨论 γ 不变时 $g_{\text{sup}}^{(2)}(0)$ 随 R^2 的变化, 结果如图 5 所示, 为便于比较, 同一图中也绘出相应的 $g_{\text{sq}}^{(2)}(0)$, 显然这时原始压缩态光场在小 R^2 值域内呈很强的聚束效应. 而迭加态在 γ, R^2 都较小时, 总有 $g_{\text{sup}}^{(2)}(0) < 1$, 即迭加态具有反聚束特征,

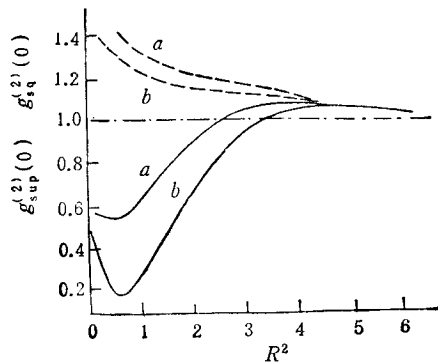


图5 按(37)式计算的 $g_{sup}^{(2)}(0)$ (实线), $g_{sq}^{(2)}(0)$ (虚线)随 R^2 的变化
曲线 a 为 $\gamma = 0.10$; 曲线 b 为 $\gamma = 0.05$

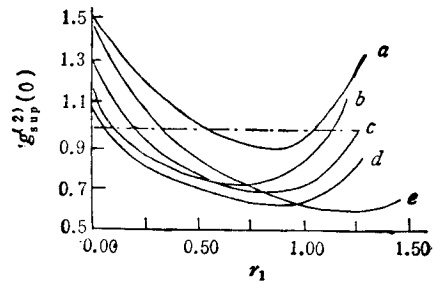


图6 $g_{sup}^{(2)}(0)$ 随 r_1 的变化
曲线 a 为 $\gamma = 0.2, R^2 = 0.8$; 曲线 b 为 $\gamma = 0.1, R^2 = 1.0$; 曲线 c 为 $\gamma = 0.1, R^2 = 0.8$; 曲线 d 为 $\gamma = 0.05, R^2 = 0.8$; 曲线 e 为 $\gamma = 0.1, R^2 = 0.5$

且在某个非零 R^2 值上, $g_{sup}^{(2)}(0)$ 达最小值。反聚束效应最强, 其后随 R^2 渐增而反聚束效应减弱乃至消失, $g_{sup}^{(2)}(0)$ 达最大值后随 $g_{sq}^{(2)}(0)$ 趋于 1。随着 γ 上升, $g_{sup}^{(2)}(0)$ 在小于 1 的区间内渐变为单调的, 直至 γ 约大于 0.733 后, 无论怎样的 R^2 值, $g_{sup}^{(2)}(0)$ 总大于 1, 这时迭加态不再呈现反聚束效应。

又由(34)式, 知

$$r_{2\pm} = Qr_1 \pm \sqrt{1 - (1 - Q^2)r_1^2}. \quad (38)$$

为使根号有意义, 要求

$$r_1^2 \leq 1/(1 - Q^2). \quad (39)$$

当 r_2 取 r_{2-} 时, 还要求 $r_1^2 \geq 1$ 成立。计入这些考虑, 讨论 $g_{sup}^{(2)}(0)$ 与 r_1 的关系, 结果表明, 当 r_2 取 r_{2-} 时, 迭加态场只呈现比原始压缩态光场更强的聚束效应。

当 $r_2 = r_{2+}$ 时, 数值结果如图(b)所示, 显然对于较小的 γ 和 R^2 值, 在适当的 r_1 值域内, 迭加态场具有反聚束效应, 但在太小的 r_1 值域内, 迭加态场总是聚束的; 而对较大的 r_2 值域, 则视不同的 γ 和 R^2 值, 迭加态场或是反聚束的或是聚束的。这是因为 r_1 较小时, 压缩态占的权重大; 真空态不足以影响压缩态故迭加态场呈现出压缩态场的统计特性。而 r_1 较大时, r_2 亦较大, 故两个态的竞争、协同作用结果就由压缩态场的强度 R^2 和 γ 值决定。两者匹配时, 则能产生新的效应; 而两者失配时, 则不会产生新的效应。

五、结 语

以上讨论表明, 在适当条件下, 真空态与压缩态的迭加态能使非经典效应增强。即改变压缩态光场的压缩程度, 而且这种效应在弱场强浅压缩光场的迭加态中尤为显著; 并当原始压缩光场不处在反聚束态时, 迭加态场中还可能呈现出反聚束的非经典效应。已如上述, 这些都是迭加态中两个态之间相互竞争、制约和干涉的结果。

- [1] D. F. Walls and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 709.
- [2] C. M. Caves, *Phys. Rev.*, **D23**(1981), 1693.
- [3] R. S. Bondurant *et al.*, *Phys. Rev.*, **A30**(1984), 343.
- [4] C. W. Gardiner *et al.*, *Opt. Commun.*, **50**(1984), 173.
- [5] K. Wodkiewicz *et al.*, *Phys. Rev.*, **A35**(1987), 2567.
- [6] 夏云杰、郭光灿, *中国激光*, **16**(1989), 394.
- [7] R. Loudon and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.*, **34**(1987), 709.

ENHANCEMENT OF SQUEEZING AND SUPERPOSITION STATES

ZHU KAI-CHENG WANG QIN YAN ZHAN-XIAN

Department of Physics, Jishou University, Jishou, Hunan, 416000

(Received 29 April 1990)

ABSTRACT

A way is presented with which the optical field states exhibiting much deeper squeezing can be achieved through a simple superposition of the vacuum and the squeezed states with smaller squeezing. The enhancement effect of squeezing and the antibunching effect exhibiting in the superposition states depend on the average photon number of the squeezed states and are very remarkable for the field exhibiting much smaller squeezing.

PACC: 4250