

一般稳态时空视界的确定

赵 峰 刘 辽

北京师范大学物理系, 北京, 100875

1990年10月24日收到

本文给出在一般稳态时空中确定是否存在事件视界并决定其位置的普遍适用的解析方法。

PACC: 9760L; 0420

一、引 言

以往给出的在稳态时空中确定视界位置的解析方法, 是不完备的, 不能包括已知的全部例子。在文献[1—3]中提出一个更完备的方法, 但没有给出充分的论证。本文对此问题作进一步的探讨, 并得到更清晰的结论。

二、零超曲面的确定

设

$$n^\mu = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \quad (1)$$

为超曲面

$$F(x^\mu) = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (2)$$

的法矢量, 则零超曲面的定义为

$$n^\mu n_\mu = 0 \quad (3)$$

或

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \frac{\partial F}{\partial x^\nu} = 0. \quad (4)$$

对一般稳态时空^[4]

$$\begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & g_{03} \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ g_{30} & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

(4)式写成

$$g^{00} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 + 2g^{03} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) + g^{11} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + g^{22} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + g^{33} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 = 0. \quad (6)$$

对于稳态时空,特征曲面 $F(x^\mu)$ 应该与 t 无关,所以

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

如果 g^{00} 不发散,零曲面条件应化成

$$2g^{03}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) + g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + g^{33}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = 0. \quad (8)$$

假如 g^{03} 也不发散,则上式第一项为零,有

$$g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + g^{33}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = 0. \quad (9)$$

这正是通常人们用以确定稳态时空中视界位置的公式^[5,6]. 然而,实际情况中 g^{00} 与 g^{03} 都可能存在发散点,零曲面条件不一定总能归结为(8)式或(9)式. 例如, Rindler 时空的度规分量

$$g^{00} = -1/x^2, \quad (10)$$

在 $x=0$ 处发散. 研究表明,该处正是 Rindler 视界的位置. 此结果不能从(8)式或(9)式得到,但它应该满足(6)式. 可见,应对零曲面条件(6)式作进一步研究.

考虑稳态时空中黑洞的形成过程. 度规分量及作为视界的零曲面的位置都是逐渐稳定下来的,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} \rightarrow 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} \rightarrow 0. \quad (12)$$

最终达到

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

的终态. 现在考查零曲面 F 发展到稳定终态的过程. 在此过程中,(6)式始终成立,但在到达终态前,(13)与(14)式均不成立. 应该指出,度规分量的奇异性是在时空稳定到终态时出现的. 在此之前,这些分量都是解析的.

在(6)式两端乘以 $(g^{00})^{-1}$, 得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 + (g^{00})^{-1} \left[2g^{03}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) + g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + g^{33}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right] = 0. \quad (15)$$

当时空趋于稳定终态时,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} \rightarrow 0.$$

上式化成

$$(g^{00})^{-1} \left[2g^{03}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) + g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + g^{33}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right] = 0. \quad (16)$$

由于到达稳定终态时, g^{03} 有可能出现发散点,虽然 $\partial F/\partial t \rightarrow 0$, 上式中含 g^{03} 的项也不应轻易舍弃. 因为 g^{00} 也可能出现发散点,所以(16)式可化成

$$(g^{00})^{-1} = 0; \quad (17)$$

$$2g^{03}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) + g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + g^{33}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = 0. \quad (18)$$

这两个方程的解, 都是作为视界的零曲面最终稳定的位置. 不难看出, (18) 式就是通常用来判定稳态视界的方程 (8), (17) 式则是以往忽略的部分.

当采用拖曳坐标系^[2,3]

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} \quad (19)$$

时, 线元

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dt dz + g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2 \quad (20)$$

化成

$$ds^2 = \hat{g}_{00}dt^2 + g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2, \quad (21)$$

其中

$$\hat{g}_{00} \equiv g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}}. \quad (22)$$

容易证明

$$\hat{g}_{00} = (g^{00})^{-1}. \quad (23)$$

因此零曲面条件 (16) 式可化成

$$\hat{g}_{00} \left[2g^{03}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) + g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + g^{33}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right] = 0. \quad (24)$$

(17) 和 (18) 式则可写成

$$\hat{g}_{00} = 0; \quad (25)$$

$$2g^{03}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) + g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + g^{33}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = 0. \quad (26)$$

Kerr 黑洞相当于 $x = r$, $y = \theta$, $z = \phi$ 的情况. 存在 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ 和 $\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a$ 两个 Killing 矢量, 即稳态轴对称,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \phi} = 0. \quad (27)$$

再考虑到 Kerr 度规分量的奇异性, (24) 式可约化为

$$\hat{g}_{00} \left[g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 \right] = 0. \quad (28)$$

把度规分量的具体函数形式代入, 不难看出

$$\hat{g}_{00} = 0 \quad (29)$$

与

$$g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 = 0 \quad (30)$$

有相同的解. 实际上, 这两个方程都约化成

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr = 0. \quad (31)$$

对静态球对称的史瓦西时空, F 只是 r 的函数. 考虑到度规的奇异性, (24) 式化成

$$g_{00}g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 = 0. \quad (32)$$

显然,

$$g_{00} = 0 \quad (33)$$

与

$$g^{11} = 0 \quad (34)$$

有相同解

$$r = 2m. \quad (35)$$

应当注意, (25) 与 (26) 式并非总有相同的解. 例如, 对于 Rindler 时空, (24) 式化成

$$g_{00}g^{11}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0. \quad (36)$$

Rindler 度规为 $g_{00} = -x^2$, $g_{11} = 1$. 可见, 方程 (26) 无解, (25) 式的解为

$$g_{00} = -x^2 = 0. \quad (37)$$

即视界位于 $x = 0$ 处. 可以看到, 零曲面条件 (24) 式确实比条件 (8) 式完备, 它包括 Rindler 情况.

需要指出的是

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (38)$$

并不决定零曲面. 这里所说的零曲面实际是类光曲面, 它要求该超曲面法向矢量类光 (null), 即

$$n^\mu n_\mu = 0. \quad (39)$$

但

$$n^\mu \neq 0. \quad (40)$$

我们称

$$n^\mu = 0 \quad (41)$$

的矢量为 zero 矢量, (38) 式所示的就是这种矢量, 它不属于 null (类光) 矢量. 所以, (38) 式决定的不是作为视界的类光曲面.

三、Killing 视界的确定

众所周知, 视界的温度与它的表面重力 K 有关, 而表面重力实际上是作为视界母线的类光测地线汇群参量对仿射参量的偏离. 因此, 形成视界的零曲面有以下特点:

- 1) 其母线线汇为类光测地线汇,
- 2) 此线汇的切矢场是类光 Killing 矢量场.

所以, 我们感兴趣的不是全体零超曲面, 而是其中满足上述条件的那一部分.

下面讨论存在类光 Killing 矢量场 l^μ 的稳态时空. 稳态表明, 存在类时 Killing 场 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu$. 这样的时空, 还应存在至少一个类空 Killing 场, 它是 l^μ 与 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu$ 的线性迭加. 为了讨论方便, 设此类空 Killing 场为 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\mu$. 选择坐标系, 可使时空度规取 (5)

式的形式^[4].

类光 Killing 场 l^a 对应一族零测地线汇, 设 $\mathcal{S}$ 为以此线汇作母线的类光超曲面. 现在, 把类光 Killing 矢量用时空平移群的群参量 t 表出

$$l^a = \frac{dx^\mu}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a. \quad (42)$$

注意

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a \approx \frac{dx^\mu}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a = l^a. \quad (43)$$

即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a \approx l^a \quad (44)$$

或

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial t} \approx \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (45)$$

显然

$$l^a = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial x^\mu}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial x^\mu}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a. \quad (46)$$

由于此时空不存在 x, y 方向的拖曳,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0. \quad (47)$$

(46) 式化成

$$\begin{aligned} l^a &= \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a + \frac{dz}{dt} \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{dz}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^a. \end{aligned} \quad (48)$$

从 (19) 式可知, z 方向的拖曳速度为

$$\Omega \equiv \frac{dz}{dt} = - \frac{g_{03}}{g_{33}}. \quad (49)$$

因为 l^a , $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a$ 和 $\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^a$ 均为 Killing 矢量, l^a 显然应该是 $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a$ 与 $\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^a$ 的线性迭加. 这表明, 在超曲面 $\mathcal{S}$ 上, 拖曳速度 Ω_H 必然是一个常数. 从 (48) 式可得

$$l^a = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \Omega_H \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^a. \quad (50)$$

显然

$$\begin{aligned} l^a l_a &= g_{00} + 2\Omega_H g_{03} + \Omega_H^2 g_{33} \\ &= g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} = \hat{g}_{00}, \end{aligned} \quad (51)$$

l^a 类光, 要求

$$l^a l_a = 0, \quad (52)$$

即

$$\hat{g}_{00} = 0. \quad (53)$$

这正是(25)式。可见,(53)式不仅决定零超曲面,而且决定那类形成 Killing 视界的零超曲面:其母线线汇是类光测地线汇,且对应一个类光 Killing 矢量场。不难看出,(26)式虽然决定一类零曲面,但不能保证它们是 Killing 视界。

所以,稳态时空中的 Killing 视界应由(53)式决定。

四、产生 Hawking 效应的视界

稳态时空中视界的表面重力可由下式求出^[2,3]:

$$K = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-g^{11}}{\hat{g}_{00}}} \hat{g}'_{00}, \quad (54)$$

式中

$$\hat{g}'_{00} \equiv \frac{\partial \hat{g}_{00}}{\partial x}. \quad (55)$$

已设视界位于 $x = \xi$ 处。 K 对应视界的温度

$$T = \frac{K}{2\pi k_B}. \quad (56)$$

k_B 为玻耳兹曼常数。我们感兴趣的是 K 非零非奇异而取有限值的非简并视界,这样的视界产生有限温度的 Hawking 辐射。所以,在稳态时空中,与 Hawking 效应相连系的视界应满足条件

$$\begin{aligned} \hat{g}_{00} &= 0; \\ K &\neq 0, K \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (57)$$

如果设 $\hat{g}_{00}$ 与 g^{11} 有如下形式:

$$\hat{g}_{00} = (x - \xi)^n / \theta(x, y, z); g^{11} = f(x, y, z)(x - \xi)^m, \quad (58)$$

其中 θ 与 f 为在视界 $x = \xi$ 附近非零非奇异的函数, m 与 n 为实数。这时(54)式化成

$$K = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-f}{\theta}} (x - \xi)^{\frac{m+n}{2}-1} \left[n - \frac{\theta'}{\theta} (x - \xi) \right]. \quad (59)$$

若要 K 取非零的有限值,必须有

$$m + n = 2; n \neq 0. \quad (60)$$

而 $\hat{g}_{00} = 0$ 又要求

$$n > 0. \quad (61)$$

所以,条件(57)式又可表为

$$m + n = 2; n > 0. \quad (62)$$

(57)式或(62)式就是稳态时空中,决定“产生 Hawking 效应的事件视界”的条件^[2,3,7]。

五、结 论

从以上讨论可以看出,通常使用的、利用度规分量确定事件视界的方法,存在缺陷。经过对零曲面方程的重新分析,给出确定稳态时空中事件视界的普适方法。这一方法可以方便地用于各种静态或稳态时空 Hawking 效应的研究。

- [1] 赵峥, 物理学报, **30** (1981), 1508.
- [2] 赵峥、桂元星, 天体物理学报, **3** (1983), 146.
- [3] 赵峥、桂元星, In Hu Ning ed., *Proceeding of the third Marcel Grossmann meeting on general relativity*, Beijing, Science Press, (1983), p. 1177.
- [4] M. Carmeli, *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*, A Wiley-Interscience Publication, (1982), p. 365.
- [5] R. H. Boyer & T. G. Price, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **61** (1956), 531.
- [6] C. V. Vishveshwara, *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 1319.
- [7] 赵峥, 物理学报, **39** (1990), 1854.

DETERMINATION OF EVENT HORIZON IN UNIVERSAL STATIONARY SPACE-TIME

ZHAO ZHENG LIU LIAO

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing, 100875

(Received 24 October 1990)

ABSTRACT

A universal method for determining if there exists an event horizon in a stationary space-time and showing its location is given in this paper. It is useful for studying Hawking effect in every static or stationary space-time.

PACC: 9760L; 0420

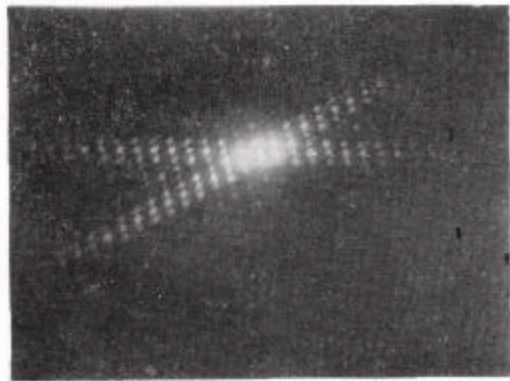
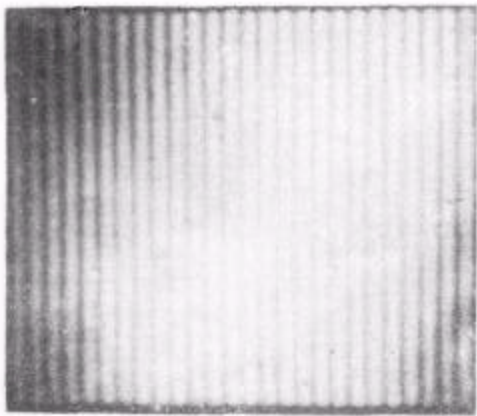
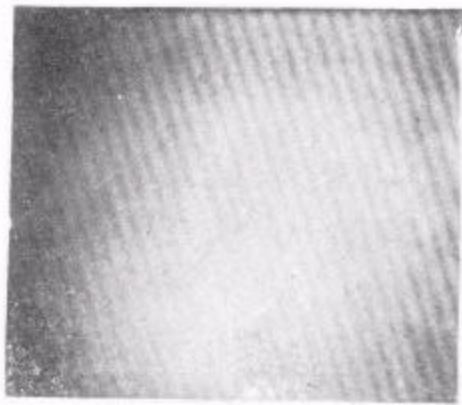


图2 在完全相干光照明下， $\xi \rightarrow \infty$ ，在透镜 L 的后焦面上可见点阵状和频谱强度分布（ $\theta \neq 0$ ），它再经傅里叶反变换就可生成 Moiré 差频条纹

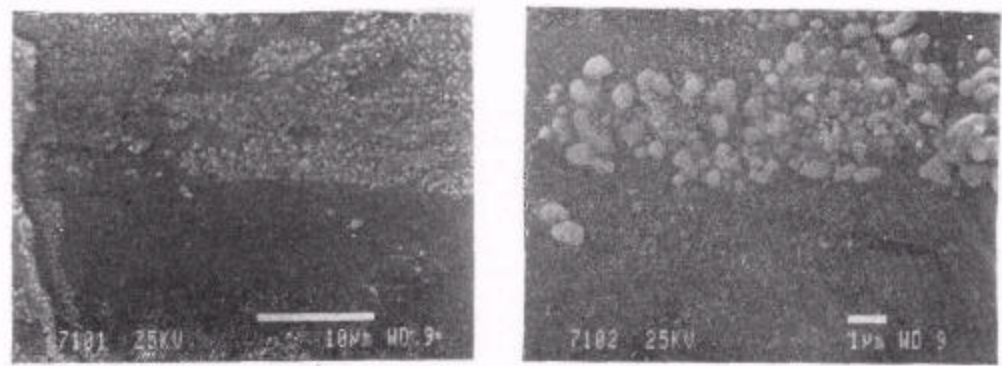


(a) 双光栅互相平行, 出现与栅线平行的 Lau 条纹



(b) 光栅 G_2 旋转角, Lau 条纹发生旋转, 且对比度下降

图3 近似非相干光照明下的 Lau 条纹 照明空间尺寸较小, $h_1 = 8.5\text{mm}$, $h_2 = 1\text{mm}$, $p = 1/12\text{mm}$, $z_2 = 11\text{mm}$



(a) Cu_3Zr 的 SEM 显微相 (b) $\text{Cu}_{51}\text{Zr}_{14}$ 的 SEM 显微相

图 1 UHV 中断裂后, 1bar 氢气下 200℃ 退火 10h

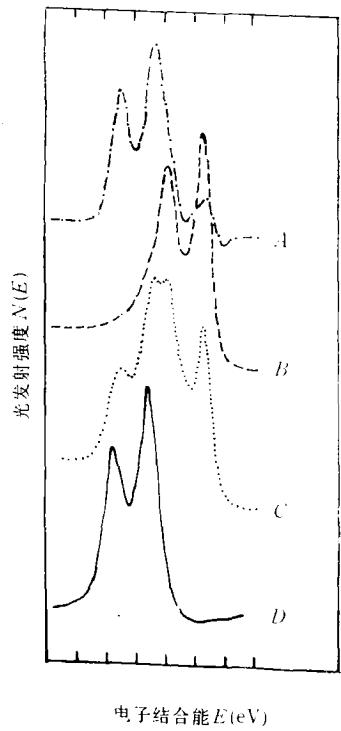
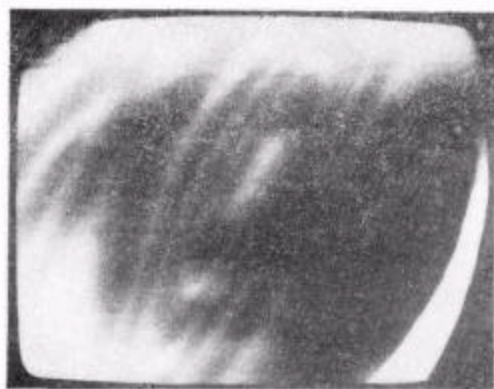
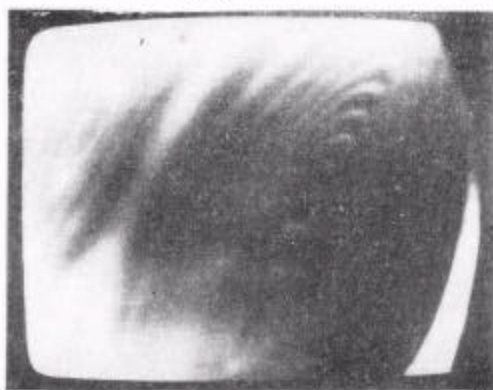


图 2 $\text{Cu}_{51}\text{Zr}_{14}$ 合金样品经不同处理后, Zr3d 芯能级的 XPS 谱.

谱线 A 为暴露于空气; 谱线 B 为 UHV 清洁; 谱线 C 为 UHV 中 200℃ 退火 10h;
谱线 D 为 1Bar H_2 , 200℃ 退火 10h



(a) 50min



(b) 170min

图3 二次电子象

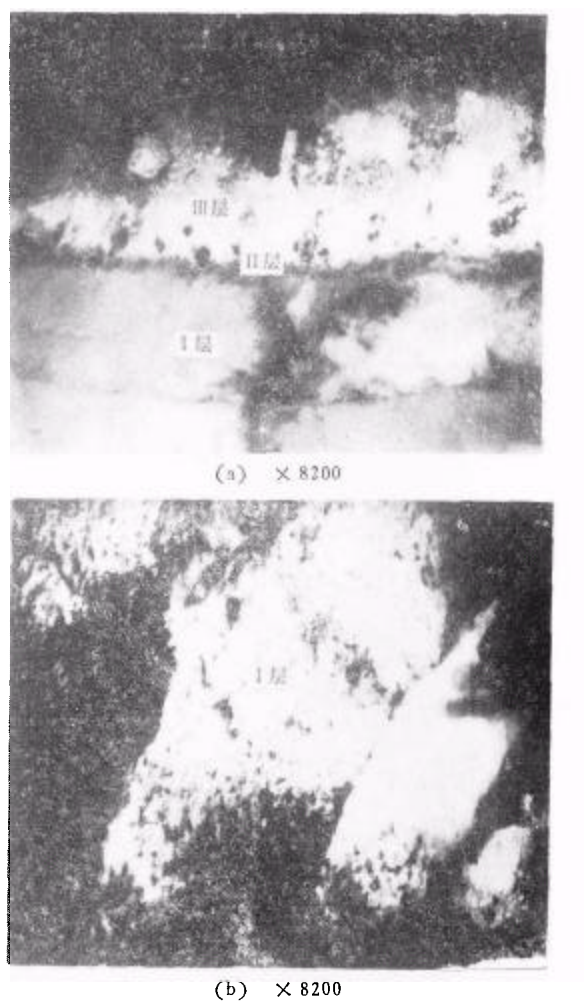


图6 Ti(Y)N膜/ A_3 钢基界面X射线TEM形貌(a)和I亚层的位错衍射象(b)

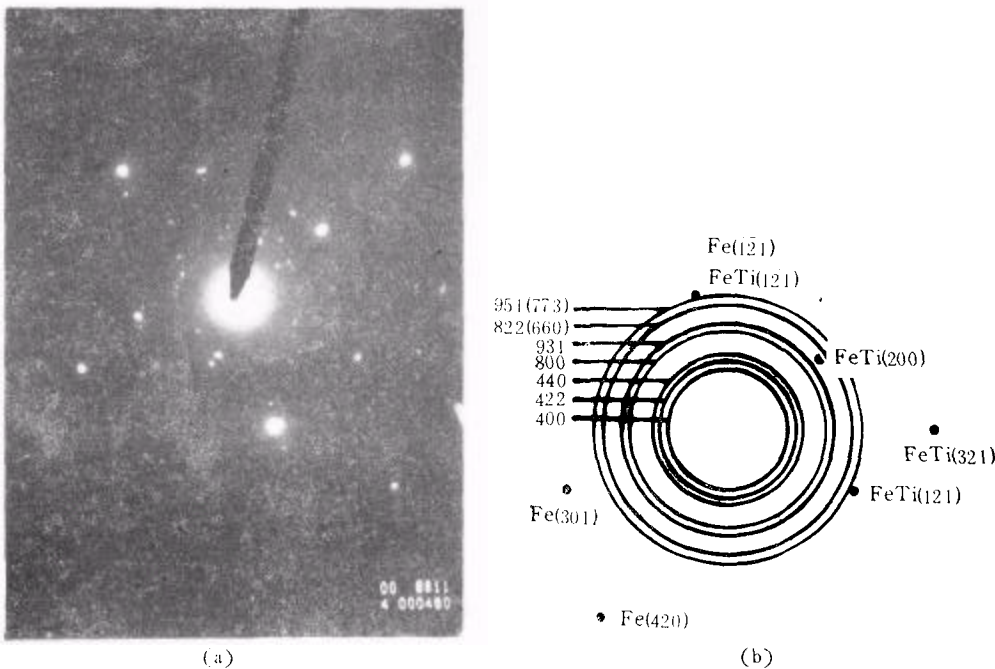


图7 图6(a)中I亚层的选区电子衍射花样(a)及其标定(b)