

平面与空间转子体系的双波函数研究

刘 全 慧

湖南大学应用物理系,长沙, 410082

王 发 伯

湖南师范大学物理系,长沙, 410081

1990年12月12日收到

本文给出了平面与空间转子体系的双波函数论,精确地得到了平面与空间转子体系的经典力学运动方程,并探讨了这两个体系通常量子论中的有关问题。

PACC: 0365; 0320

一、引 言

自从1986年黄湘友发现平面波和自由粒子运动方程之间的一个新的数学关系以来^[1],以该数学关系的推广而发展起来的双波函数论得到了一系列引人注目的结果^[2-9]。文献[8]中宣称我们已用双波函数研究了平面和空间转子体系以及其它量子力学中的典型体系,但对平面和空间转子体系的双波函数处理的结果一直未发表。本文详尽且完整地建立了上述两体系的双波函数量子论,较侧重地讨论了它们的经典极限问题。直接而干净地得到了通常在量子力学中无法精确地得到的经典力学运动方程,同时探讨了平面转子体系中的 Judge-Lewis 困难^[10]和球坐标下广义动量 P_θ 的量子化问题等。

为节省篇幅,本文只列出处理上述两体系时的主要结果。有关符号采用了量子力学中熟知的写法。

二、平面转子体系的双波函数论

双波函数论中,在平面转子体系中测力学量 f 将得

$$\langle f \rangle_m = \text{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \Psi^*(\varphi, t) f \Phi_m(\varphi, t), \quad (1)$$

其中 $\Phi_m(\varphi, t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp[i m(\varphi - \varphi_0) - i E_m t / \hbar]$ 为通常平面转子定态波函数。

$$E_m = (m\hbar)^2 / 2I, \quad (2)$$

I 为转子惯量, φ_0 为理论中引入的一个实参量, $\Psi(\varphi, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m(\varphi, t)$ 为双波函数论中特有的一个波函数。

为方便起见, 设 $m \geq 0$, 则当 $\hat{f} = \hat{L}_z$, $\hat{H}$ 时由(1)式有

$$\begin{aligned}\langle L_z \rangle_m &= m\hbar, \\ \langle H \rangle_m &= (m\hbar)^2/2I.\end{aligned}\quad (3)$$

所得结果与量子力学同. 再设 $\hat{f} = \varphi, \varphi^2$, 则有

$$\begin{aligned}\langle \varphi \rangle_m &= \text{Re} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \varphi_{m'm} \exp[i(E_{m'} - E_m)t/\hbar] = \pi - \left[\sum_{m' < 0} \frac{-1}{|m'| + m} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{m'=0}^{m-1} + \sum_{m'=m+1}^{\infty} \right) \frac{1}{m' - m} \right] \sin[(E_{m'} - E_m)t/\hbar + (m' - m)\varphi_0] \\ &= \pi - \left(- \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r + 2m} + \sum_{r=-1}^{-m} \frac{1}{r} + \sum_{r=1}^m \frac{1}{r} \right) \\ &\quad \times \sin \left[\frac{r(2m + r)\hbar t}{2I} + r\varphi_0 \right],\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}\langle \varphi^2 \rangle_m &= \frac{4}{3} \pi^2 + \text{Re} \sum_{m' \neq m} \left[\frac{2\pi i}{m' - m} + \frac{2}{(m' - m)^2} \right] \\ &\quad \times \exp[i(E_{m'} - E_m)t/\hbar + i(m' - m)\varphi_0] = \frac{4}{3} \pi^2 \\ &\quad - 2\pi \sum_{m' \neq m} \frac{1}{m' - m} \sin[(E_{m'} - E_m)t/\hbar + (m' - m)\varphi_0] \\ &\quad + 2 \sum_{m' \neq m} \frac{1}{(m' - m)^2} \cos[(E_{m'} - E_m)t/\hbar + (m' - m)\varphi_0].\end{aligned}\quad (5)$$

本文主要讨论(4), (5)式在如下极限下的性质:

$$m \rightarrow \infty, \hbar \rightarrow 0, m\hbar = L_z, \quad (6)$$

其中 L_z 为经典角动量值. $\langle f \rangle_m$ 的下标改用 L_z 标记, $m\hbar/I$ 记为 ω , 则(4), (5)式分别给出

$$\langle \varphi \rangle_{L_z} = \pi - 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sin r(\omega t + \varphi_0), \quad (4a)$$

$$\begin{aligned}\langle \varphi^2 \rangle_{L_z} &= \frac{4}{3} \pi^2 - 4\pi \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sin r(\omega t + \varphi_0) \\ &\quad + 4 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \cos r(\omega t + \varphi_0).\end{aligned}\quad (5a)$$

令 $\varphi_0 = -\omega t_0$, (4a), (5a) 式分别为如下经典运动方程:

$$\varphi = \omega(t - t_0) \quad 0 < t - t_0 \leq 2\pi/\omega, \quad (4b)$$

$$\varphi^2 = [\omega(t - t_0)]^2 \quad 0 < t - t_0 \leq 2\pi/\omega \quad (5b)$$

的 Fourier 展开.

更进一步, 在极限(6)式下有

$$\langle \varphi^k \rangle_{L_z} = \langle \varphi \rangle_{L_z}^k \quad (k = 3, 4, \dots) \quad (7)$$

这样,双波函数论直接而严格地给出了具有某一确定能量 E 、角动量 L_z 和初始位置 φ_0 的经典运动方程。注意在通常的量子力学中,由于存在 Judge-Lewis 困难^[10], φ 本身的含义是不清楚的。量子力学因此而出现过几种不直接用 φ 来讨论问题的方案^[10,11]。很明显,双波函数论中没有这一困难。而且由于(7)式当 m 较小时并不成立,故双波函数论亦不认为微观粒子是经典的点粒子。

三、空间转子体系的双波函数论

首先,给出空间转子体系的经典 Hamiltonian 量

$$H = \frac{1}{2I} \left(P_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} P_\varphi^2 \right), \quad (8)$$

对应于能量为 E , 角动量 z 轴分量 $P_\varphi = I \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} = C$ (常数) 时的经典力学解

$$\begin{cases} \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{C^2}{2IE}} \cos \sqrt{\frac{2E}{I}} (t - t_0), \\ \tan \varphi = \sqrt{\frac{C^2}{2IE}} \tan \sqrt{\frac{2E}{I}} (t - t_0). \end{cases} \quad (9)$$

$$\tan \varphi = \sqrt{\frac{C^2}{2IE}} \tan \sqrt{\frac{2E}{I}} (t - t_0). \quad (10)$$

双波函数论中,在量子化的空间转子体系中测力学量 f 时将得

$$\langle f \rangle_{lm} = \text{Re} \int dQ \Phi^*(\theta, \varphi, t) \hat{f} \Psi_{lm}(\theta, \varphi, t), \quad (11)$$

其中 $\Psi_{lm}(\theta, \varphi, t) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \exp[-iE_l(t - t_0)/\hbar]$ 为通常空间转子定态波函数。

$$E_l = l(l+1)\hbar^2/2I. \quad (12)$$

Φ 为一实参量, $\Phi = \sum_{l,m} \Psi_{lm}(\theta, \varphi, t)$ 为双波函数论中特有的一个波函数。

当 $\hat{f} = \hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z$ 时,由(11)式将分别得

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{lm} &= l(l+1)\hbar^2/2I, \\ \langle L^2 \rangle_{lm} &= l(l+1)\hbar^2, \\ \langle L_z \rangle_{lm} &= m\hbar. \end{aligned} \quad (13)$$

当 $\hat{f} = \cos \theta, \cos^2 \theta$ 时,则得

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta \rangle_{lm} &= \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l+1)(2l-1)}} \cos \frac{l\hbar}{I} (t - t_0) \\ &\quad + \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} \cos \frac{(l+1)\hbar}{I} (t - t_0), \\ \langle \cos^2 \theta \rangle_{lm} &= \frac{l^2 - m^2}{(2l)^2 - 1} + \frac{(l+1)^2 - m^2}{[2(l+1)]^2 - 1} + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l)^2 - 1}} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{(l-1)^2 - m^2}{[2(l-1)]^2 - 1}} \cos \frac{2l\hbar}{I} (t - t_0) \\ &\quad + \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{[2(l+1)]^2 - 1}} \cdot \sqrt{\frac{(l+2)^2 - m^2}{[2(l+2)]^2 - 1}} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\times \cos \frac{(2l+3)\hbar}{I} (t-t_0). \quad (15)$$

当 $\hat{f} = -\hbar^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ 时, 该算符以 $\hat{P}_\theta^2$ 记之, 代入(11)式得一较复杂表达式, 我们只列出如下极限下的严格结果:

$$l, m \rightarrow \infty, \hbar \rightarrow 0, l\hbar = \sqrt{2IE}, m\hbar = C, \quad (16)$$

E, C 分别为经典的能量和角动量 z 轴分量的值.

$$\langle P_\theta^2 \rangle_{lm} = (l\hbar)^2 \frac{[(l\hbar)^2 - (m\hbar)^2] \sin \frac{2l\hbar}{I} (t-t_0)}{(m\hbar)^2 + [(l\hbar)^2 - (m\hbar)^2] \sin^2 \frac{l\hbar}{I} (t-t_0)}. \quad (17)$$

下面 $\langle f \rangle_{lm}$ 的脚标将换以 E, C 标记, 则在相同的极限(16)式下, (14), (15)式分别有

$$\langle \cos \theta \rangle_{EC} = \sqrt{1 - \frac{C^2}{2IE}} \cos \sqrt{\frac{2E}{I}} (t-t_0), \quad (14a)$$

$$\langle \cos^2 \theta \rangle_{EC} = \langle \cos \theta \rangle_{EC}^2. \quad (15a)$$

很明显, (14a) 和(9)式完全一样. 一般地, 亦可得到

$$\langle \cos^k \theta \rangle_{EC} = \langle \cos \theta \rangle_{EC}^k \quad (k=3, 4, \dots). \quad (18)$$

注意极限(16)式下如下关系成立:

$$\langle P_\theta^2 \rangle_{EC} = \left(I \frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad (19)$$

其中 θ 为方程(14a)所描述. 这样, P_θ^2 就有了严格的经典极限. 而算符 $\hat{P}_\theta = -i\hbar \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{\sin \theta}$, 由于代入(11)式中积分发散, 在这一体系中反而是没有严格经典对应的量. 注意到在量子力学中, 球坐标并不构成一个真正的表象^[12], 而且球坐标中的量子 Hamiltonian 量不能由球坐标下的经典 Hamiltonian 量经过量子化 $P_r \rightarrow \hat{P}_r, P_\theta \rightarrow \hat{P}_\theta, P_\varphi \rightarrow \hat{L}_z$ 而得到^[13]. 这样, 在通常量子力学中, 球坐标下的量子 Hamiltonian 量对应于球坐标下什么样的经典力学量可以说是不清楚的. 但这个问题在双波函数中则不存在.

注意此时经典力学已完全有效. 利用经典力学关系式 $I \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} = C$, 则可得到经典力学中的另一方程(10).

四、结 论

根据本文的结果并综合以往的研究^[1-9], 可得出结论:

1. 双波函数论在经典极限下可直接给出单粒子的经典运动方程.

2. 双波函数论使我们有能力来考查在量子力学中的疑难问题. 例如本文涉及的量 $\hat{P}$

本身的含义, $-\hbar^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ 的经典对应问题等.

3. 由于一般在“均匀系综”中^[1-3,6-9], 双波函数论将给出通常的量子力学结果, 故双波函数论支持了 Einstein 等人对量子力学的理解^[14]. 他们认为应该有一个完备的理论来描述微观世界, 而目前的量子力学仅仅是关于统计系综的理论.

本课题得到中国科学院理论物理研究所的资助. 本文作者之一(刘全慧)对何祚麻先生的指教深表谢意.

- [1] X. Y. Huang, *Phys. Lett.*, **A115**(1986), 310.
- [2] X. Y. Huang, *Chin. Phys. Lett.*, **4**(1987), 153.
- [3] X. Y. Huang, *Sci. Sin.*, **A31**(1988), 1141.
- [4] 黄湘友、彭金生, 科学通报, **10**(1989), 796.
- [5] X. Y. Huang, J. S. Peng, *Phys. Script.*, **T21**(1988), 100.
- [6] X. Y. Huang, S. W. Qian, J. S. Wang, *J. Phys. A.*, **19**(1986), 849.
- [7] Q. H. Liu, *Science Bulletin*, **8**(1990), 703.
- [8] Q. H. Liu, *Physics Essay*, **3**(1990), 35.
- [9] S. W. Qian, X. Y. Huang, Q. H. Liu, Z. X. He, *Chin. Phys. Lett.*, **7**(1990), 152.
- [10] D. Judge, J. T. Lewis, *Phys. Lett.*, **5**(1963), 190.
- [11] D. Carruthers, M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.*, **40**(1968), 411.
- [12] J. M. Domingos, M. H. Calderia, *Found. Phys.*, **14**(1984), 147.
- [13] Y. B. Zhan, *Phys. Lett.*, **A8**(1988), 451.
- [14] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.*, **47**(1937), 777.

DOUBLE WAVE FUNCTION APPROACHES TO SYSTEMS OF PLANAR AND SPHERICAL ROTATOR

LIU QUAN-HUI

Department of Applied Physics, Hunan University, Changsha, 410082

WANG FA-BO

Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha, 410081

(Received 12 December 1990)

ABSTRACT

In this paper, we give the double wave function theory for systems of planar and spherical rotator, obtain rigorously the classical mechanical equations of motion for these two systems study the related problems in the ordinary quantum theory for these systems.

PACC: 0365; 0320