

二能级原子的混态 $SU(2)$ 压缩

刘世炳 黄长春 李 宏

江西师范大学物理系, 南昌, 330027

1990年10月24日收到

本文采用时间演化算符方法研究混态下二能级原子的 $SU(2)$ 压缩行为, 得出有光场相互作用下的混态原子的压缩比一般纯态原子算符的 $SU(2)$ 压缩还要深, 而且处于准基态下比在准激发态下的压缩要深得多的新结果. 通过数值计算, 讨论了原子能级布居的统计几率与压缩的关系.

PACC: 4250; 3150

一、引 言

近几年来, 人们对原子态的动力学行为进行了广泛的研究^[1-3]. Wodkiewicz^[4] 指出了原子也存在压缩效应. 最近文献 [5] 研究了在场-原子相互作用的双光子 Jaynes-Cummings 模型(以下简称 J-C 模型)中原子的压缩行为. 这些工作都是在假定原子处在纯态条件下进行的. 在大多数情况下, 一般我们很难精确地知道原子在 t_0 时刻的态, 而只能获取其某些统计性质, 所以研究混态原子的动力学行为将具有更普遍的意义. 因此, 本文采用时间演化算符方法, 研究 J-C 模型中原子的混态 $SU(2)$ 压缩特性. 得出了存在光场相互作用下的混态原子在准基态下的压缩不仅比准激发态下的压缩深得多, 而且比一般纯态原子算符的 $SU(2)$ 压缩还要深的新结果. 借助于数值计算, 讨论了原子能级布居的统计几率与压缩的关系.

二、 $SU(2)$ 相干态和原子的 $SU(2)$ 压缩

对于一组量子力学变量 X_i , 如果它满足以下李代数:

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k, \quad (1)$$

则该力学量就对应于一个相干态^[6], (1) 式中 C_{ij}^k 为结构常数, X_i, X_j, X_k 为该李代数的生成元素. 这种相干态相应的海森堡不确定性关系有下述形式:

$$\Delta X_i \cdot \Delta X_j \geq \frac{1}{2} |C_{ij}^k \langle X_k \rangle|, \quad (2)$$

除个别情况外^[7], (2) 式等号右边一般都依赖于所选的态. X_i, X_j, X_k 对应于三个量子力学的可观察量, 其不确定性受到其中两个量的量子涨落的限制. 假设这种最小不确定

性所对应的态为 $|\Psi\rangle$,则(2)式中等号成立所必须满足的方程为^[8]

$$(X_i - i\lambda X_j)|\Psi\rangle = \beta|\Psi\rangle, \quad (3)$$

其中 λ 为实参数, $\beta = \langle X_i \rangle - i\lambda \langle X_j \rangle$ 为复数, $|\Psi\rangle$ 即为该李代数所对应的相干态。

对于 $SU(2)$ 李代数,其生成元为泡利矩阵 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$,它们即为表示原子态的能级算符,且满足以下对易代数:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2ie_{ijk}\sigma_k \quad i, j, k = x, y, z. \quad (4)$$

根据(2),(3),(4)式, $SU(2)$ 李代数所对应的相干态可求得

$$|\Psi(\tau)\rangle = (1 + |\tau|^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp(\tau\sigma_+)|\alpha\rangle, \quad (5)$$

其中 $\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$, $\tau = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \exp(-i\Phi)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \Phi \leq 2\pi$, $|\alpha\rangle$ 为原子的基态。利用生成函数^[9]可求出原子能级算符的相干期待值为

$$\langle\sigma_x\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - |\tau|^2}{1 + |\tau|^2} = \frac{1}{2} \cos\theta, \quad (6)$$

以及原子算符的均方涨落为

$$\begin{aligned} (\Delta\sigma_x)^2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^2} \cdot (1 + |\tau|^4 - \tau^{*2} - \tau^2) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \sin^2\theta \cdot \cos^2\Phi), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (\Delta\sigma_y)^2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^2} \cdot (1 + |\tau|^4 + \tau^{*2} + \tau^2) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \sin^2\theta \cdot \sin^2\Phi). \end{aligned} \quad (8)$$

按照文献[2],当 σ_x 或 σ_y 的散差比其量子涨落的平均不准度更小,即满足下式:

$$(\Delta\sigma_x)^2 \leq |\langle\sigma_x\rangle| \quad \text{或} \quad (9a)$$

$$(\Delta\sigma_y)^2 \leq |\langle\sigma_x\rangle| \quad (9b)$$

时,则称原子算符 σ_x 或 σ_y 被压缩。根据(6)–(9)式可求出原子算符的压缩条件为

$$1 - \sin^2\theta \cdot \cos^2\Phi \leq |\cos\theta| \quad \text{或} \quad (10a)$$

$$1 - \sin^2\theta \cdot \sin^2\Phi \leq |\cos\theta|. \quad (10b)$$

为了求出压缩的最大值,令 $\Phi = \pi/2$, $\xi = \cos\theta$,则(10b)式可写成

$$\xi^2 - |\xi| \leq 0. \quad (11)$$

引入一压缩因子

$$F = (\Delta\sigma_i)^2 - |\langle\sigma_x\rangle| \quad i = x, y, \quad (12)$$

$F < 0$ 表明压缩。于是有

$$F = \xi^2 - |\xi|. \quad (13)$$

当 $\xi = 1/2$ 时, $F = -1/4$ 。这就是一个纯态原子($\text{Tr}\rho_A^2 = 1$)所能达到的 $SU(2)$ 压缩的最大值。

三、J-C 模型中原子的混态 $SU(2)$ 压缩

单模光场与二能级原子相互作用 J-C 模型的哈密顿量在旋波近似(RWA)下为

$$H = \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_z + \omega a^\dagger a + \lambda (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) \quad (\hbar = 1), \quad (14)$$

其中 $\sigma_z, \sigma_+, \sigma_-$ 为原子的能级算符, $a, a^\dagger$ 为场算符, ω_0, ω 为原子和光场的跃迁频率, λ 为场-原子的耦合常数.

为了研究 J-C 模型中混态原子的 $SU(2)$ 压缩行为, 引入赝自旋矢量 $\mathbf{S}^{(10)}$, 它是表示二能级系统的态的特征的量, $|\mathbf{S}| = 1$ 表示系统处于纯态, $|\mathbf{S}| < 1$ 表示系统处于混态. 现假设初始时场处于 Glauber 相干态 $|G\rangle$, 原子处于一种统计混合态 $\begin{pmatrix} \xi(S) \\ \eta(S) \end{pmatrix}$, 于是场-原子系统的初态为

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi_a(0)\rangle |\Psi_f(0)\rangle = \begin{pmatrix} \xi(S)|G\rangle \\ \eta(S)|G\rangle \end{pmatrix}, \quad (15)$$

其中

$$|G\rangle = \exp\left(-\frac{\bar{n}}{2}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{n})^{n/2}}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad (16)$$

$\bar{n}$ 为 Glauber 相干态 $|G\rangle$ 中的平均光子数, $|n\rangle$ 为光场的 Fock 态, $\xi(S), \eta(S)$ 定义为原子能级布居的统计几率, 且有 $\xi(S) + \eta(S) = 1$. 由(14)式可以很容易地求出在相互作用表象中的时间演化算符为

$$U^I(t, 0) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{u'} t, & -i\lambda a \frac{\sin \sqrt{u} t}{\sqrt{u}} \\ -i\lambda a^\dagger \frac{\sin \sqrt{u'} t}{\sqrt{u'}}, & \cos \sqrt{u} t \end{pmatrix}, \quad (17)$$

其中 $u' = \lambda^2 a a^\dagger, u = \lambda^2 a^\dagger a$. 然而在共振情况下任意时刻系统的态矢可求得为

$$|\Psi(t)\rangle = U^I(t, 0) |\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \xi(S) \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\lambda \sqrt{n+1} t) |n\rangle - i\eta(S) \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(\lambda \sqrt{n} t) |n-1\rangle \\ \eta(S) \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\lambda \sqrt{n} t) |n\rangle - i\xi(S) \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(\lambda \sqrt{n+1} t) |n+1\rangle \end{pmatrix}, \quad (18)$$

这里选取 $\xi(S) = \frac{1}{2}(1+S), \eta(S) = \frac{1}{2}(1-S)$. $S = 1$ 时原子处于激发态; $S = -1$ 时原子处于基态; $|S| < 1$ 时原子处于混态. 由(12)式就可求出原子算符的期待值为

$$\langle \sigma_z \rangle = \frac{1}{2} (1 - S^2) \sum_{n=0}^{\infty} [C_n^2 \cos(\lambda \sqrt{n} t) \cdot \cos(\lambda \sqrt{n+1} t) + C_n C_{n+2} \cdot \sin(\lambda \sqrt{n+1} t) \cdot \sin(\lambda \sqrt{n+2} t)], \quad (19)$$

$$\langle \sigma_y \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n C_{n+1} [(1-S)^2 \cdot \cos(\lambda \sqrt{n} t) \cdot \sin(\lambda \sqrt{n+1} t) - (1+S)^2 \cdot \sin(\lambda \sqrt{n+1} t) \cdot \cos(\lambda \sqrt{n+2} t)], \quad (20)$$

$$\langle \sigma_z \rangle = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 [(1+S)^2 \cdot \cos(2\lambda \sqrt{n+1} t) - (1-S)^2 \cdot \cos(2\lambda \sqrt{n} t)]. \quad (21)$$

若在上面三式中令 $S = -1$, 则与文献[11]的结果一致. 于是可求得

$$\begin{aligned} F_2(S, t) &= 1 - \langle \sigma_y \rangle^2 - |\langle \sigma_z \rangle| \\ &= 1 - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} C_n C_{n+1} [(1-S)^2 \cdot \cos(\lambda \sqrt{n} t) \cdot \sin(\lambda \sqrt{n+1} t) \\ &\quad - (1+S)^2 \cdot \sin(\lambda \sqrt{n+1} t) \cdot \cos(\lambda \sqrt{n+2} t)]^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 [(1+S)^2 \cdot \cos(2\lambda \sqrt{n+1} t) - (1-S)^2 \cdot \cos(2\lambda \sqrt{n} t)] \right|. \end{aligned} \quad (22)$$

由数值解的结果发现, 在任何参数范围内, F_1 均大于零, 表明该分量不出现压缩.

这里定义布居几率接近激发态的原子态为准激发态, 即 $0.8 < S < 1$ 的态; 布居几率接近基态的原子态为准基态, 即 $-1 < S < -0.8$ 的态. 选取 $\bar{n} = 1.2, \lambda = 0.2$, 从图 1 至图 3 可以看出原子处于准激发态时的压缩行为. 当 $S = 0.98$ 时, 原子存在压缩, 但压缩值较小. 第一个压缩点较低, 第二、第三个压缩点渐渐上移. 当 $S = 0.95$ 时, 压缩量进一步减小, 而且第三个压缩点开始消失. S 减小到 0.80 时, 从图 3 可知, 原子已远离压缩状态. 图 4 和图 5 为原子处于准基态时的压缩曲线, 从此数值计算我们发现, 当 $S = -0.95$ 时, 压缩大大加深, 最大压缩值竟达 -0.47 . 就是 S 增加到 -0.80 时, 压缩值也可达到

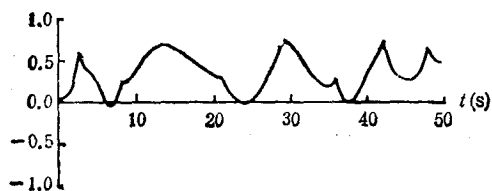


图 1 $\bar{n} = 1.2; S = 0.98$

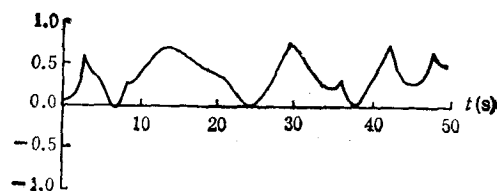


图 2 $\bar{n} = 1.2; S = 0.95$

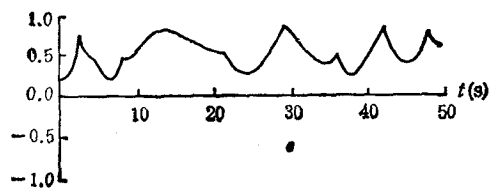


图 3 $\bar{n} = 1.2; S = 0.80$

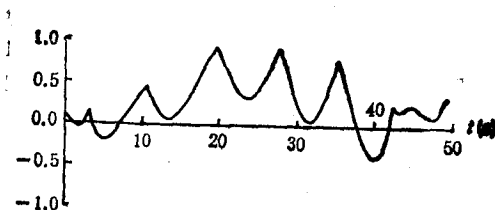
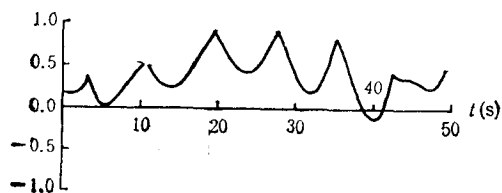
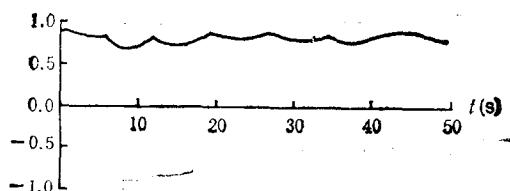
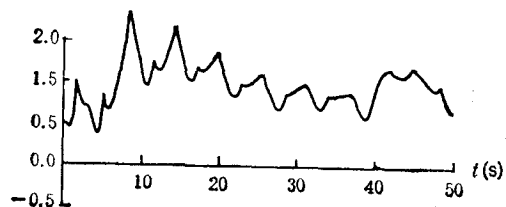
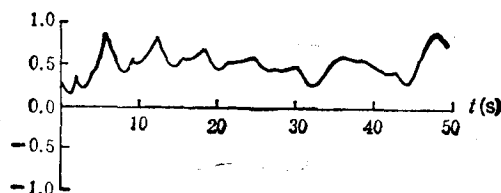
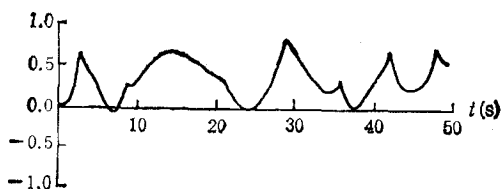


图 4 $\bar{n} = 1.2; S = -0.95$

图 5 $\bar{n} = 1.2; S = -0.80$ 图 6 $\bar{n} = 1.2; S = 0.00$ 图 7 $\bar{n} = 5; S = 0.95$ 图 8 $\bar{n} = 5; S = -0.95$ 图 9 $\bar{n} = 1; S = 0.95$

-0.20. 直到 $S = -0.60$ 左右, 压缩才开始消失. 当 $S = 0$ 时, 从图 6 可看出, 原子变量远离压缩状态, 涨落曲线趋于平滑, 只有小幅度的崩塌与复原. 当平均光子数增大到 5 时, 无论 $S = -0.95$ (图 8) 还是 $S = 0.95$ (图 7), 都不存在压缩. 开始时曲线出现较尖锐的振荡, 随时间增大这种振荡很快趋于平滑. 图 9 为 $\bar{n} = 1, S = 0.95$ 时的涨落曲线, 与图 2 比较可见, 平均光子数减少时, 压缩值稍有增加.

四、讨论与结论

通过以上计算可以看出, 在低激发 ($\bar{n} = 1.2$) 相干初态下, 量子化场-原子相互作用模型中的原子, 在准基态下的压缩要比在准激发态下的压缩深得多, 压缩是局部崩塌与复原的. 原子处于准基态时, 第二次压缩比第一次深很多, 而处于准激发态时, 压缩点随时间增大而上移. 上述现象的一种可能的原因是系统的相干初态与混态二能级间附加偶极矩的相干作用所致. 从第二节可知, 对于一个纯态原子算符, 其压缩的最大值只有 0.25, 而在场-原子相互作用模型中的原子, 其压缩的最大值远远超过此值. 这就表明, 光场对原子的作用能使原子算符的量子涨落进一步降低, 而混态二能级的附加偶极矩在光场的作用下, 使准基态下原子的量子涨落大大下降. 另外, 由于光场的粒子性, 使得耦合的场-原子系统导致了一组不连续的频率 $q_n = \sqrt{n} \lambda$, 这样, 频率的不连续性会使得原子一直保

持在混合态,二能级间的相位相干会局部地受到破坏。而且这种不连续性还可能产生许多其它的非经典现象。

根据上述计算和分析,我们证明了一般原子算符以及场-原子相互作用模型中的原子算符都存在压缩,得到场-原子相互作用模型中的原子在准基态下的压缩比一般纯态原子算符的 $SU(2)$ 压缩还要深以及混态原子在准激发态下的压缩很小,而在准基态下的压缩大大加深的新结果。通过数值计算表明,平均光子数对压缩的影响极大,当 $\bar{n}$ 增加到 5 时,原子已远离压缩状态。

- [1] J. H. Eberly, N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon, *Phys. Rev. Lett.*, **44**(1980), 1323; *Phys. Rev.*, **A23**(1981), 236.
- [2] D. F. Walls, P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 709.
- [3] Z. Ficek, R. Tanas, S. Kielich, *J. Opt. Soc. Am.*, **B1**(1984), 882.
- [4] K. Wodkiewicz, *Opt. Comm.*, **51**(1984), 198.
- [5] 周鹏、彭金生, *物理学报*, **38**(1989), 2044.
- [6] K. Wodkiewicz, J. H. Eberly, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**(1985), 458.
- [7] C. Aragone *et al.*, *J. Math. Phys.*, **17**(1976), 1963.
- [8] K. Gottfried, *Quantum Mechanics*, New York, Benjamin, (1966), Chap. 24.
- [9] F. T. Arecchi *et al.*, *Phys. Rev.*, **A6**(1972), 2211.
- [10] L. Allen, J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Wiley, New York, (1975).
- [11] P. K. Aravind, J. O. Hirschfelder, *Opt. Soc. Am.*, **B2**(1985), 739.

$SU(2)$ SQUEEZING IN TWO-LEVEL ATOMIC MIXED-STATE

LIU SHI-BING HUANG CHANG-CHUN LI HONG

Department of Physics, Jiangxi Normal University, Nanchang, 330027

(Received 24 October 1990)

ABSTRACT

In this paper, the behavior of $SU(2)$ squeezing of the mixed-state in two-level atom are studied by means of the time-evolution operator method. We have obtained new results that the mixed-state atomic squeezing under interacting of the light field is deeper than the general pure-state atomic $SU(2)$ squeezing. Furthermore, the squeezing value of the atom in pseudo-ground state is more greater than that in pseudo-excited state. The relation between the statistical probability of atomic level population and the squeezing is studied by numerical calculations.

PACC: 4250; 3150