

带轴向引导磁场自由电子激光器中的 电子轨迹与稳定性

束 小 建

北京应用物理与计算数学研究所, 北京, 100088

1990年11月14日收到

在对工程物理研究院电子学研究所和中国科学院上海光学精密机械研究所所做带引导磁场喇曼型自由电子激光实验进行数值模拟的基础上, 本文研究了轴向引导磁场和摇摆磁场联合作用的单电子轨迹, 对电子的平衡轨道和一阶微扰轨道进行了仔细分析, 揭示了在引导磁场存在的情况下, 摇摆磁场横向变化引起的电子感应回旋运动的重要性, 推导了带引导磁场情况下的电子感应回旋运动方程, 给出了电子感应回旋运动的周期, x 方向、 y 方向之间的关系。同时, 用数值模拟方法研究了电子的运动。两者结果符合很好。

PACC: 4255T

一、引 言

强流中低能电子束驱动的喇曼型自由电子激光器(FEL), 具有高功率、高增长率、高效率的特点, 而且较容易获得电子束源。在这方面, 国内外均有大量的实验^[1-4]。在这类装置中通常加上很强的轴向引导磁场, 以约束电子束, 另一方面, 电子在它和摇摆磁场联合作用下可获得稳定的、幅度较大的回旋运动。在适当的匹配条件下, 该运动和被约束在圆柱波导中的微波电磁场相互作用, 建立起高增益、高效率的 FEL 共振放大机制。

轴向引导磁场的存在, 使理论分析复杂起来。束流能够稳定地通过 FEL 装置, 是建立 FEL 的最基本条件。电子轨迹和稳定性的分析是基本的、必须的。一般用通常的平衡轨迹和微扰法分析这一问题^[5-7], 给出电子的平衡轨迹和一阶微扰解。基本结论是: 除了 $b_0 = \gamma K_w \left(b_0 = \frac{e}{mc^2} B_0 \right)$ 点附近的一个区域外, 在它的两侧均是稳定的。

对一阶微扰解进行分析表明, 它基本上是轴向引导磁场产生的 Larmor 运动, 并不包含摇摆磁场的横向变化引起的感应回旋运动^[8]。在用我们编制的 CAG 程序^[9]对上海光学精密机械研究所的喇曼型 FEL 进行数值模拟^[10]中, 我们发现, 在电子横向速度较大、离轴较远的情况下, 感应回旋运动变得重要起来。严重时, 可使电子无法与微波建立有效的 FEL 共振机制, 使 FEL 完全失败。

本文将无引导磁场情况下推导感应回旋运动的方法推广到有轴向引导磁场情况, 得到了有轴向引导磁场情况下的感应回旋运动方程, 对上述喇曼型 FEL 的电子轨道和稳定

性进行了具体分析,并且和 CAG 程序数值模拟结果以及电子 Lorntz 力方程的数值解进行了比较,解析分析结果和数值结果符合得很好。

二、电子运动方程

实验中常用的是双绕螺旋管摇摆磁场加轴向引导磁场,其磁场强度在圆柱坐标系中可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{X}) &= B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{B}_w(\mathbf{X}), \\ \mathbf{B}_w(\mathbf{X}) &= 2B_w(z) \left[I'_1(\lambda) \mathbf{e}_r \cos \chi - \frac{1}{\lambda} I_1(\lambda) \mathbf{e}_\theta \sin \chi + I_1(\lambda) \mathbf{e}_z \sin \chi \right], \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\lambda = K_w r, \quad \chi = \theta - K_w z, \quad K_w = 2\pi/\lambda_w,$$

λ_w 是摇摆磁场空间周期长度, $I_n(\lambda)$ 和 $I'_n(\lambda)$ 分别是第一类修正贝塞耳函数及其导数,为使电子绝热进入摇摆磁场,摇摆器前段做成绝热慢变的过渡区,即

$$\frac{d}{dz} \ln B_w \ll K_w,$$

取

$$B_w(z) = \begin{cases} B_w \sin^2 \left(\frac{K_w z}{40} \right) & 0 \leq z \leq N_w \lambda_w, \\ B_w & z > N_w \lambda_w. \end{cases} \quad (2)$$

由于微波场强远小于摇摆磁场场强和引导磁场场强,电子运动主要由摇摆磁场和引导磁场决定,由 Lorntz 力方程

$$\frac{d}{dt} m \gamma \mathbf{v} = - \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3)$$

可得在螺旋坐标系

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_r \cos \chi - \mathbf{e}_\theta \sin \chi, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_r \sin \chi + \mathbf{e}_\theta \cos \chi, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

下的电子运动方程

$$\begin{aligned} \gamma \dot{\beta}_1 &= -[b_0 - \gamma K_w \beta_3 + 2b_w I_1(\lambda) \sin \chi] \beta_2 + b_w \beta_3 I_2(\lambda) \sin 2\chi, \\ \gamma \dot{\beta}_2 &= [b_0 - \gamma K_w \beta_3 + 2b_w I_1(\lambda) \sin \chi] \beta_1 - b_w \beta_3 [I_0(\lambda) + I_2(\lambda) \cos 2\chi], \\ \gamma \dot{\beta}_3 &= b_w \beta_2 [I_0(\lambda) + I_2(\lambda) \cos 2\chi] - b_w \beta_1 I_2(\lambda) \sin 2\chi, \\ \dot{\lambda} &= K_w (\beta_1 \cos \chi + \beta_2 \sin \chi), \\ \dot{\chi} &= K_w \lambda^{-1} (-\beta_1 \sin \chi + \beta_2 \cos \chi - \lambda \beta_3), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\dot{\cdot}$ 代表 $d/d\tau$, $\tau = ct$, c 是光速, $b_{0,w} = \frac{e B_{0,w}}{mc^2}$, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta_{1,2,3} = v_{1,2,3}/c$.

三、平衡轨道与一阶微扰轨道

令(4)式为零可得平衡轨道,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_w, \beta_2 = 0, \beta_3 = \beta_w, \chi_0 = \pm\pi/2, \\ \lambda_0 &= \mp \frac{\beta_w}{\beta_w}, \beta_w = 2b_w\beta_w I_1 \lambda_0^{-1} / (b_0 - \gamma K_w \beta_w \pm 2b_w I_1). \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式和能量守恒方程

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{const} \quad (6)$$

一起决定了 β_w , β_w 和 λ_0 的值.

我们编制了一个程序解(5), (6)式组成的代数方程, 取文献[4]和[10]的数据 $\gamma = 1.783 (E_e = 0.4 \text{ MeV})$, $B_w = 1.2 \text{ kG}$, $\lambda_w = 2.2 \text{ cm}$ 进行了数值计算. 结果见图 1. 从图 1 可见, 在 $b_0 = \gamma K_w$ 附近一个小区域是不稳定的. 在其两边各有一支稳定轨道, $b_0 < \gamma K_w$ 的一支对应以上各式的取“+”支, $b_0 > \gamma K_w$ 的一支取“-”支.

我们考虑靠近平衡轨道的一阶微扰解 $\beta_1 = \beta_1 + \delta\beta_1$, $\beta_2 = \delta\beta_2$, $\beta_3 = \beta_w + \delta\beta_3$, $\chi = \chi_0 + \delta\chi$, $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$, 从方程可得一阶微扰方程组为

$$\begin{aligned} \gamma \delta\beta_1 &= -[b_0 - \gamma K_w \beta_w \pm 2b_w I_1(\lambda) \sin \chi] \delta\beta_2 - 2b_w \beta_w I_2(\lambda_0) \delta\chi, \\ \gamma \delta\beta_2 &= [b_0 - \gamma K_w \beta_w \pm 2b_w I_1(\lambda) \sin \chi] \delta\beta_1 - [\gamma K_w \beta_w + 2b_w I_1 \lambda_0^{-1}] \delta\beta_3 \\ &\quad - 2b_w \beta_w \lambda_0^{-1} \delta\lambda [I_0 + \lambda_0^2 I_0(\lambda) - \lambda_0 I_1], \\ \gamma \delta\beta_3 &= 2b_w \beta_w I_2(\lambda_0) \delta\chi + 2\lambda_0^{-1} b_w I_1 \delta\beta_2, \\ \delta\lambda &= \pm K_w (\delta\beta_2 - \beta_w \delta\chi), \\ \delta\chi &= -K_w (\delta\beta_3 \pm \lambda_0^{-1} \delta\beta_1 \mp \lambda_0^{-2} \beta_w \delta\lambda). \end{aligned} \quad (7)$$

从方程组(7)可看出, 只保留 $\delta\beta_2$, $\delta\chi$, 消去其它变量是方便的. 得

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_1^2 \right) \delta\chi = A \delta\beta_2,$$

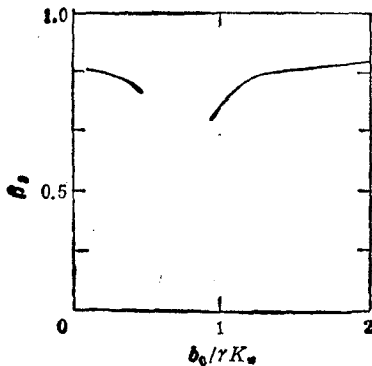


图 1 电子平衡轨道纵向速度 β_z 随引导磁场场强的变化

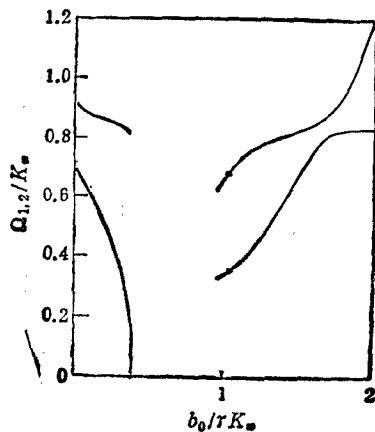


图 2 $Q_{1,2}$ 随 b_0 的变化 ○是 $b_0 = 9 \text{ kG}$ 点

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_i^2\right) \delta\beta_i = B\delta\chi, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= K_w^2 \beta_{\parallel}^2 \mp 2\gamma^{-1} b_w K_w \beta_{\parallel} \lambda_0^{-1} (1 + \lambda_0^2) I_2(\lambda_0), \\ \omega_2^2 &= \gamma^{-2} [b_0 - \gamma K_w \beta_{\parallel}] [b_0 - \gamma K_w \beta_{\parallel} \pm 2b_w I_1(\lambda_0)] \\ &\quad \pm 2\gamma^{-1} b_w K_w \beta_{\parallel} \lambda_0^{-1} (1 + \lambda_0^2) I_2(\lambda_0), \\ A &= \pm K_w \lambda_0^{-1} \gamma^{-1} (b_0 - 2\gamma K_w \beta_{\parallel}), \\ B &= -2\gamma^{-2} b_w \beta_{\parallel} (1 + \lambda_0^2) [b_0 \pm 2b_w I_1(\lambda_0)] I_2(\lambda_0) \\ &\quad + \lambda_0^2 \gamma K_w \beta_{\parallel} [I_0(\lambda_0) - \lambda_0^{-1} I_1(\lambda_0)]. \end{aligned} \quad (9)$$

从(8)式可得一对四阶微分方程,即

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + Q_1^2\right) \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + Q_2^2\right) \begin{pmatrix} \delta\beta_2 \\ \delta\chi \end{pmatrix} = 0, \quad (10)$$

其中 $Q_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \frac{1}{2} [(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4AB]^{\frac{1}{2}}$. 方程(10)的解为

$$\begin{aligned} \delta\beta_2 &= -\alpha_1 \sin(Q_1\tau - \varphi_1) - \alpha_2 \sin(Q_2\tau - \varphi_2), \\ \delta\chi &= -\rho_1 \sin(Q_1\tau - \theta_1) - \rho_2 \sin(Q_2\tau - \theta_2), \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\alpha_{1,2}, \rho_{1,2}, \varphi_{1,2}, \theta_{1,2}$ 是积分系数,由初值决定,将(11)式代入(7)式,可得 $\delta\beta_1, \delta\beta_3, \delta\lambda$ 的解. 当一阶微扰解围绕平衡解振荡时,电子轨道是稳定的,因此,当 Q_1^2, Q_2^2 为负值时,电子轨道是不稳定的. 我们将计算平衡轨道的程序扩展,取文献[10]的数据,计算了 Q_1^2 和 Q_2^2 ,结果见图 2. 同样在 $b_0 \approx \gamma K_w$ 附近, $Q_2 < 0$,有一不稳定区域.

将(11)式代入(8)式可得

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \theta_1, \quad \varphi_2 = \theta_2, \\ \alpha_{1,2} &= -\frac{Q_{1,2}^2 - \omega_1^2}{A} \rho_{1,2} = -\frac{B}{Q_{1,2}^2 - \omega_1^2} \rho_{1,2}. \end{aligned} \quad (12)$$

为了便于分析一阶微扰轨道,将它退化到理想圆极化摇摆磁场情况,即取 $\lambda_0 \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} Q_1 &= K_w \beta_{\parallel}, \\ \lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} Q_2 &= -\frac{Q_0}{\gamma} + K_w \beta_{\parallel}. \end{aligned}$$

可见一阶微扰解是由引导磁场产生的 Larmor 运动,其空间波长是 $\frac{Q_0}{\gamma\beta_{\parallel}}$,在(11)式中摇摆磁场的横向变化仅仅表现在取定点 λ_0 点的值,摇摆磁场的横向变化引起的感应回旋振荡并没有得到反映,在电子的横向速度较大,离轴较远时,感应回旋振荡将变得重要起来,需要加以认真分析.

四、感应回旋运动

将电子运动分为快变的摇摆螺旋运动和慢变的感应回旋运动:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{r}_1$ 是摇摆螺旋运动, $\mathbf{r}_0$ 是感应回旋运动。我们在直角坐标系中推导感应回旋运动方程

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_w \cos K_w z, \\ y_1 &= \beta_w \sin K_w z, \\ z_1 &= \beta_{||}. \end{aligned} \quad (14)$$

假定电子束半径足够小, 可作展开

$$I_0(K_w r) = 1 + \frac{K_w^2}{4} r^2 = 1 + \frac{K_w^2}{4} [(x_0 + x_1)^2 + (y_0 + y_1)^2],$$

$$I_1(K_w r) = \frac{K_w}{2} r = \frac{K_w}{2} \sqrt{(x_0 + x_1)^2 + (y_0 + y_1)^2},$$

$$I_2(K_w r) = \frac{K_w^2}{8} r^2 = \frac{K_w^2}{8} [(x_0 + x_1)^2 + (y_0 + y_1)^2].$$

对直角坐标系中的电子运动方程

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{x} \frac{b_y}{\gamma} - \dot{y} \frac{b_x}{\gamma}, \\ \ddot{y} &= \dot{x} \frac{b_x}{\gamma} - \dot{z} \frac{b_z}{\gamma}, \\ \ddot{z} &= \dot{y} \frac{b_z}{\gamma} - \dot{x} \frac{b_y}{\gamma}. \end{aligned}$$

作平均 $\frac{1}{\lambda_w} \int_{-\frac{\lambda_w}{2}}^{\frac{\lambda_w}{2}} dz$, 消去快变的摇摆螺旋运动, 可得慢变的感应回旋运动方程为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 &= -\frac{b_0 - \frac{\beta_w}{\beta_{||}} b_w}{\gamma} \dot{y}_0 + \frac{K_w b_w \beta_w}{2\gamma} x_0, \\ \ddot{y}_0 &= \frac{b_0 - \frac{\beta_w}{\beta_{||}} b_w}{\gamma} \dot{x}_0 + \frac{K_w b_w \beta_w}{2\gamma} y_0. \end{aligned} \quad (15)$$

上式可化为一对四阶微分方程

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^4}{d\tau^4} + K_{s1}^2 \right) \left(\frac{d^4}{d\tau^4} + K_{s2}^2 \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= 0, \\ K_{s1,2}^2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\left(b_0 - \frac{\beta_w}{\beta_{||}} b_w \right)^2}{\gamma^2} - \frac{K_w b_w \beta_w}{\gamma} \right] \\ &\pm \frac{1}{2} \frac{b_0 - \frac{\beta_w}{\beta_{||}} b_w}{\gamma} \sqrt{\frac{\left(b_0 - \frac{\beta_w}{\beta_{||}} b_w \right)^2}{\gamma^2} - \frac{2K_w b_w \beta_w}{\gamma}}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$K_{\beta_{1,2}} = \frac{1}{2} \frac{b_0 - \frac{\beta_w}{\beta_{\parallel}} b_w}{\gamma} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(b_0 - \frac{\beta_w}{\beta_{\parallel}} b_w \right)^2 \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2K_w b_w \beta_w}{\gamma}}. \quad (17)$$

令 $b_0 = 0$, 上式可退化为无引导磁场情况

$$K_{\beta_1}^2 = K_{\beta_2}^2 = -\frac{K_w b_w \beta_w}{2\gamma} = \frac{b_w^2}{2\gamma^2}.$$

$$(16) \text{ 式的解为 } \begin{aligned} x_0 &= -a_{x1} \sin(K_{\beta_1} \tau + \theta_{x1}) - a_{x2} \sin(K_{\beta_2} \tau + \theta_{x2}), \\ y_0 &= -a_{y1} \sin(K_{\beta_1} \tau + \theta_{y1}) - a_{y2} \sin(K_{\beta_2} \tau + \theta_{y2}). \end{aligned} \quad (18)$$

代回(15)式可得 $\theta_{y1,2} = \theta_{x1,2} - \pi/2$, 即 x 方向相位超前 $\pi/2$,

$$a_{y1,2} = a_{x1,2}.$$

五、数值计算

有引导磁场的情况下感应回旋运动的重要性是在用 CAG 程序模拟上海光学精密机械研究所实验时发现的, 模拟中发现, 当电子能量为 0.4 MeV 时, $B_w = 1.2 \text{ kG}$. 取 $B_0 = 9, 10, 11 \text{ kG}$, 均不能建立有效的 FEL 作用机制. 电子运动摆动幅度很大. 无法与光场共振匹配. 图 3 给出 $B_0 = 9 \text{ kG}$ 时第 17 号电子的速度 β_1, β_3 随 z 的变化情况.

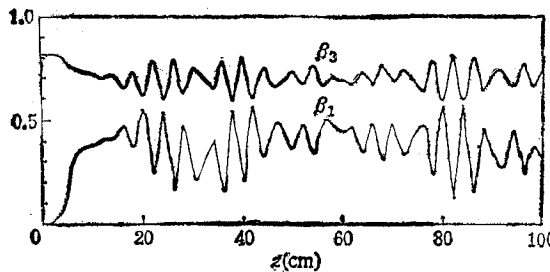


图 3 CAG 解出的电子速度随 z 的变化 $r_0 = 0.1024 \text{ cm}$

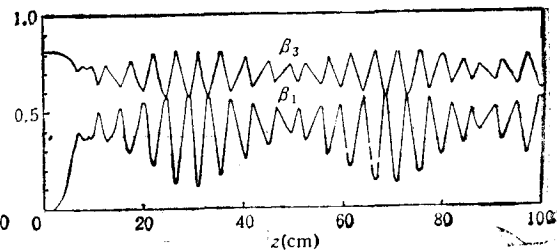


图 4 电子速度随 z 的变化 $r_0 = 0.1024 \text{ cm}$

为了仔细分析电子的运动, 我们编制了一个程序解方程组(4). 所得结果见图 4. 可见图 3 与图 4 基本符合. 图 4 表明, 摇摆螺旋运动的振幅为 $\beta_w = 0.4$, $\beta_{\parallel} = 0.7$, 解析分析得到的平衡轨道为 $\beta_w = 0.472$, $\beta_{\parallel} = 0.709$, 两者完全符合. 此外, 电子还有两种运动附加在摇摆螺旋运动上. 一种是快变的一阶微扰解, 基本是引导磁场引起的 Larmor 运动, 其周期长度从图上可读出是 4.42 cm, 解析分析得到的周期长度是 4.47 cm, 两者符合很好. 另一种是慢变的摇摆磁场横向变化引起的感应回旋运动, 注意到它是快变的 Larmor 运动的包络, 其周期长度是 40 cm. 解析分析得到的感应回旋运动的周期长度是 48.7 cm. 两者符合很好. 比较图 5(a) 和 (b) 可见, X 比 Y 超前约 10 cm, 即超前 $\pi/2$, 与解析分析符合.

显然, 摇摆磁场横向梯度变化引起的感应回旋运动在电子横向速度大、离轴远时变得剧烈起来, 重要起来, 数值解证实了这一点. 图 6 给出离轴近的一个电子的轨道, 可见没

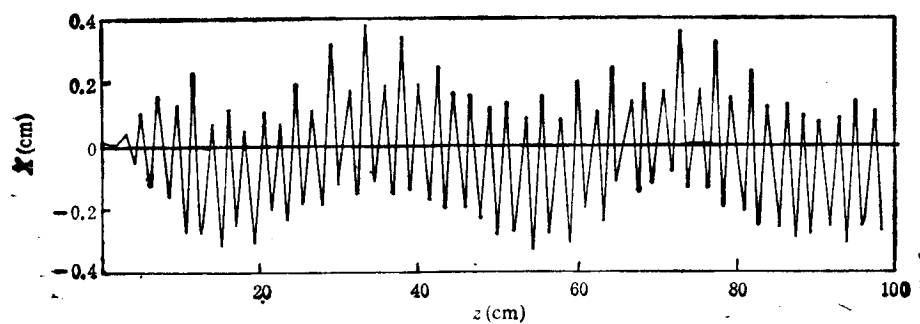
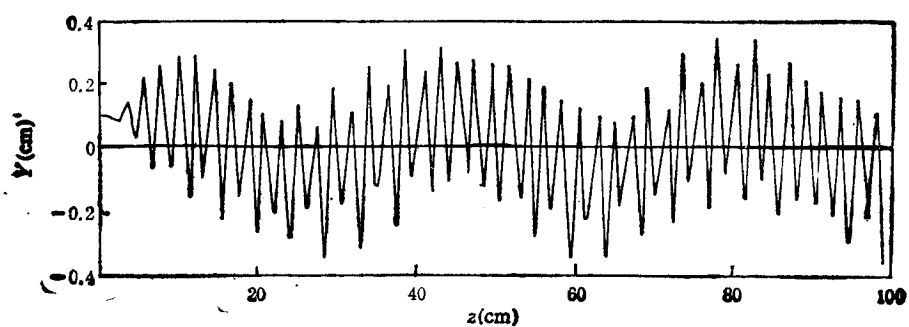
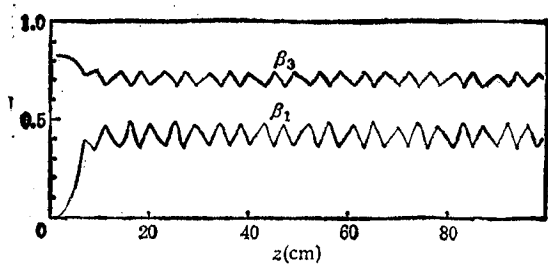
(a) 电子位置 X 随 Z 的变化(b) 电子位置 Y 随 Z 的变化

图 5

图 6 电子速度随 z 的变化 $r_0 = 0.0313\text{cm}$

有振幅很大的感应回旋运动。

六、结 论

电子在摇摆磁场和轴向引导磁场作用下的轨道较为复杂。摇摆磁场的主要作用是把电子的纵向动量的一部分变为横向动量,而引导磁场又有向轴的聚束作用。两者的平衡即是电子的平衡轨道。若电子在较小的范围内偏离平衡轨道,在引导磁场的作用下,电子将围绕这一平衡轨道作 Larmor 运动。以上物理图象可用一般的一阶微扰论处理得到。

而电子偏离轴心较远, 扰动较大时, 一阶微扰不能解决这一问题。这时, 摇摆磁场的横向变化变得重要起来。它引起的感应回旋运动, 虽然没有摇摆螺旋运动和 Larmor 运动强, 但它振荡周期长, 具有“累积”效应, 决定了电子的轨迹。而快变的摇摆螺旋运动和 Larmor 运动只引起电子的快速振荡, 对电子的轨迹没有什么影响。因此, 可以把这部分快变的运动平均掉, 就可得到慢变的感应回旋运动。用上述方法, 我们推导了带引导磁场情况下的摇摆磁场横向变化引起的感应回旋运动方程, 得到了感应回旋运动的周期及 X 方向和 Y 方向的振幅和相位之间的关系。此外, 我们编制了解电子 Lorentz 力方程的程序, 数值计算了文献[4]和[10]中的电子轨道, 同时用以上的解析方法加以分析, 两者符合很好。说明以上解析方法是正确的, 完善了对带引导磁场 FEL 中的电子运动的理解和分析。

- [1] S. H. Gold *et al.*, *Phys. Fluids*, **27**(1984), 746.
- [2] S. H. Gold *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 1218.
- [3] 胡克松等, 强激光与粒子束, **1**(1989), 33.
- [4] 陆载通、张立芬、陈基忠、王之江, 光学学报, **9**(1989), 780.
- [5] P. D. Diamant, *Phys. Rev.*, **A23**(1987), 2537.
- [6] L. Friedland, *Phys. Fluids*, **23**(1980), 2376.
- [7] H. P. Freund *et al.*, *Phys. Rev.*, **A28**(1983), 3438.
- [8] E. T. Scharlemann, *J. Appl. Phys.*, **58**(1985), 2154.
- [9] 王泰春、田世洪、束小建, 强激光与粒子束, **2**(1990), 101.
- [10] 束小建等, 光学学报, **11**(1991), 425.

ELECTRON TRAJECTORIES AND STABILITY IN FEL WITH AN AXIAL GUIDE MAGNETIC FIELD

SHU XIAO-JIAN

Institute of Applied Physics and Computational Mathematical, Beijing, 100088

(Received 14 November 1990)

ABSTRACT

The single-particle trajectories of relativistic electrons are studied in a magnetic field configuration consisting of a uniform axial guide field and a helical periodic wiggler field. The steady-state trajectories and the first order perturbed trajectories are analysed carefully. Based on the numerical simulations about the experiments which have been made at Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, the effect of the betatron oscillations due to the transverse varying of wiggler field is first shown in the case that there is a axial guide field. In this case the betatron oscillations equations are derived. Its period and the relation between phase in X direction and in Y direction are obtained. Further more, numerical simulations are made. The results of analytical calculation are in good agreement with the numerical simulations.

PACC: 4255T