

光在等离子体中的共振吸收解析研究

盛政明 马锦秀 徐至展

中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海, 201800

1990年11月24日收到

本文通过求光从等离子体与真空界面的反射率, 解析地求出了长标尺长度和短标尺长度的线性密度轮廓冷等离子体对光的定态共振吸收率. 在长标尺长度下, 本文的结果与以前的结果一致, 但可以精确到更高阶数; 在短标尺长度下, 本文的解析结果与数值计算符合.

PACC: 5225P; 5240D

一、引言

近年来, 随着超短脉冲强激光技术的发展, 人们对超短脉冲强激光与等离子体相互作用的研究产生了很大兴趣^[1-4], ps, 亚 ps 脉冲激光与等离子体相互作用成为激光等离子体物理研究领域的新前沿. 其中等离子体对超短脉冲激光的吸收是个重要研究课题, 对共振吸收的研究也因此引起了新的注意^[5].

共振吸收是非均匀等离子体对 P 偏振光吸收的一种重要机制^[6,7]. 由于共振吸收本身是个复杂过程, 加上数学处理上的困难, 人们对它的认识仍然是不完全的, 长标尺长度下对各个入射角都有效的共振吸收率的严格表达至今仍未得到. 本文在长标尺长度下通过求光从等离子体界面的反射率, 间接地求出了共振吸收率, 结果拓宽了文献[8]给出的描述共振吸收率表达式的人射角范围.

近年来超短脉冲强激光辐照固体靶的实验表明, 在超短脉冲强激光作用时间内, 固体靶产生很短标尺长度的等离子体^[1-4], 先前得到的共振吸收率表达都不能描述短标尺长度的等离子体对入射光的共振吸收^[8-10]. 本文也通过求反射率, 间接地求出了短标尺长度下的共振吸收率, 并与数值计算比较.

二、长标尺长度下的共振吸收

描述 P 偏振光在非均匀冷等离子体中的传播和吸收, 通常用磁场方程^[10]

$$\frac{d^2 B}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \frac{dB}{dz} + k^2(\epsilon - \sin^2\theta)B = 0. \quad (1)$$

假定等离子体在 z 方向一维非均匀, 式中 k 是光在真空中的波矢, θ 是入射角, $\epsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu)}$ 是非磁化等离子体介电常数, ω 是光频率, $\omega_{pe} = \left(\frac{4\pi N_e e^2}{m_e} \right)$ 是等离子体频

率, ν 是吸收系数。考虑共振吸收时, 令 $\nu \rightarrow 0^+$, 但 $\nu \neq 0$ 。当 $\omega^2 = \omega_{pe}^2$ 时, ϵ 是(1)式的奇异点, 这个奇异点最早由 Denisov^[11] 作了适当的处理。为简单计, 考虑线性密度轮廓等离子体(数值计算表明, 共振吸收在较大程度上并不依赖于密度分布轮廓^[9]), 如图 1, 令 $\omega_{pe}^2/\omega^2 = z/L$, L 即是标尺长度, 那么在等离子体中, 磁场方程可以写成

$$\frac{d^2 B}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dB}{d\xi} - (\xi + q)B = 0, \quad (2)$$

式中

$$\xi = (kL)^{2/3}(z - L(1 + i\nu/\omega))/L, \\ q = (kL)^{2/3}\sin^2\theta.$$

(2)式没有解析解^[8], 只能用渐近方法或级数展开方法求近似解。下面分区求解(1)和(2)式, 求出等离子体对入射光的反射系数, 求出共振吸收率。

1. 大入射角下的共振吸收

所谓大入射角是指满足下面条件的入射角:

$$\sin^2\theta \gg \max[(kL \sin\theta)^{-1}, \sin\theta \cdot e^{-\frac{4}{3}kL \sin^3\theta}]. \quad (3)$$

在长标尺长度下有 $kL \gg 1$, 相当范围的入射角可以满足(3)式, 此条件是下面对各个区间解连接或渐近匹配所必需满足的。由于 $kL \gg 1$, 因此在远离反射点 $z = L_r = L\cos^2\theta$ 和临界点 $z = L$, $|\xi|$ 和 $|\xi + q|$ 都很大, 对(1)式用 WKB 方法求解或者把 $(\xi + q)$ 作为(2)式的无穷奇点^[12], 渐近求解(2)式, 均可得到以下的区间解(物理光学近似):

$$B = \begin{cases} e^{ikz \cos\theta} + \beta_0 e^{-ikz \cos\theta} & (z \leq 0), \\ \xi^{1/2} [-(\xi + q)]^{-1/4} [\alpha_1 e^{\frac{2}{3}i[-(\xi+q)]^{3/2}} + \beta_1 e^{-\frac{2}{3}i[-(\xi+q)]^{3/2}}] & (0 \leq z < L\cos^2\theta), \\ \xi^{1/2} (\xi + q)^{-1/4} [\alpha_2 e^{-\frac{2}{3}(\xi+q)^{3/2}} + \beta_2 e^{\frac{2}{3}(\xi+q)^{3/2}}] & (L\cos^2\theta < z < L), \\ \xi^{1/2} (\xi + q)^{-1/4} [\alpha_3 e^{-\frac{2}{3}(\xi+q)^{3/2}} + \beta_3 e^{\frac{2}{3}(\xi+q)^{3/2}}] & (z > L), \end{cases} \quad \begin{matrix} (4a) \\ (4b) \\ (4c) \\ (4d) \end{matrix}$$

式中 α_i, β_i 均是待定常数, 通过 B , $\frac{1}{\epsilon} \frac{dB}{dz}$ 连续条件连接(4a)和(4b)式或通过渐近匹配方法^[12]连接(4b), (4c), (4d)式, 以确定 α_i, β_i 的相互关系, 求出 β_0 , 那么便可求出反射率和共振吸收率。根据 WKB 解成立条件^[12], 得(4b)–(4d)式的成立条件是

$$\frac{2}{3} |\xi + q|^{3/2} \gg \ln |\xi^{1/2} (\xi + q)^{-1/4}|. \quad (5)$$

显然, 在反射点和临界点附近, (5)式不成立, 那么(4b)和(4c)式, (4c)和(4d)式不能相互连接, 各个待定常数间关系便不能确定。解决连接问题办法是在反射点和临界点附近各找一个解, 它能匹配左右两边的解。在反射点附近, 即 $|\xi + q| \ll q$, 以 $1/q$ 作为小量, 根据(2)式得

$$B = \alpha_4 A_i(\xi + q) + \beta_4 B_i(\xi + q) + o(q^{-1}B), \quad (6)$$

式中 A_i, B_i 是 Airy 函数, α_4, β_4 是待定常数。在区域 $1 < q^{1/n} \ll |\xi + q| \ll q (n > 1)$,

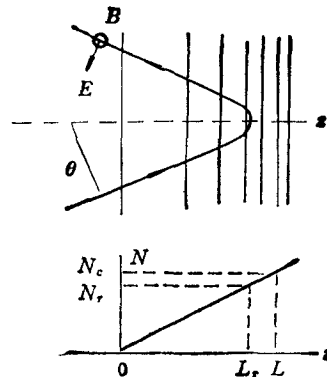


图1 P 偏振光入射到一维非均匀等离子体中的几何图 N 是等离子体密度; N_c 是临界点处等离子体密度; N_r 是反射点处密度

(6)式可以分别与(4b),(4c)式渐近匹配, α_1, β_1 与 α_2, β_2 的关系通过 α_4, β_4 而确定下来:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{i}{2}(\alpha_1 e^{-\pi/4i} - \beta_1 e^{\pi/4i}), \\ \beta_2 &= \alpha_1 e^{-\pi/4i} + \beta_1 e^{\pi/4i}.\end{aligned}\quad (7)$$

在临界点附近 $|\xi| \ll q$, (2)式有近似解^[11]:

$$B = \begin{cases} \alpha_5 \sqrt{\xi} \sqrt{\frac{\eta}{d\eta/d\xi}} K_1(\eta) + \beta_5 \sqrt{\xi} \sqrt{\frac{\eta}{d\eta/d\xi}} I_1(\eta) & (z < L), \\ \alpha_6 \sqrt{\xi} \sqrt{\frac{\eta}{d\eta/d\xi}} K_1(\eta) + \beta_6 \sqrt{\xi} \sqrt{\frac{\eta}{d\eta/d\xi}} I_1(\eta) & (z > L), \end{cases} \quad (8a)$$

$$B = \begin{cases} \alpha_5 \sqrt{\xi} \sqrt{\frac{\eta}{d\eta/d\xi}} K_1(\eta) + \beta_5 \sqrt{\xi} \sqrt{\frac{\eta}{d\eta/d\xi}} I_1(\eta) & (z < L), \\ \alpha_6 \sqrt{\xi} \sqrt{\frac{\eta}{d\eta/d\xi}} K_1(\eta) + \beta_6 \sqrt{\xi} \sqrt{\frac{\eta}{d\eta/d\xi}} I_1(\eta) & (z > L), \end{cases} \quad (8b)$$

式中 $\eta = \frac{2}{3}[(\xi + q)^{3/2} - q^{3/2}]$, K_1 和 I_1 是一阶变形贝塞耳函数, α_5, β_5 和 α_6, β_6 是待定常数. (8a)和(4c)式, (8b)和(4d)式在区域 $1 < q^{1/2} \ll |\xi| \ll q$ ($n > 1$)相匹配, 同时(8a),(8b)式可以在 $z = L$ 左右直接连接, 使得

$$\begin{aligned}\alpha_6 &= \alpha_5, \quad \beta_6 = \beta_5 - \pi i \alpha_5, \\ \alpha_3 &= -\beta_2 i e^{+\frac{2}{3}q^{3/2}}, \quad \beta_3 = 2\beta_2 e^{\frac{2}{3}q^{3/2}} - i \alpha_2 e^{-\frac{4}{3}q^{3/2}}.\end{aligned}\quad (9)$$

(4a)和(4b)式可以直接在 $z = 0$ 点连接而得

$$\beta_0 = \alpha_1 / \beta_1 e^{\frac{4}{3}ikL \cos^2 \theta}. \quad (10)$$

为使 B 在 $z \gg L$ 时不发散, 令 $\beta_3 = 0$, 由(7),(9),(10)式得

$$\beta_0 = -e^{\frac{4}{3}ikL \cos^2 \theta + \frac{\pi}{2}i} \left(1 - \frac{1}{4}e^{-\frac{4}{3}q^{3/2}}\right) / \left(1 + \frac{1}{4}e^{-\frac{4}{3}q^{3/2}}\right). \quad (11)$$

共振吸收率 A 为

$$A = 1 - \beta_0 \beta_0^* = \frac{e^{-\frac{4}{3}q^{3/2}}}{\left(1 + \frac{1}{4}e^{-\frac{4}{3}q^{3/2}}\right)^2}. \quad (12)$$

这个结果在 q 很大时, 比 Speziale 给出的结果将近小了一倍. 数值计算结果介于以上两者之间(见图 2(a)).

2. 小人射角下的共振吸收

当入射角很小而不满足(3)式时, 用 WKB 方法求出的分区解不能相互连接, 此时由于 $q < 1$, 因此对(2)式作小 q 展开(到第一阶):

$$\frac{d^2 B_0}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dB_0}{d\xi} - \xi B_0 = 0, \quad (13a)$$

$$\frac{d^2 B_1}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dB_1}{d\xi} - \xi B_1 = q B_0. \quad (13b)$$

B_0 的通解和 B_1 的特解为

$$\begin{aligned}B_0 &= C_1 A_i(\xi) + C_2 B_i'(\xi), \\ B_1 &= -A_i'(\xi) \int^\xi \frac{B_0 B_i'(t)}{A_i B_i'' - B_i' A_i'} dt + B_i'(\xi) \int^\xi \frac{B_0 A_i'(t)}{A_i B_i'' - B_i' A_i'} dt,\end{aligned}\quad (14)$$

式中 $A'_i(\xi)$, $B'_i(\xi)$ 分别是 Airy 函数的导数。因此得到三个区间解:

$$B = \begin{cases} e^{ikz \cos \theta} + \beta_0 e^{-ikz \cos \theta} & (z \leq 0), \end{cases} \quad (15a)$$

$$B = \begin{cases} \alpha_1 A'_1(\xi) + \beta_1 B'_1(\xi) + B_1(\xi, \alpha_1, \beta_1) & (0 \leq z < L), \end{cases} \quad (15b)$$

$$B = \begin{cases} \alpha_2 A'_2(\xi) + \beta_2 B'_2(\xi) + B_2(\xi, \alpha_2, \beta_2) & (z > L). \end{cases} \quad (15c)$$

这三个解可以直接连接起来: 在 $z = 0$ 处 $\xi = -(kL)^{2/3}$, 因此(15b)式可作大 $|\xi|$ 渐近展开, 然后与(15a)式连接; 在 $z = L$ 处, 对(15b)和(15c)式作小 ξ 展开, 便可连接。为使 B 在 $z \gg L$ 处不发散, 应令 $\beta_2 = 0$, 不难求得

$$\beta_0 = \frac{1 - \frac{1}{4} a q + i \sqrt{3}/4 a q}{1 + \frac{1}{4} a q + i \sqrt{3}/4 a q} \cdot \frac{1 - \frac{i}{2} q \cdot kL}{1 + \frac{i}{2} q \cdot kL} \cdot e^{\frac{4}{3} i kL + \frac{\pi}{2} i}. \quad (16)$$

共振吸收率为

$$A = 1 - \beta_0 \beta_0^* = \frac{a q}{\left(1 + \frac{1}{4} a q\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a q\right)^2}, \quad (17)$$

式中 $a = (2\pi/3^{1/3}\Gamma(1/3))^2 = 2.645$ 。展开(17)式保留到 q^2 阶, 得到与 Speziale 给出的相类似的结果。上式给出 A 的峰值在 $q = 0.57$, 此时 $A = 0.65$, 它高出数值计算结果(见图 2(b))。

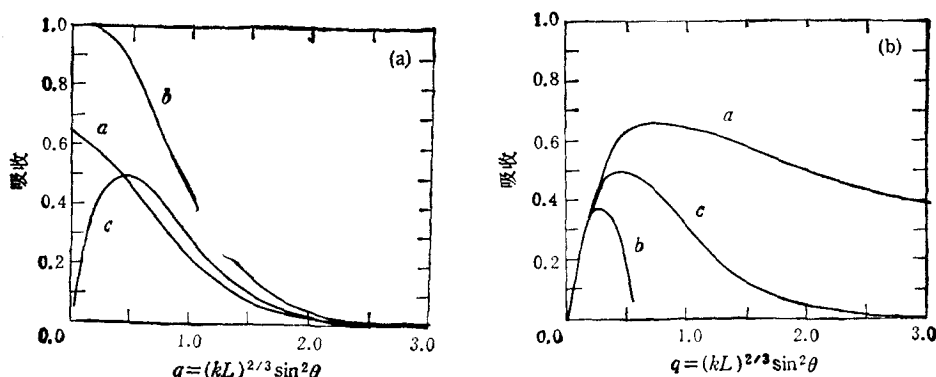


图 2 (a)是大入射角下共振吸收率与数值计算比较 曲线 a 是本文计算结果; 曲线 b 引自文献 [8]; 曲线 c 是数值计算结果 [7]; (b)是小入射角下共振吸收率与数值计算比较; 图例同(a)

三、短标尺长度下的共振吸收

如引言所述, 短标尺长度是指标尺长度远小于入射光波在真空中的波长。短标尺长度下总有 $q < 1$, WKB 方法解(2)式是不成立的。但我们可以用求长标尺长度小入射角下共振吸收的方法求短标尺长度下的共振吸收。我们已有分区解(15a), (15b), (15c)式, 但在 $z = 0$ 处的连接方式需作一点改变: (15b)式在 $z = 0$ 处作小 ξ 展开, 然后与(15a)

式连接;(15b)和(15c)式在 $z = L$ 处连接方式不变. 为使 B 在 $z \gg L$ 处不散发, 令 $\beta_2 = 0$, 可以求得

$$\beta_0 = \frac{\cos \theta - \pi q(kL)^{1/3} + i3^{1/3}\Gamma(1/3)^2/2\pi \cdot (kL)^{1/3}}{\cos \theta + \pi q(kL)^{1/3} + i3^{1/3}\Gamma(1/3)^2/2\pi \cdot (kL)^{1/3}}, \quad (18)$$

共振吸收率为

$$A = \frac{4\pi kL \cos \theta \cdot \sin^2 \theta}{(\pi kL \sin^2 \theta + \cos \theta)^2 + 1.88(kL)^{2/3}}. \quad (19)$$

我们比较了(19)式与数值计算结果, 如图 3.

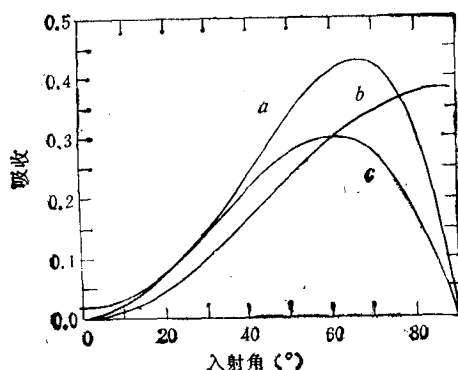


图 3 短标尺长度下共振吸收率与数值计算比较 $L = 0.01\lambda$; 曲线 a 是本文计算结果; 曲线 b 引自文献[10]; 曲线 c 是数值计算结果(取 $\nu/\omega = 0.01$)

综上所述, 本文讨论了一种求共振吸收率方法, 计算了长、短标尺长度下的共振吸收. 其要点是通过求出区间磁场解, 再连接各区间解, 求出反射系数, 即得共振吸收率. 在求解过程中令 $\nu/\omega \rightarrow 0^+$, 这样有效碰撞吸收就可忽略. 但我们不能令 $\nu/\omega = 0$ 或 $\nu/\omega \rightarrow 0^-$, 因这样做就得不到吸收. 从数学上看, 在处理临界点附近解的连接时, 当 z 由 L^- 经过临界点到 L^+ , 如果 $\nu/\omega \rightarrow 0^+$, $\ln \xi$ 从 $\ln |\xi| - \pi i$ 到 $\ln |\xi|$; 如果 $\nu/\omega = 0$ 或 $\nu/\omega \rightarrow 0^-$, $\ln \xi$ 从 $\ln |\xi| + \pi i$ 到 $\ln |\xi|$. 后者出现反射率大于或等于 1, 即无吸收. 从物理上看, 只有当产生在临界面附近的等离子体波被吸收, 共振吸收才会出现.

- [1] O. L. Landen *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989), 1475.
- [2] R. Fedosejevs *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1250.
- [3] H. M. Murnane, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 155.
- [4] J. C. Kieffer *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 760.
- [5] H. M. Milchberg, R. R. Freeman, *J. Opt. Soc. Am.*, **B6**(1989), 1351.
- [6] J. P. Freidberg, R. W. Mitchel *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **28**(1972), 795.
- [7] D. W. Forslund *et al.*, *Phys. Rev.*, **A11**(1975), 679.
- [8] T. Speziale and P. J. Catto, *Phys. Fluids*, **20**(1977), 990.
- [9] E. Ahedo and J. R. Sanmartin, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **29**(1987), 419.
- [10] W. L. Kruer, *The Physics of Laser Plasma Interactions*, Addison-Wesley Publish Company, (1988).
- [11] V. L. Ginzburg, *Propagation of Electrmagnetic Waves in Plasmas*, Pergaman, New York, (1970).
- [12] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, (1978).

ANALYTICAL STUDY ON THE RESONANT ABSORPTION OF LIGHT IN NON-UNIFORM PLASMA

SHENG ZHENG-MING MA JING-XIU XU ZHI-ZHAN

Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai, 201800

(Received 24 November 1990)

ABSTRACT

The resonant absorption of light in cold plasma for linear density profile has been calculated analytically both for long and short scalelengths by calculating the reflectivity from the plasma and vacuum interface. The results in long scalelength case are in agreement with the well-known results but with a higher order in accuracy, and that in short scalelength case are consistent with numerical calculation.

PACC: 5225P; 5240D