

磁化等离子体中静电漂移波和 剪切阿耳芬波的非线性耦合

陈银华 朱栋培 杨维纶

中国科学技术大学近代物理系, 合肥, 230026

1990年7月28日收到

本文采用 Hasegawa-Wakatani 方程组研究磁化等离子体中静电漂移波和剪切阿耳芬波的非线性耦合。求得非线性方程组的偶极涡旋解。这些解属于本性电磁涡旋, 对应的扰动磁场和纵向电流在涡旋边界上是连续的。

PACC: 5235; 5240D

一、引 言

近几年来, 磁化等离子体中各种低频模受到普遍的关注。这些模的非线性自相互作用, 形成一些规则的相干结构, 这些相干结构可能与等离子体约束和反常输运具有密切的关系^[1]。不少作者^[2,3]推导出描述这些低频模的非线性磁流体方程组。Shukla^[4]利用 Hasegawa-Wakatani 方程组^[5]研究非均匀磁场中的交换模和气球模的非线性传播, 在局域近似下, 求得了方程组的偶极涡旋解。然而, 他们所求得的气球模涡旋解是属于 Rossby 型电磁涡旋^[6], 它们相应的扰动磁场和纵向电流在涡旋边界上是间断的。

本文利用 Hasegawa-Wakatani 方程组研究静电漂移波和剪切阿耳芬波的非线性耦合。这种耦合是由离子的有限拉莫尔半径效应引起的。在上述方程组中设磁力线的曲率半径 R 趋于无穷, 就得到我们所需要的方程组, 并求出相应的偶极涡旋解。这组解属于本性电磁涡旋^[6], 它们的扰动磁场和纵向电流在涡旋边界上是连续的。

二、基本方程组

在 Hasegawa-Wakatani 方程组中, 略去磁场的非均匀性 ($R \rightarrow \infty$), 可得到描述磁化等离子体中静电电子和离子漂移波同剪切阿耳芬波的非线性耦合方程组^[3,4]

$$(\partial_t + \mathbf{e}_z \times \nabla \Phi \cdot \nabla) \Delta \Phi + (\partial_t - \mathbf{e}_z \times \nabla \Psi \cdot \nabla) \Delta \Psi + (V_{Ai} \partial_y + h \mathbf{e}_z \times \nabla P_i \cdot \nabla) \Delta \Phi = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t \Psi + (\partial_t - \mathbf{e}_z \times \nabla \Psi \cdot \nabla)(\Phi - P_e) - V_{Ae} \partial_y \Psi = 0, \quad (2)$$

$$(\partial_t + \mathbf{e}_z \times \nabla \Phi \cdot \nabla) P_e + (\partial_t - \mathbf{e}_z \times \nabla \Psi \cdot \nabla) \Delta \Phi - V_{Ae} \partial_y \Phi = 0, \quad (3)$$

$$(\partial_t + \mathbf{e}_z \times \nabla \Phi \cdot \nabla) P_i - K_i \partial_y \Phi = 0, \quad (4)$$

其中 $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $\mathbf{e}_z$ 为 z 轴的单位矢量, 与本底磁场方向一致, $V_{Ai} = h K_i$, $h = T_i / T_e$, $K_i = \rho_i (d \ln P_{i0} / dx)$, $V_{Ae} = \rho_e (d \ln P_{e0} / dx)$, $\rho_i = c_s / \omega_{ci}$ (用电子温度计算的离子拉莫尔半径), $c_s = (T_e / m_i)^{1/2}$ 为离子声速, $P_i = \tilde{P}_i / P_{i0}$, $\tilde{P}_i$, P_{i0} 分别为 $i (=e, i)$ 类粒子的扰

动压强和未扰压强, $\Phi = e\varphi/T_e$, $\Psi = eA_z V_A / cT_e$ 分别为归一化扰动标势和矢势的纵向分量, $V_A = (B_0^2 / 4\pi n_0 m_i)^{1/2}$ 为阿耳芬速度. 另外, 时间变量和空间变量分别用 ω_{ci}^{-1} , ρ_i (对 x, y) 和 c/ω_{pe} (对 z) 归一化.

将方程(1)–(4)线性化, 并将扰动量以傅里叶分量形式代入, 最后可求得线性色散关系^[3]:

$$(\omega + \omega_e^*)[\omega(\omega - \omega_i^*) - k_z^2 V_A^2] = k_z^2 k_\perp^2 V_A^2 \rho_i^2 (\omega - \omega_i^*),$$

其中 $\omega_j^* = (cT_e / eB_0) d \ln P_{j0} / dx$ 为 j 类粒子的漂移频率. 我们看到, 由于离子的有限拉莫尔半径效应, 电子漂移波、离子漂移波和剪切阿耳芬波之间互相耦合.

三、非线性方程组的涡旋解

现在求方程组(1)–(4)的行波解. 设所有扰动量为 x, η 的函数, $\eta = y + \alpha x - ut$, 其中 α, u 为常数. 显然, $\partial_t = -u\partial_\eta$, $\partial_y = \partial_\eta$ 和 $\partial_x = \alpha\partial_\eta$.

这时, 方程组(2), (4)可写成

$$\hat{D}_1[\alpha(\Phi - P_e) - (u + V_{de})\Psi] = 0, \quad (5)$$

$$\hat{D}\left(P_i + \frac{K_i}{u}\Phi\right) = 0, \quad (6)$$

其中 $\hat{D}_1 = \partial_\eta - \frac{1}{\alpha} \mathbf{e}_x \times \nabla \Psi \cdot \nabla$, $\hat{D} = \partial_\eta - \frac{1}{u} \mathbf{e}_x \times \nabla \Phi \cdot \nabla$.

方程(5), (6)的解为

$$P_e = \Phi - \frac{1}{\alpha}(u + V_{de})\Psi, \quad (7)$$

$$P_i = -\frac{K_i}{u}\Phi. \quad (8)$$

将(7), (8)式代入(1), (3)式, 最后可得 Φ 和 Ψ 的非线性耦合方程组

$$(V_{di} - u)\hat{D}\Delta\Phi + \alpha\hat{D}_1\Delta\Psi = 0, \quad (9)$$

$$\alpha^2\hat{D}_1\Delta\Psi - (u + V_{de})\hat{D}(\alpha\Phi - u\Psi) = 0. \quad (10)$$

利用恒等式 $\hat{D}(\alpha\Phi - u\Psi) \equiv \hat{D}_1(\alpha\Phi - u\Psi)$, 并将方程组(9), (10)写成泊松括号方程

$$[\tilde{\Phi}, (V_{di} - u)\Delta\Phi] + [\tilde{\Psi}, u\Delta\Psi] = 0, \quad (11)$$

$$[\tilde{\Psi}, \alpha^2\Delta\Psi - (u + V_{de})(\alpha\Phi - u\Psi)] = 0, \quad (12)$$

其中 $\tilde{\Phi} = \Phi - ux$, $\tilde{\Psi} = \Psi - \alpha x$, $[f, g] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial \eta} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta}$.

利用泊松括号的性质, 最后可把方程组(11), (12)写成

$$\alpha^2\Delta\Psi - (u + V_{de})(\alpha\Phi - u\Psi) = f_1(\tilde{\Psi}), \quad (13)$$

$$\alpha(V_{di} - u)\Delta\Phi + (u + V_{de})(\alpha\Phi - u\Psi) = f_2(\tilde{\Phi}), \quad (14)$$

其中 $f_1(\tilde{\Psi}), f_2(\tilde{\Phi})$ 为其自变量的任意连续函数. 为了求得方程组(13), (14)的解析解, 令 f_1, f_2 为线性函数, $f_1(\tilde{\Psi}) = c_1\tilde{\Psi}$, $f_2(\tilde{\Phi}) = c_2\tilde{\Phi}$, c_1, c_2 为待定常数.

遵循构造涡旋解的一般程序^[5,6], 我们在极坐标平面 (r, θ) 求方程(13), (14)的解, 其中 $r = (x^2 + \eta^2)^{1/2}$, $\theta = \arctan \eta/x$. 在外区 ($r > a$, a 为涡旋半径), 根据解的局域性要求 (当 $r \rightarrow \infty$ 时, 有 $\Phi, \Psi \rightarrow 0$), 由方程(13), (14)得到外区参数 $c_1^i = c_2^i = 0$. 在内区 ($r < a$), 解的正则性 ($r \rightarrow 0$ 时, Φ, Ψ 为有限) 不能给出内区参数 c_1^i, c_2^i 的明显选择. 为确

定起见,我们选 $c_1^i = 0$, 而 c_2^i 作为一个非零待定参数保留. 利用上面给出的内外区参数, 由方程(13), (14)消去 Ψ , 最后可得到 Φ 在内区和外区所满足的方程

$$\Delta^2 \Phi + \beta_1 \Delta \Phi = 0 \quad (r > a), \quad (15)$$

$$\Delta^2 \Phi + \beta_2 \Delta \Phi + \beta_3 (\Phi - ux) = 0 \quad (r < a), \quad (16)$$

其中 $\beta_1 = \alpha^{-2}(V_{di} - u)^{-1}(u + V_{de})[\alpha^2 + u(V_{di} - u)],$ (17)

$$\beta_2 = \alpha^{-3}(V_{de} - u)^{-1}[\alpha^3(u + V_{de}) + \alpha u(V_{di} - u)(V_{de} + u) - \alpha^2 c_2^i], \quad (18)$$

$$\beta_3 = -u\alpha^{-3}c_2^i(V_{di} - u)(V_{de} + u). \quad (19)$$

现在寻求形式为 $\Phi(r, \theta) = \Phi(r) \cos \theta$ (20)

的偶极涡旋解. 遵循文献[6]的方法, 可求得方程(15), (16)的解为

$$\Phi_n(r, \theta) = \left[D_1 K_1(kr) + \frac{D_2}{r} \right] u a \cos \theta, \quad (21)$$

$$\Phi_n(r, \theta) = [G_1 K_1(kr) + G_2 I_1(kr) + r/a] u a, \quad (22)$$

其中 $k^2 = -\beta_1 > 0,$ (23)

$$p^2 = [(\beta_2^2 - 4\beta_3)^{1/2} + \beta_2]/2, \quad (24)$$

$$q^2 = [(\beta_2^2 - 4\beta_3)^{1/2} - \beta_2]/2, \quad (25)$$

D_1, D_2, G_1, G_2 为待定参数. 在得到(22)式解时, 我们已假定 $\beta_3 < 0$. 将(21), (22)式代入(13), (14)式, 考虑到常数 c_2 在内外区的不同选择, 最后可得

$$\Psi_n(r, \theta) = [(\lambda^2 k^2 + 1)D_1 K_1(kr) + D_2/r] \alpha a \cos \theta, \quad (26)$$

$$\Psi_n(r, \theta) = [(-\lambda^2 p^2 - \mu^2 + 1)G_1 J_1(pr) + (\lambda^2 q^2 - \mu^2 + 1)G_2 I_1(qr) + r/a] \alpha a \cos \theta, \quad (27)$$

其中 $\lambda^2 = (V_{de} + u)(V_{de} - u)^{-1}, \mu^2 = c_2^i \alpha^{-1}(V_{de} + u).$

由 $\Phi, \partial \Phi / \partial r, \Delta \Phi$ 和 Ψ 在边界 $r = a$ 处的连续性可求得系数 D_1, D_2, G_1 和 G_2

$$D_1 = \frac{2(p^2 + q^2)}{K_1(ka)Q}, \quad (28)$$

$$D_2 = \left[1 - \frac{2(p^2 + q^2)}{Q} \right] a, \quad (29)$$

$$G_1 = \frac{-2k^2}{J_1(pa)Q}, \quad (30)$$

$$G_2 = \frac{2k^2}{I_1(qa)Q}, \quad (31)$$

其中 $Q = (p^2 + q^2) \left[2 - \frac{akK_2(ka)}{K_1(ka)} \right] - k^2 \left[\frac{apJ_2(pa)}{J_1(pa)} + \frac{aqI_2(qa)}{I_1(qa)} \right],$ (32)

J_1, J_2 为第一, 第二阶 Bessel 函数, I_1, K_1, I_2, K_2 为第一, 第二阶修正 Bessel 函数.

由 $\partial \Psi / \partial r$ 在涡旋边界 $r = a$ 处的连续性, 可求得涡旋波数 k, p 和 q 之间的关系

$$\begin{aligned} & \lambda^2(p^2 + q^2) \frac{kK_2(ka)}{K_1(ka)} + (\mu^2 + \lambda^2 p^2) \frac{pJ_2(pa)}{J_1(pa)} \\ & + (\mu^2 - \lambda^2 q^2) \frac{qI_2(qa)}{I_1(qa)} = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

涡旋传播速度 u 的允许区由非线性色散关系

$$\frac{(u + V_{de})[\alpha^2 + u(V_{di} - u)]}{\alpha^2(u - V_{di})} > 0 \quad (34)$$

决定。

可以证明,只要 Φ, Ψ 在涡旋边界上连续, $\Delta\Psi$ 在边界上的连续性将自动满足。另外,对于我们求得的解,扰动磁场和纵向电流在边界上也是连续的。

四、结 论

本文利用 Hasegawa-Wakatani 方程组研究了磁化等离子体中剪切阿耳芬波与电子漂移波和离子漂移波的非线性耦合,并求得了非线性方程组的偶极涡旋解。这种解属于本性电磁涡旋^[6],对应的扰动磁场和纵向电流在涡旋边界上是连续的。在低频静电模和阿耳芬波非线性耦合的惯常研究中,一般都假设电子温度远大于离子温度,或者设离子温度等于零。而 Hasegawa-Wakatani 方程组没有这种限制。所以,我们的结果适用于聚变条件下的等离子体。

- [1] W. Horton, *Phys. Fluids*, **B1**(1989), 524.
- [2] H. R. Strauss, *Phys. Fluids*, **20**(1977), 1354.
- [3] A. Hasegawa and M. Wakatani, *Phys. Fluids*, **26**(1983), 2770.
- [4] P. K. Shukla, *Phys. Rev.*, **32**(1985), 1858.
- [5] V. D. Larichev and G. M. Reznik, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **231**(1977), 1077.
- [6] Liu Jixing and W. Horton, *J. Plasma Phys.*, **36**(1986), 1.

NONLINEAR COUPLING OF THE ELECTROSTATIC DRIFT WAVE AND SHEAR ALFVEN WAVE IN MAGNETIZED PLASMAS

CHEN YIN-HUA ZHU DONG-PEI YANG WEI-HONG

Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026

(Received 28 July 1990)

ABSTRACT

In terms of Hasegawa-Wakatani equations, the nonlinear coupling of the electrostatic drift wave and the shear Alfvén wave in magnetized plasmas has been investigated. The dipolar vortex solutions of the nonlinear equation system are obtained. These solutions belong to the intrinsic electromagnetic vortices, the corresponding magnetic field perturbations and the longitudinal current are continuous on the boundary of the vortex.

PACC: 5235; 5240D