

适用于射频加热的迴旋动力方程*

陈雁萍 蔡诗东

中国科学院物理研究所, 北京, 100080

1990年10月19日收到

参照 Chen 和 Tsai^[1] 的方法导出了在迴旋频率附近, 以三个电场分量为独立场量的线性迴旋动力方程。它适用于研究非均匀等离子体中的射频加热。并给出了该方程在轴对称托卡马克装置中的解。

PACC: 5250; 5235

一、引 言

射频加热, 例如电子迴旋加热(ECH)、低杂波加热(LHH)、离子迴旋频率范围加热(ICRF)等等, 是聚变装置中有效的辅助加热方法。特别是 ICRF 加热, 近年来对它开展了广泛的实验和理论研究, 得到了良好的效果。虽然聚变装置中的等离子体是个非均匀介质, 理论研究方法主要是局域均匀理论。例如, 波的传播有的仍用射线追踪法, 有的用局域均匀理论导出的感应电流构造一个非均匀介质中的波动方程; 研究加热效应或用局域均匀理论, 或通过弹跳(bounce)平均引入空间不均匀效应^[2-6]。但对 ICRF 加热, 其波长可与装置尺度相比较。因此有必要用非局域理论对 ICRF 进行研究, 即首先导出非均匀介质中的感应电流、电导率, 再构造波动方程研究其传播和吸收, 才能完全弄清楚均匀理论所得结果的可靠性及其适用范围。

60年代末, 为了研究非均匀磁场中等离子体的稳定性, 逐渐发展了一套迴旋动力方程^[7-11]。从静电到电磁, 从低频到高频, 从非相对论到相对论, 从线性到非线性, 成功地揭示了非均匀等离子体中许多不稳定现象, 但还很少用于研究加热问题。不过我们可以预期迴旋动力理论也会成为研究非均匀等离子体加热的一种有效工具^[12, 13]。在研究稳定性问题中常采用 $\delta\phi, \delta A_{\parallel}, \delta B_{\parallel}$ 作为三个独立的场量。但在加热问题中采用 $\delta E_{+}, \delta E_{-}, \delta E_{\parallel}$ (它们分别是左旋、右旋和平行磁场方向的扰动电场)作为独立场量更为方便。因此本文将遵循 Chen 和 Tsai^[1] 的方法导出以 $\delta E_{+}, \delta E_{\parallel}$ 为场量在迴旋频率附近的线性迴旋动力方程, 以便用于研究射频波加热, 特别是托卡马克位形中的射频加热。在磁约束聚变等离子体中, 粒子受磁场约束, 在输运可以忽略的时间尺度内, 粒子在垂直磁场方向移动距离不大于香蕉宽度, 而沿磁力线方向可以走遍整个装置或其中的相当部分, 即粒子在沿磁力线方向可以感受到其全部或相当部分的不均匀性, 而在垂直方向移动的距离只是装置

* 国家自然科学基金资助的课题。

尺度的很小一部分。因此在研究非均匀介质中粒子运动轨道对介质电导率和感应电流的影响时对粒子沿磁力线方向的运动应该谨慎处理。另外, 在聚变等离子体的离子迴旋共振加热问题中, 垂直波长比平行波长小得多。为了使方程易于处理, 我们在此文中将对垂直方向采取 WKB 近似。

二、迴旋动力方程的导出

在粒子相空间 $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 中的线性伏拉索夫方程为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \delta f &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{q_i}{m_i c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) \delta f \\ &= - \frac{q_i}{m_i} \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\mathcal{L}_0$ 为未扰动的伏拉索夫算子, $q_i, m_i, \mathbf{x}, \mathbf{v}$ 分别为粒子电荷、质量、坐标和速度, $\mathbf{B}$ 为平衡磁场, $\delta \mathbf{E}$ 和 $\delta \mathbf{B}$ 为扰动电场和扰动磁场, F_0 和 δf 分别为粒子的平衡分布函数和扰动分布函数。本文的任务就是在拉摩半径 ρ 与等离子体系统不均匀尺度 L 之比 ρ/L 很小时把此方程由粒子相空间转变到迴旋中心相空间。

粒子相空间 $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 与迴旋中心相空间 $(\mathbf{X}, \mathbf{V})$ 及其微分矢量算符有以下关系:

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \mathbf{v} \times \mathbf{e}_{\parallel} / \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{V} = (\varepsilon, \mu, \alpha_{\varepsilon}, \sigma), \quad (3)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{X}} + \mathbf{v} \times \nabla_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{e}_{\parallel}}{\Omega} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \nabla_{\mathbf{x}} \alpha_{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \alpha_{\varepsilon}}, \quad (4)$$

$$\nabla_{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\mathbf{e}_{\alpha}}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \alpha_{\varepsilon}} + \frac{1}{\Omega} \mathbf{I} \times \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{X}, \mathbf{V}$ 为迴旋中心的坐标和速度, Ω 为迴旋频率, α_{ε} 为迴旋角, $\varepsilon = v^2/2$, $\mu = v_{\perp}^2/2B$, $\sigma = \text{sgn}(v_{\parallel})$, $\mathbf{e}_{\parallel}$ 为沿平衡磁场方向的单位矢量。 $\mathbf{e}_{\parallel}$ 和 Ω 在粒子坐标和迴旋中心处有不同值, 但精确到 $O(\rho/L)$ 可以忽略这种差别。在以上关系中我们已采用局域坐标 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{\parallel}$, 并有

$$\mathbf{v} = v_{\perp} (\mathbf{e}_1 \cos \alpha_{\varepsilon} + \mathbf{e}_2 \sin \alpha_{\varepsilon}) + v_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel}, \quad (6)$$

$$\mathbf{e}_{\alpha} = \mathbf{e}_{\parallel} \times \mathbf{v}_{\perp} / v_{\perp}. \quad (7)$$

以下分别对(1)式等号左端项和右端项进行变换:

1. 方程(1)等号左端项

按照(4), (5)两式, 伏拉索夫算子中各项在迴旋中心相空间中变成如下形式:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rightarrow v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial X_{\parallel}} + \mathbf{v}_{\perp} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{\perp}} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{B1} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{B2}, \quad (8)$$

$$\frac{q_i}{m_i c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \rightarrow -\Omega \frac{\partial}{\partial \alpha_{\varepsilon}} - \mathbf{v}_{\perp} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{\perp}}, \quad (9)$$

$$\text{其中} \quad \boldsymbol{\lambda}_{B1} = \mathbf{v} \times \nabla_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{e}_{\parallel}}{\Omega} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}, \quad (10)$$

$$\lambda_{B2} = \nabla_x \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \nabla_x \alpha_g \frac{\partial}{\partial \alpha_g}. \quad (11)$$

整个伏拉索夫算子则有以下形式:

$$\mathcal{L}_{0g} = \frac{\partial}{\partial t} + v_{||} \frac{\partial}{\partial X_{||}} + \mathbf{v} \cdot (\lambda_{B1} + \lambda_{B2}) - \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial \alpha_g}. \quad (12)$$

由于在垂直磁场方向采取 WKB 近似,所有扰动量在 \$(\mathbf{X}, \mathbf{V})\$ 空间可写成

$$\delta f(\mathbf{X}, \mathbf{V}) = \delta f_g(\mathbf{X}, \mathbf{V}) \exp i \int^{\mathbf{x}_{\perp}} \mathbf{k}_{\perp} \cdot d\mathbf{X}_{\perp}, \quad (13)$$

其中 \$\delta f_g\$ 为迴旋角 \$\alpha_g\$ 的函数,我们把它展成 \$\alpha_g\$ 的傅里叶级数:

$$\delta f_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta f_g \rangle_n \exp(-in\alpha_g), \quad (14)$$

其中

$$\langle \delta f_g \rangle_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha_g \delta f_g \exp(in\alpha_g). \quad (15)$$

整个(1)式等号左端项也可展成 \$\alpha_g\$ 的傅里叶级数,其系数为

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{0g} \delta f_g \rangle_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} + v_{||} \frac{\partial}{\partial X_{||}} + \mathbf{v} \cdot (\lambda_{B1} + \lambda_{B2}) - \mathcal{Q} \frac{\partial}{\partial \alpha_g} \right] \\ \cdot \delta f_g \exp(in\alpha_g) d\alpha_g. \end{aligned} \quad (16)$$

如果把上式中等号右端第三项分成与 \$\alpha_g\$ 无关和有关的两部分:

$$\mathbf{v} \cdot (\lambda_{B1} + \lambda_{B2}) = [\mathbf{v} \cdot (\lambda_{B1} + \lambda_{B2})]_0 + [\mathbf{v} \cdot (\lambda_{B1} + \lambda_{B2})]_{\alpha_g}, \quad (17)$$

则由(16)式可得

$$\langle \mathcal{L}_{0g} \delta f_g \rangle_n = \langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_n \langle \delta f_g \rangle_n + \sum_{n' \neq n} \langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_{nn'} \langle \delta f_g \rangle_{n'}. \quad (18)$$

(16)式方括号中第一、二、四项和(17)式等号右端第一项组成(18)式等号右端第一项:

$$\langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_n = \frac{\partial}{\partial t} + v_{||} \frac{\partial}{\partial X_{||}} + i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_d + in(\mathcal{Q} - \omega_a), \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{e}_{||} \times [(\mathbf{v}_{\perp}^2/2) \nabla_x \ln B + v_{||}^2 \mathbf{e}_{||} \cdot \nabla \mathbf{e}_{||}] / \mathcal{Q}, \quad (20)$$

$$\omega_a = [\mathbf{v} \cdot \nabla_x \alpha]_0 = v_{||} [\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_{||} \cdot \nabla_x \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_{||} \cdot (\nabla_x \times \mathbf{e}_{||}) / 2], \quad (21)$$

\$\mathbf{v}_d\$ 来自 \$\lambda_{B1}\$, \$\omega_a\$ 来自 \$\lambda_{B2}\$. 此外注意(12)和(16)式中 \$\mathcal{Q}\$ 本为粒子坐标 \$\mathbf{x}\$ 的函数,转换到迴旋中心坐标 \$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) \simeq \mathcal{Q}(\mathbf{X}) + \mathbf{v} \times \mathbf{e}_{||} \cdot \partial \mathcal{Q} / \partial \mathbf{X} / \mathcal{Q}(\mathbf{X})\$, 后一项在(16)式中积分为零,所以(19)式中 \$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{X})\$. (18)式中等号右端第二项为

$$\sum_{n' \neq n} \langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_{nn'} \langle \delta f_g \rangle_{n'} = \langle [\mathbf{v} \cdot (\lambda_{B1} + \lambda_{B2})]_{\alpha_g} \delta f_g \rangle_n. \quad (22)$$

它相应于不同谐数的耦合效应.

2. 方程(1)等号右端项

按前面假定在垂直方向 \$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\$ 采取 WKB 近似,故有

$$\nabla = ik_1 \mathbf{e}_1 + ik_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_{||} \frac{\partial}{\partial X_{||}}, \quad (23)$$

脚标 1, 2 分别表示在 \$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\$ 上的分量.

$$\begin{aligned}\nabla \times \delta \mathbf{E} = & \left(ik_2 \delta E_{\parallel} - \frac{\partial \delta E_2}{\partial X_{\parallel}} \right) \mathbf{e}_1 + \left(-ik_1 \delta E_{\parallel} + \frac{\partial \delta E_1}{\partial X_{\parallel}} \right) \mathbf{e}_2 \\ & + (ik_1 \delta E_2 - ik_2 \delta E_1) \mathbf{e}_{\parallel} + \delta E_1 \nabla \times \mathbf{e}_1 \\ & + \delta E_2 \nabla \times \mathbf{e}_2 + \delta E_{\parallel} \nabla \times \mathbf{e}_{\parallel}.\end{aligned}\quad (24)$$

$$\text{由麦克斯韦方程} \quad \delta \mathbf{B} = -\frac{ic}{\omega} \nabla \times \delta \mathbf{E}, \quad (25)$$

因而

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B} = & -\mathbf{e}_1 \left[\left(1 - \frac{k_2 v_{\perp}}{\omega} \sin \alpha_s + \frac{iv_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial X_{\parallel}} \right) \delta E_1 + \frac{k_1 v_{\perp}}{\omega} \sin \alpha_s \delta E_2 + \frac{k_1 v_{\parallel}}{\omega} \delta E_{\parallel} \right] \\ & + \mathbf{e}_2 \left[\frac{k_2 v_{\perp}}{\omega} \cos \alpha_s \delta E_1 + \left(1 - \frac{k_1 v_{\perp}}{\omega} \cos \alpha_s + \frac{iv_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial X_{\parallel}} \right) \delta E_2 + \frac{k_2 v_{\parallel}}{\omega} \delta E_{\parallel} \right] \\ & + \mathbf{e}_{\parallel} \left\{ -\frac{iv_{\perp}}{\omega} \cos \alpha_s \frac{\partial \delta E_1}{\partial X_{\parallel}} - \frac{iv_{\perp}}{\omega} \sin \alpha_s \frac{\partial \delta E_2}{\partial X_{\parallel}} \right. \\ & \left. + \left[1 - \left(\frac{k_2 v_{\perp}}{\omega} \sin \alpha_s + \frac{k_1 v_{\perp}}{\omega} \cos \alpha_s \right) \right] \delta E_{\parallel} \right\} \\ & - \frac{i}{\omega} \mathbf{v} \times (\delta E_1 \nabla \times \mathbf{e}_1 + \delta E_2 \nabla \times \mathbf{e}_2 + \delta E_{\parallel} \nabla \times \mathbf{e}_{\parallel}).\end{aligned}\quad (26)$$

零级分布函数 F_0 与 α_s 无关, 故有

$$\nabla_{\mathbf{r}} F_0 = \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{v_{\perp}}{B} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{Q} \mathbf{I} \times \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) F_0. \quad (27)$$

联合(26), (27)两式, 利用关系 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{BC} \cdot \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{BC}) \cdot \mathbf{D}$ 和 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, 可得

$$\begin{aligned}(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} F_0 = & \left[v_{\perp} \cos \alpha_s \left(\frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \right) - \frac{\mathbf{e}_2}{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} F_0 \right] \cdot \left[\left(1 - \frac{k_2 v_{\perp}}{\omega} \sin \alpha_s + \frac{iv_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial X_{\parallel}} \right) \delta E_1 \right. \\ & \left. + \frac{k_1 v_{\perp}}{\omega} \sin \alpha_s \delta E_2 + \frac{k_1 v_{\parallel}}{\omega} \delta E_{\parallel} \right] + \left[v_{\perp} \sin \alpha_s \left(\frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \right) + \frac{\mathbf{e}_1}{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} F_0 \right] \\ & \cdot \left[\frac{k_2 v_{\perp}}{\omega} \cos \alpha_s \delta E_1 + \left(1 - \frac{k_1 v_{\perp}}{\omega} \cos \alpha_s + \frac{iv_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial X_{\parallel}} \right) \delta E_2 + \frac{k_2 v_{\parallel}}{\omega} \delta E_{\parallel} \right] \\ & - v_{\parallel} \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{iv_{\perp}}{\omega} \cos \alpha_s \frac{\partial \delta E_1}{\partial X_{\parallel}} + \frac{iv_{\perp}}{\omega} \sin \alpha_s \frac{\partial \delta E_2}{\partial X_{\parallel}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{k_2 v_{\perp}}{\omega} \sin \alpha_s + \frac{k_1 v_{\perp}}{\omega} \cos \alpha_s - 1 \right) \delta E_{\parallel} \right] \\ & - \frac{i}{\omega} \left(\frac{1}{Q} \mathbf{I} \times \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} F_0 + \frac{v_{\perp}}{B} \frac{\partial F_0}{\partial \mu} \right) \cdot \mathbf{v} \\ & \times (\delta E_1 \nabla \times \mathbf{e}_1 + \delta E_2 \nabla \times \mathbf{e}_2 + \delta E_{\parallel} \nabla \times \mathbf{e}_{\parallel}).\end{aligned}\quad (28)$$

以上 $\delta \mathbf{E}$ 和 $\delta \mathbf{B}$ 为粒子坐标 $\mathbf{x}$ 的函数, 在垂直方向作 WKB 近似, 则

$$\delta E = \delta E(x_{\parallel}) \exp i \int^{x_{\perp}} \mathbf{k}_{\perp} \cdot d\mathbf{x}_{\perp}. \quad (29)$$

按(2),(3)式关系转换到回旋中心坐标,并令

$$\cot \beta = k_1/k_2, \quad (30)$$

$$\text{则} \quad \delta E = \delta E_s(X) \exp i \left[\int^{x_{\perp}} \mathbf{k}_{\perp} \cdot d\mathbf{X}_{\perp} - \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \sin(\alpha - \beta) \right], \quad (31)$$

其中 $k_1^2 = k_{\perp}^2 + k_z^2$. 把(31)式代入(28)式,对其作傅里叶级数展开,并利用矢量关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{e}_i &= v_{\perp} v_{\parallel} \nabla \times \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_1 \sin \alpha_s - \mathbf{e}_2 \cos \alpha_s), \\ \mathbf{e}_i \times \nabla \times \mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{I} \times \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \mathbf{A}) \\ &= (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{\parallel})(\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{e}_j) - (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A})(\mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla \times \mathbf{e}_j), \end{aligned}$$

$$\text{可得} \quad \left\langle \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_r F_0 \right\rangle_n = \phi_1 \delta E_{1s} + \phi_2 \delta E_{2s} + \phi_3 \delta E_{\parallel s}, \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_1 &= c_{\beta} \left[v_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial s} + v_{\perp} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \left(1 + \frac{iv_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial X_{\parallel}} \right) + \frac{\mathbf{e}_1}{\Omega} \right. \\ &\quad \cdot \nabla_X F_0 \left(\frac{k_2 v_{\perp}}{\omega} + \frac{iv_{\perp}}{\omega} \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla \times \mathbf{e}_1 \right) + \frac{i}{\omega} v_{\perp} v_{\parallel} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \mathbf{e}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{e}_1 \Big] \\ &\quad + s_{\beta} \left[\frac{\mathbf{e}_2}{\Omega} \cdot \nabla_X F_0 \left(\frac{k_2 v_{\perp}}{\omega} + \frac{iv_{\perp}}{\omega} \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla \times \mathbf{e}_1 \right) - \frac{i}{\omega} v_{\perp} v_{\parallel} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \mathbf{e}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{e}_1 \right] \\ &\quad - u_{\beta} \left[\frac{\mathbf{e}_2}{\Omega} \cdot \nabla_X F_0 \left(1 + \frac{iv_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial X_{\parallel}} \right) + \frac{iv_{\parallel}}{\omega \Omega} \nabla \times \mathbf{e}_1 \cdot \nabla_X F_0 \right], \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= c_{\beta} \left[\frac{\mathbf{e}_1}{\Omega} \cdot \nabla_X F_0 \left(-\frac{k_1 v_{\perp}}{\omega} + \frac{iv_{\perp}}{\omega} \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla \times \mathbf{e}_2 \right) + \frac{iv_{\perp} v_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \mathbf{e}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{e}_2 \right] \\ &\quad + s_{\beta} \left[v_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial s} + v_{\perp} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \left(1 + \frac{iv_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial X_{\parallel}} \right) + \frac{\mathbf{e}_2}{\Omega} \right. \\ &\quad \cdot \nabla_X F_0 \left(-\frac{k_1 v_{\perp}}{\omega} + \frac{iv_{\perp}}{\omega} \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla \times \mathbf{e}_2 \right) - \frac{iv_{\perp} v_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{e}_2) \Big] \\ &\quad + u_{\beta} \left[\frac{\mathbf{e}_1}{\Omega} \cdot \nabla_X F_0 \left(1 + \frac{iv_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial X_{\parallel}} \right) - \frac{iv_{\parallel}}{\omega \Omega} \nabla \times \mathbf{e}_2 \cdot \nabla_X F_0 \right], \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_3 &= c_{\beta} \left[\frac{k_1 v_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} + \frac{iv_{\perp}}{\omega \Omega} (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla_X F_0) \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla \times \mathbf{e}_{\parallel} + \frac{iv_{\perp} v_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \mathbf{e}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{e}_{\parallel} \right] \\ &\quad + s_{\beta} \left[\frac{k_2 v_{\parallel} v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} + \frac{iv_{\perp}}{\omega \Omega} (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla_X F_0) \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla \times \mathbf{e}_{\parallel} - \frac{iv_{\perp} v_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \mathbf{e}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{e}_{\parallel} \right] \\ &\quad + u_{\beta} \left[\frac{v_{\parallel}}{\omega \Omega} (k_2 \mathbf{e}_1 - k_1 \mathbf{e}_2) \cdot \nabla_X F_0 - \frac{iv_{\parallel}}{\omega \Omega} \nabla_X F_0 \cdot \nabla \times \mathbf{e}_{\parallel} + v_{\parallel} \frac{\partial F_0}{\partial s} \right], \quad (35) \end{aligned}$$

$$c_{\beta} \equiv \frac{1}{2} [J_{n+1} e^{i(n+1)\beta} + J_{n-1} e^{i(n-1)\beta}], \quad (36)$$

$$s_{\beta} \equiv \frac{1}{2i} [J_{n+1} e^{i(n+1)\beta} - J_{n-1} e^{i(n-1)\beta}], \quad (37)$$

$$u_{\beta} \equiv J_n e^{in\beta}, \quad (38)$$

其中 J 为贝塞耳函数,宗量为 $k_{\perp} v_{\perp} / \Omega$. 现在按下式构造场量的左右旋分量:

$$\delta E_{\pm z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta E_{1z} \pm i\delta E_{2z}), \quad (39)$$

则(32)式可改写成

$$\left\langle \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B} \right) \cdot \nabla F_0 \right\rangle_n = \phi_+ \delta E_{+z} + \phi_- \delta E_{-z} + \phi_3 \delta E_{||z} = \boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_z, \quad (40)$$

其中

$$\phi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 \pm i\phi_2)$$

有以下表达式:

$$\begin{aligned} \phi_{\pm} = & \frac{1}{\sqrt{2}} c_{\beta} \left\{ v_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{s}} + v_{\perp} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \left(1 + \frac{iv_{||}}{\omega} \frac{\partial}{\partial X_{||}} \right) \right. \\ & + \frac{iv_{\perp} v_{||}}{\omega} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \mathbf{e}_2 \cdot \nabla \times (\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2) \\ & + \frac{\mathbf{e}_1}{Q} \cdot \nabla_X F_0 \left[\frac{(k_2 \pm ik_1)v_{\perp}}{\omega} + \frac{iv_{\perp}}{\omega} \mathbf{e}_{||} \cdot \nabla \times (\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2) \right] \Big\} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} s_{\beta} \left\{ \mp iv_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{s}} \mp iv_{\perp} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \left(1 + \frac{iv_{||}}{\omega} \frac{\partial}{\partial X_{||}} \right) \right. \\ & - \frac{iv_{\perp} v_{||}}{\omega} \frac{\partial F_0}{B \partial \mu} \mathbf{e}_1 \cdot \nabla \times (\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2) \\ & + \frac{\mathbf{e}_2}{Q} \cdot \nabla_X F_0 \left[\frac{(k_2 \pm ik_1)v_{\perp}}{\omega} + \frac{iv_{\perp}}{\omega} \mathbf{e}_{||} \cdot \nabla \times (\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2) \right] \Big\} \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}} \mu_{\beta} \frac{\nabla_X F_0}{Q} \cdot \left[(\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2) \left(1 + \frac{iv_{||}}{\omega} \frac{\partial}{\partial X_{||}} \right) + \frac{v_{||}}{\omega} \nabla \times (\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2) \right]. \quad (41) \end{aligned}$$

综合(18)与(40)式得到在迴旋中心位相空间的线性扰动分布函数所满足的动力方程:

$$\langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_n \langle \delta f_g \rangle_n = -\frac{q_i}{m_i} \boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_z - \sum_{n' \neq n} \langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_{nn'} \langle \delta f_g \rangle_{n'}. \quad (42)$$

现在来估计不同谐数耦合项 $\sum_{n' \neq n} \langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_{nn'} \langle \delta f_g \rangle_{n'}$ 的数量级. $\boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_z$ 对不同谐数有相同的数量级. 在 n 次迴旋共振附近, $\omega \simeq nQ$, $\langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_n \sim \max\left(v_{||} \frac{\partial}{\partial X}, \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_d\right)$, $\langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_{nn'} \sim O(\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_d)$, $\langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_{n' \neq n} \sim O(Q)$, $\langle \delta f_g \rangle_{n' \neq n} \sim \frac{q_i}{m_i} \boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_z / \langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_{n'}$ $\sim \frac{q_i}{m_i} \boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_z / O(Q)$. 所以(42)式等号右端第二项与第一项之比有以下数量级: $\langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_{nn'} / \langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_n \sim O(\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_d / Q) \sim O(k_{\perp} \rho^2 / L)$, L 为不均匀特征尺度. 因此在迴旋共振附近, 当 $k_{\perp} \rho \ll L/\rho$ 时, 不同谐数耦合作用可以忽略, 迴旋动力方程可简化成以下形式:

$$\langle \mathcal{L}_{0g} \rangle_n \langle \delta f_g \rangle_n = -\frac{q_i}{m_i} \boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_z. \quad (43)$$

三、在轴对称托卡马克中的应用

在轴对称同轴圆截面托卡马克中, $\frac{\partial}{\partial X_{||}} \rightarrow (B_{\theta}/r B_{\phi}) \partial/\partial \theta = 1/qR \partial/\partial \theta$, 这里 B_{θ} ,

B_φ 分别为角向场和纵场, q 为安全因子. 定义

$$I_a^\theta \equiv \int_a^\theta \frac{qRd\theta}{v_\parallel} [\omega - n(\Omega - \omega_a) - \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_d].$$

从(43)式可解得

$$\langle \delta f_s \rangle_n = -\frac{q_i}{m_i} \exp i I_a^\theta \left\{ \int_a^\theta \frac{qRd\theta'}{v_\parallel} \boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_s \exp(-i I_a^{\theta'}) + \text{const} \right\}. \quad (44)$$

规定 $v_\parallel > 0$ 的方向就是 θ 增加的方向, 对 θ 的积分沿着 $v_\parallel$ 的方向. 飞行粒子可以绕磁力线飞行许多次, 所以 θ 可在很大范围内取值, 即 $-\theta_{M_1} < \theta < \theta_{M_1}, \theta_{M_1}, \theta_{M_2} \gg 1$. 由于粒子间碰撞, 飞行粒子绕磁力线的飞行次数是有限的, 因而 $\langle \delta f_s \rangle_n(\theta = \pm\infty) = 0$. 所以对 $v_\parallel \geq 0$ 的飞行粒子可分别取积分下限 $a = \mp\infty$. 利用上面规定的边条件可定出积分常数等于零, 最后得下列形式的解:

$$\langle \delta f_s \rangle_{n, v_\parallel > 0} = -\frac{q_i}{m_i} \int_{-\infty}^\theta \frac{qRd\theta'}{|v_\parallel|} \boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_s \exp -i I_\theta^{\theta'}, \quad (45)$$

$$\langle \delta f_s \rangle_{n, v_\parallel < 0} = -\frac{q_i}{m_i} \int_\theta^\infty \frac{qRd\theta'}{|v_\parallel|} \boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_s \exp i I_\theta^{\theta'}. \quad (46)$$

注意上两式中的 $I_\theta^{\theta'}$ 有如下的定义:

$$I_\theta^{\theta'} \equiv \int_\theta^{\theta'} \frac{qRd\theta''}{|v_\parallel|} [\omega - n(\Omega - \omega_a) - \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_d]. \quad (47)$$

俘获粒子, 其 θ 变化范围仅限于它的两个迴转点 $\pm\theta_0$ 之内. 具有 $v_\parallel \geq 0$ 的粒子, 其积分下限 a 分别为 $\mp\theta_0$. 粒子在迴转点速度反向时, 应保持分布函数连续, 即当 $\theta = \pm\theta_0$ 时, $\langle \delta f_s \rangle_{n, v_\parallel > 0} = \langle \delta f_s \rangle_{n, v_\parallel < 0}$. 利用此边条件可定出解的积分常数, 最后得

$$\begin{aligned} \langle \delta f_s \rangle_{n, v_\parallel} &= \frac{1}{2} (\langle \delta f_s \rangle_{n, v_\parallel > 0} + \langle \delta f_s \rangle_{n, v_\parallel < 0}) \\ &= -\frac{iq_i}{m_i} \left\{ \cot I_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos I_{-\theta_0}^{\theta_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{qRd\theta'}{|v_\parallel|} \right. \\ &\quad \cdot \left[(\boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_s)_1 \cos I_{-\theta_0}^{\theta_0} + i(\boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_s)_2 \sin I_{-\theta_0}^{\theta_0} \right] \\ &\quad + \cos I_{\theta_0}^{\theta_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{qRd\theta'}{|v_\parallel|} [(\boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_s)_1 \sin I_{-\theta_0}^{\theta_0} - i(\boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_s)_2 \cos I_{-\theta_0}^{\theta_0}] \\ &\quad \left. + \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{qRd\theta'}{|v_\parallel|} [(\boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_s)_1 \sin I_{\theta_0}^{\theta_0} + i(\boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_s)_2 \cos I_{\theta_0}^{\theta_0}] \right\}, \quad (48) \end{aligned}$$

其中已按照 $\boldsymbol{\phi} \cdot \delta \mathbf{E}_s$ 是否依赖 $v_\parallel$ 而被分成两部分, 与 $v_\parallel$ 无关的部分标以脚标 1, 与 $v_\parallel$ 成线性关系的部分标以脚标 2, 并把 $v_\parallel$ 代之以 $|v_\parallel|$. 这样就得到 $(\mathbf{X}, \mathbf{V})$ 位相空间中扰动分布函数的解

$$\delta f(\mathbf{X}, \mathbf{V}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta f_s \rangle_n \exp(-in\alpha) \exp i \int^{\mathbf{x}_\perp} \mathbf{k}_\perp \cdot d\mathbf{X}_\perp, \quad (49)$$

然后利用(2), (3)式的转换关系就得到 $\mathbf{x}$ 空间的扰动分布

$$\delta f(\mathbf{x}, v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta f_s \rangle_n \exp(-in\alpha) \exp i \left[\int^{\mathbf{x}_\perp} \mathbf{k}_\perp \cdot d\mathbf{x}_\perp - \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{e}_\parallel / \Omega \right]. \quad (50)$$

四、结 论

本文参照 Chen 和 Tsai 的方法导出了线性迴旋动力方程。该方程给出了扰动分布函数与扰动电场左旋分量、右旋分量、平行分量在任意频率范围, 特别是在迴旋频率的谐频附近的响应关系。因此它特别适合于研究非均匀等离子体中的射频加热。作为一个例子, 文中给出了轴对称同轴圆截面托卡马克中飞行粒子和俘获粒子扰动分布函数的解。我们将用它来研究粒子的非局域轨道运动对 ICRF 范围波的传播和吸收的影响。

本工作得到等离子体研究会的指导, 深表谢忱。

- [1] L. Chen and S. T. Tsai, *Plasma Phys.*, **25**(1983), 349.
- [2] D. G. Swanson, *Phys. Fluids*, **28**(1985), 2645.
- [3] V. S. Chan, S. C. Chiu, J. Y. Hsu and S. K. Wong, *Nucl. Fusion*, **22**(1982), 787.
- [4] S. C. Chiu and T. K. Mau, *Nucl. Fusion*, **23**(1983), 1613.
- [5] S. C. Chiu, V. S. Chan, J. Y. Hsu, G. E. Guest, R. Prater and J. M. Rawls, *Nucl. Fusion*, **23**(1983), 499.
- [6] S. C. Chiu, *Phys. Fluids*, **28**(1985), 1371.
- [7] J. B. Taylor and J. R. Hastie, *Plasma Phys.*, **10**(1968), 479.
- [8] P. H. Rutherford and E. A. Freeman, *Phys. Fluids*, **11**(1968), 569.
- [9] P. J. Catto, W. M. Tang and D. E. Baldwin, *Plasma Phys.*, **23**(1981), 639.
- [10] X. S. Lee, J. R. Myra and P. J. Catto, *Phys. Fluids*, **26**(1983), 233.
- [11] R. G. Littlejohn, *Phys. Fluids*, **27**(1984), 976.
- [12] S. C. Chiu, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **27**(1985), 1525.
- [13] C. N. Lashmore-Davies and R. O. Dendy, *Phys. Fluids*, **B1**(1989), 1565.

GYROKINETIC EQUATION APPLICABLE TO RADIOFREQUENCY HEATING

CHEN YAN-PING CAI SHI-DONG (TSAI SHIH-TUNG)

Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing, 100080

(Received 19 October 1990)

ABSTRACT

The linear gyrokinetic equation near gyrofrequency in the presentation of three independent electric field components is derived by following the method of Chen and Tsai^[1]. This equation is suitable for investigation of radiofrequency heating in the inhomogeneous plasmas. The solutions of the equation for axisymmetric tokamaks is given.

PACC: 5250; 5235