

大涨落作用下损耗模式 RF-SQUID 磁通跃迁性质的研究

王晓辉 金 新 姚希贤

南京大学物理系, 南京, 210008

1990 年 12 月 18 日收到

本文分析了大涨落作用下损耗模式 RF-SQUID 能够正常工作的条件, 得到了此条件下磁通跃迁的几率密度并由此求出磁通跃迁平均值及其宽度。结果表明: 大的热涨落使 RF-SQUID 环路有效临界电流明显下降, 从而使跃迁点大大提前, 跃迁宽度满足一个普适表达式。

PACC: 7450; 7440

一、引 言

无噪声作用时, 单结 SQUID 的磁通响应曲线可以分为两种类型。如果参数 $B = LI_c/\phi_0 < 1/2\pi$, 响应曲线是单值的。当外磁通 ϕ_x 连续变化时, 全磁通 ϕ_T 也随之连续变化。如果 $B > 1/2\pi$, 响应是多值对应的。当外磁通变化时, 全磁通沿着具有正斜率的支变化。一旦外磁通超过临界值 ϕ_{xc} , 全磁通就会向邻近支发生跃迁, 从而引起能量的损耗。工作在这种模式的 RF-SQUID 称为损耗模式 RF-SQUID。

损耗模式 RF-SQUID 能量曲线上一般存在着多个亚稳态。在热噪声作用下, RF-SQUID 环路所包含的全磁通 ϕ 可以通过热激发穿过势垒而达到另一个亚稳态。因此当外磁通小于 ϕ_{xc} 时, 全磁通 ϕ 也可以在热噪声作用下发生跃迁^[1-4]。

Kurkijarvi 曾仔细研究了涨落较小时单结 SQUID 磁通跃迁的性质。他假定跃迁发生在 ϕ_{xc} 附近, 即 $\phi_x = \phi_{xc}$ 为小量, 又假定全磁通回跳的几率可以忽略, 经过一系列处理, 他得到了跃迁平均值 ϕ'_{xc} 和宽度 σ 。进一步的研究表明, RF-SQUID 的内禀磁通分辨率 δ 与跃迁宽度 σ 成正比, 可表示为

$$\delta \simeq \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \sigma, \quad (1)$$

这里 ω 为射频圆频率。

RF-SQUID 的特性曲线也与跃迁宽度直接有关。 $V_{rf}-I_{rf}$ 的倾斜因子可以表示为

$$\alpha = \sigma/(1 + \sigma). \quad (2)$$

三角波的高度为

$$V = (1 - \alpha)\omega L_T/2M, \quad (3)$$

这里 L_T 为谐振回路的电感, M 为互感。由此可见, 跃迁宽度的确定是讨论器件性质的基础^[1-7, 12]。

高 T_c 氧化物超导体的问世使工作在液氮温区的 RF-SQUID 得以实现^[7-10]。由于这时 $k_B T$ 增大了约 20 倍, 磁通跃迁点对应的 ϕ_x 与 ϕ_{xc} 之差也相应地增大。对典型的参

数, Kurkijarvi 给出的公式已经不适用. 对这种大涨落情形, RF-SQUID 磁通跃迁性质必须重新加以研究.

二、分 析

根据 RSJ 模型和 Josephson 方程, 在重阻尼近似下, 单结 SQUID 能量的无量纲形式可表示为^[3]

$$U = (\phi - \phi_x)^2 - \frac{B}{\pi} \cos 2\pi\phi, \quad (4)$$

这里 U 以 $\phi_0^2/2L$ 为单位, ϕ, ϕ_x 以磁通量子 ϕ_0 为单位. 等式右边第一项为 SQUID 系统的磁能, 第二项为所含 Josephson 结的自由能. 典型曲线如图 1 所示. 由图 1 可见: 对给定的 B , 对应不同的 ϕ_x , U - ϕ 关系曲线有本质的区别. 假定初始态的能量分布为亚

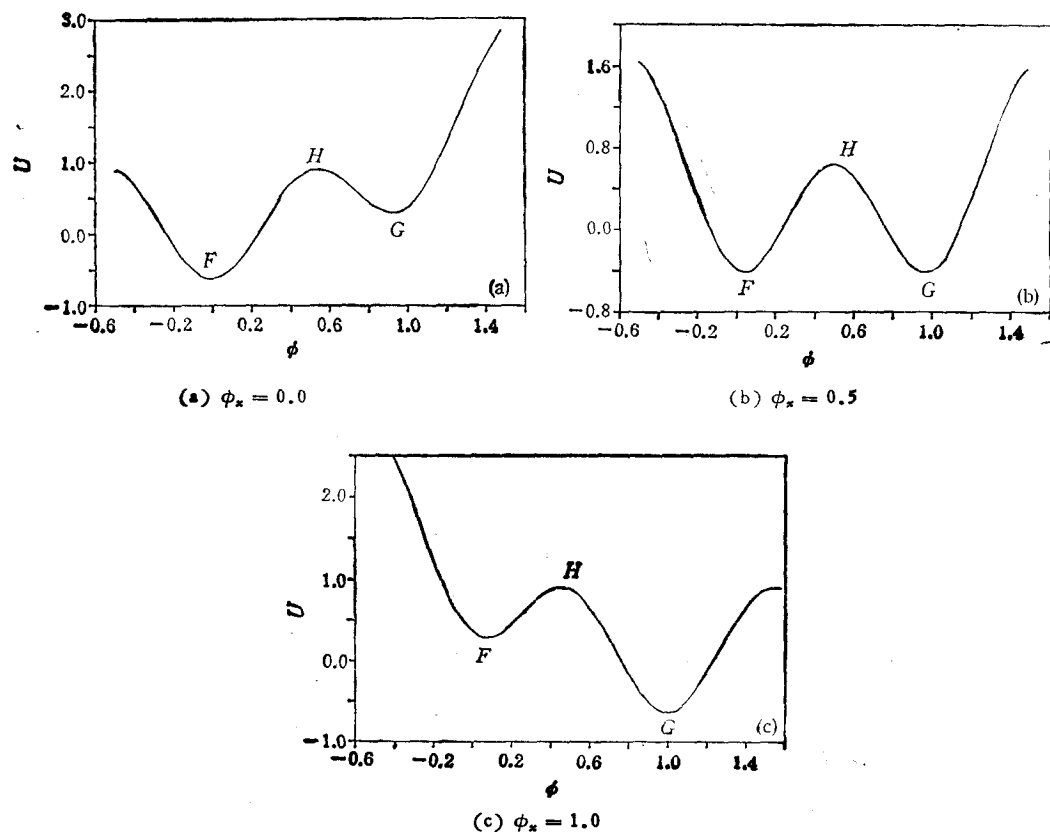


图 1 给定 B, ϕ_x 变化时对应的各种典型 U - ϕ 曲线 $B = 2$

稳态 F 能量最低, 另一亚稳态 G 能量较高, 二者之间有一势垒 H . 当 ϕ_x 增加时, 亚稳态对应的 ϕ 值也增加. 当 $\phi_x = n + 0.5$ 时, 能量曲线呈对称双势阱形. 当 ϕ_x 继续增大时, 亚稳态 G 具有最低的能量. 进一步的分析表明, B 越大, 最大势垒高度 ΔU_m 也越大.

假定系统开始处在亚稳态 F , 在热噪声的作用下可以越过势垒 H 而到达亚稳态 G . 系

统在亚稳态 F 的寿命 τ 可表示为

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} (1 + 2\pi B \cos 2\pi \phi_F) e^{-A\Delta U}, \quad (5)$$

这里 τ 以 L/R 为单位, A 定义为 $\phi_0^2/2Lk_B T$, ϕ_F 满足下式:

$$\phi_F + B \sin 2\pi \phi_F = \phi_x. \quad (6)$$

如果 $A\Delta U_m$ 较小, 使得 τ 小于外磁通在其附近的滞留时间, 那么全磁通的跃迁及回跃过程一直在进行, 从而使磁通响应的迴滞曲线观察不到, 且系统具有很大的噪声, 所以这类环路不适用于实际的 RF-SQUID 系统.

能够正常工作的损耗模式 RF-SQUID, 其磁通响应曲线应该具有较大的迴滞面积. 在大的热噪声作用下, 这就要求 B 足够大. 根据图 1 和方程 (5) 至少应该保证跃迁点对应的 ϕ_x 大于 0.5. 这类 SQUID 环路典型的 ΔU - ϕ_x 关系曲线如图 2 所示.

由方程(5)还可以知道: 寿命相差 e 倍的两种情形对应的 ΔU 之差约为 $1/A$. 如果 $A \geq 10$, ΔU 之差不大于 0.1, 对应的 ϕ_x 之差也为此数量级, 因而磁通跃迁几率较大对应的 ϕ_x 范围较小, 即跃迁有一定的宽度. 当跃迁在 ϕ_{xc} 附近发生时, 系统能量与 ϕ_x 的关系可用小量展开方法得到, 这即为 Kurkijarvi 处理的情形^[2]. 当跃迁点远离 ϕ_{xc} 时, 势垒高度与 ϕ_x 关系的解析表达式无法得到, 但由图 2 可见: 在较小范围内, 势垒高度与 ϕ_x 的关系可用线性函数加以描述, 即

$$\Delta U = -C_1 \phi_x + C_2, \quad (7)$$

这里 C_1, C_2 为与 B 有关的常数. 当 A 略小于 10 时, 上式也近似成立.

在上述情形下系统未发生跃迁的几率可表示为

$$P(t) = \exp \left[- \int_{-\infty}^t \frac{dt'}{\tau} \right]. \quad (8)$$

假定外磁通扫描速度为 $v_x = d\phi_x/dt$, 则上式可改写为

$$P(\phi_x) = \exp \left[- \int_{-\infty}^{\phi_x} \frac{d\phi'_x}{v_x \tau(\phi'_x)} \right]. \quad (9)$$

根据(9)式可直接用数值计算方法求出跃迁几率密度 $dP/d\phi_x$. 对大涨落情形, (7)式成立, 代入(9)式后可得到跃迁几率密度的解析表达式. 在跃迁范围内, 定义

$$\left(\frac{1}{2\pi} + B \cos 2\pi \phi_F \right) / v_x A C_1$$

等于 C 为常数, 得

$$P(x) = \exp \left[\int_{-\infty}^x C e^{-x'} dx' \right], \quad (10)$$

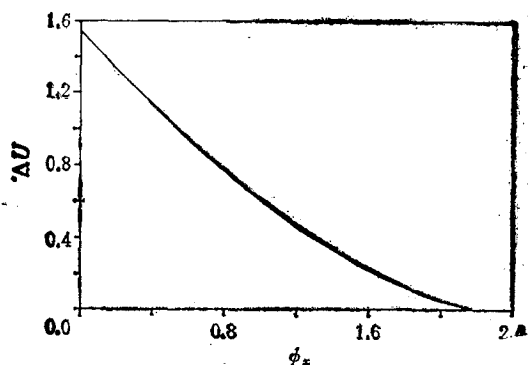


图 2 典型的 ΔU - ϕ_x 关系曲线 $B = 2$

这里 $x = A\Delta U$, (10) 式积分得 $P(x) = \exp(-Ce^{-x})$. (11)

几率密度为 $\frac{dP}{dx} = Ce^{-x} \exp(-Ce^{-x})$. (12)

图 3 同时给出由(12)式和(9)式数值计算得到的几率密度分布曲线。可见 A 较小, B 较大时二者符合得相当好, 因此可用(12)式求出大涨落下磁通跃迁平均值及其宽度, 表达式为

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{dP}{dx} dx, \quad (13)$$

$$\delta x = \sqrt{\bar{x}^2 - \bar{x}^2}, \quad (14)$$

这里 $\bar{x}^2$ 为

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{dP}{dx} dx. \quad (15)$$

对不同的参数 C , 把所得结果示于图 4.

由图 4 可见, 热涨落越大, A 越小, C 越大, $\bar{x}$ 也越大, 即跃迁点距离 ϕ_{sc} 越远, 说明 RF-SQUID 有效临界电流受到热噪声的抑制越明显。精确的跃迁平均值与温度及 SQUID 环路参数之间的关系只能由(9)式通过数值计算给出, 但根据上面的分析, 由(12)式求得的跃迁平均值的数值也有相当的准确性。由图 4 还可发现, 跃迁宽度基本与参数 C 无关, 可以用一个普适的关系式来表示, 即

$$\delta x = 1.26. \quad (16)$$

再由(7)式, 得到用外磁通表示的跃迁宽度为

$$\sigma = 1.26/A \cdot C_1. \quad (17)$$

由此式及 RF-SQUID 的环路参数和工作温度, 即可求出大涨落下的跃迁宽度 σ , 从而进一步分析此器件的特性曲线^[1-7, 12].

如果大涨落下 RF-SQUID 磁通响应曲线存在迴滞, 但迴滞面积较小, 则在热噪声的作用下邻近几个亚稳态都对磁通跃迁产生影响。这类损耗模式 RF-SQUID 的信噪比一般比较低, 理论处理比较复杂, 具体工作尚在进行中。

三、结 论

大涨落作用下损耗模式 RF-SQUID 环路有效临界电流下降, 跃迁宽度满足一个普适关系。用 $A\Delta U$ 表示的这个关系式等式右边的常数不随器件工作温度、Josephson 结

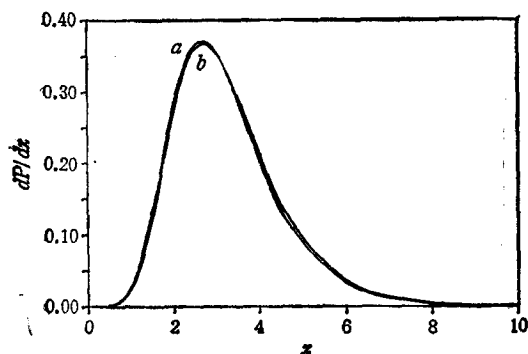


图 3 磁通跃迁几率密度分布曲线 直接数值计算(a) 和解析方法(b)得到的结果基本重合; $x = A\Delta U$; $A = 20; B = 2; v_x = 0.003$

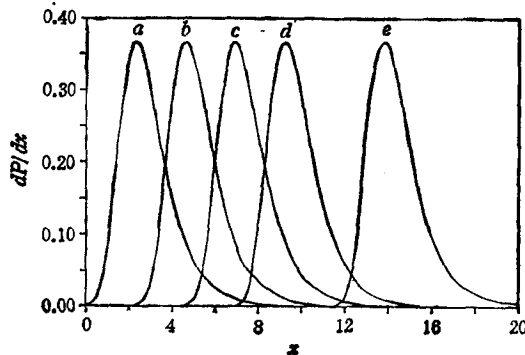


图 4 不同参数下的几率密度分布曲线 $C = 10(a)$; $10^2(b)$; $10^3(c)$; $10^4(d)$; $10^4(e)$

的等效电阻、SQUID 环路的电感、临界电流及外加射频信号频率的变化而变化。对典型的工作在液氮温区的 RF-SQUID, 取 T 为 80K, L 为 2×10^{-10} H, B 等于 2, 则对应的 A 约为 10, C_1 约为 0.7。又射频信号源的频率一般为 20—30MHz, 在 L/R 单位制中, v_x 约为 0.003, 故 C 约为 50, 跃迁平均值对应的 $A\Delta U$ 约为 4, 相应的 ϕ_x 约为 1.2, 等效的 B 值约为 1, 此时磁通跃迁宽度 σ 约为 0.2, 内禀磁通分辨率约为 $3 \times 10^{-5} \phi_0 / \sqrt{\text{Hz}}$, 比对同样参数用 Kurkijarvi 公式得到的值略大, 但小于商业化 RF-SQUID 室温线路引起的磁通噪声, 这同高 T_c 氧化物超导体 RF-SQUID 有关实验结果是一致的^[8-10]。

- [1] A. Barone and G. Paterno, *Physics and Application of the Josephson Effect*, John Wiley & Sons, (1982).
- [2] S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys.*, **15**(1943), 1.
- [3] J. Kurkijarvi, *Phys. Rev.*, **B6**(1972), 832.
- [4] H. Grabert, IC-SQUID 85, (1985), p. 289.
- [5] L. D. Jackel and R. A. Buhrman, *J. Low Temp. Phys.*, **19**(1975), 201.
- [6] J. Kurkijarvi and W. W. Webb, *Proceedings of the Applied Superconductivity Conference*, Annapolis, **May** (1972), pp. 581—587.
- [7] J. Kurkijarvi, *J. Appl. Phys.*, **44**(1973), 3729.
- [8] J. E. Zimmerman, J. A. Beall, M. W. Cromer and R. H. Ono, *Appl. Phys. Lett.*, **51**(8) (1987), 617.
- [9] C. E. Gough, *Physica*, **C153—155**(1988), 1569.
- [10] V. N. Polushkin and B. V. Vasiliev, *Mod. Phys. Lett.*, **B3**(17) (1989), 1327.
- [11] V. M. Zakosarenko, E. V. Ilychov and V. A. Tulin, *IEEE Trans. Magn.*, **25**(2) (1989), 946.
- [12] X. H. Wang, X. Jin and X. X. Yao, in *Proceedings of ICEC-13*.

FLUX TRANSITION PROPERTIES OF RF-SQUID IN THE DISSIPATIVE MODE IN THE PRESENCE OF LARGE FLUCTUATION

WANG XIAO-HUI JIN XIN YAO XI-XIAN

Department of Physics, Nanjing University, Nanjing, 210008

(Received 18 December 1990)

ABSTRACT

In the presence of large thermal fluctuation, conditions that RF-SQUID in the dissipative mode can be properly operated are analysed, the flux transition distribution densities are obtained, thus the mean value and the width of transition are derived. Finally we find that the effective critical current of RF-SQUID loop is greatly reduced by large fluctuation and the transition width can be determined with a simple equation.

PACC: 7450; 7440