

带电粒子在空间关联的湍动静电场中 扩散行为的粒子模拟*

胡 希 伟

中国科学技术大学近代物理系, 合肥, 230026

1991 年 1 月 3 日收到

本文用 Monte-Carlo 方法模拟具有一维高斯型空间关联函数的湍动静电场, 在此基础上通过积分带电粒子在该湍动电场中的运动方程, 得到粒子系的相对扩散和绝对扩散的演化过程。所得模拟结果不但定性的与解析理论^[1,2]一致, 而且定量符合也令人满意。

PACC: 5225F; 5265

一、引 言

粒子在湍动介质中的运动是历史悠久的研究课题。对于完全无规(白噪声)的湍动场, 当粒子的速度是无规变化时, 粒子的行为可用空间的扩散来描述, 其绝对扩散 $\langle (x(t) - x(0))^2 \rangle \propto t$, 扩散系数是常数(如布朗运动)。当粒子受到的作用力是无规时, 粒子运动表现为在速度空间的随时间线性增长的扩散, 而在坐标空间其绝对扩散正比于 t^3 。在有空间关联的湍动场中, 间距小于场空间关联长度的粒子群由于受到相似的随机力作用, 有聚集成团的趋势(即 clumps 效应)。为了描述这种现象, 引入相邻粒子的相对扩散的概念。这时相对扩散对相邻粒子的初始间距及相对速度的大小很敏感。在具有时间关联的湍动场中, 粒子运动的典型特征至今尚不完全清楚, 只知道它们不但与粒子的初始位置和速度的取值有关, 而且与随机场的初始状态以及它和粒子初始位置、速度的关联有关。目前在一类称为色噪声的问题中, 时间相关的湍动力对体系稳定性的影响被较多地研究^[1]。本文将不涉及时间相关的湍动场。

带电粒子在空间关联湍动电场中的扩散行为首先为 Dupree^[2] 及 Kadomtsev, Pogutse^[3] 研究, 他们指出在空间相关湍动静电场中, 粒子的相对扩散要比在空间不相关(白噪声)湍动静电场中的相对扩散小很多, 这就是所谓的 clumps 效应。此后 Misguich, Balescu^[4], Suzuki^[5] 仔细地研究了这个问题, 得到关于相对扩散的一个三阶非线性微分方程。通过分段作近似和数值解他们给出了相对扩散的一个较清晰的演化图象: 一开始相对扩散随 t^3 上升(此时粒子间距小于关联长度); 然后转入 $\exp(t)$ 型的快速非线性增长(这时粒子间距接近或超过关联长度); 最后由于粒子间距大大超过场的关联长度, 相对

* 国家自然科学基金资助的课题。

扩散趋向于空间不相关的随机电场中的相对扩散行为, 即随 t^2 增长。

在导出相对扩散的非线性微分方程时, 文献[4]和文献[5]都对湍动静电场的空间关联函数或其相应功率谱(波矢谱)的形式作了特殊的规定。而在聚变等离子体或空间等离子体中的湍动电场往往有复杂的不同于理论模型的空间关联(波矢谱), 为了能研究具有任意关联函数或波矢谱的湍动电场中的粒子运动行为, 本文发展一种 Monte-Carlo 模拟方法, 并把模拟计算得到的相对扩散及其特征时间与已有的解析理论^[4,5]作比较, 以验证这种新模拟方法的正确性。

二、随机场的 Monte-Carlo 模拟

粒子在湍动场中的运动可以用 Langevin 方程来描述

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t),$$

其中 \mathbf{G} 是决定性的力, \mathbf{f} 是随机力, 一般令

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_1), t_1) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_2), t_2) \rangle = \mathbf{S}(\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2); t_1, t_2),$$

其中 $\langle \rangle$ 表示对系综求平均; \mathbf{S} 是二阶空间和时间关联张量。 \mathbf{f} 的高阶关联也存在, 但目前的实验和理论水平还不足以测量和研究高阶关联的性质。

由于 \mathbf{f} 的随机性, 直接对运动方程作解析研究很困难。而在对上述 Langevin 方程作粒子轨道的计算机模拟时, 关键是需要事先知道 \mathbf{f} 的时空序列。当然, \mathbf{f} 可以直接取自实验上测量到的时空信号集。但在多数情况中只能得到有关 \mathbf{f} 的波矢谱和频谱的资料; 而在理论研究中又往往预先假定 \mathbf{f} 的二阶关联为某种易于作解析处理的特定函数(如 δ 型, 高斯分布型或指数衰减型)。于是为了与实验或解析结果作比较, 在粒子模拟中就需要由已给定的谱或关联函数来求出相应的随机场 \mathbf{f} 。本文用下面的 Monte-Carlo 方法^[6]来得到所需的随机场。

为了简单, 取一维空间体系并只考虑时、空互不相关的湍动场

$$f(\mathbf{x}(t), t) = f(\mathbf{x})T(t).$$

假定 $f(\mathbf{x})$ 是平稳随机过程, $T(t)$ 是高斯白噪声, 即

$$\langle f(x_1)f(x_2) \rangle = R(r), \quad \langle T(t_1)T(t_2) \rangle = t_c \delta(\tau),$$

其中 $r = x_2 - x_1$, $\tau = t_2 - t_1$ 。 $f(\mathbf{x})$ 可以用下列方法从自关联函数 $R(r)$ 或其傅氏变换波矢谱 $\phi(k)$ 得出

$$\phi(k) = 2 \int_0^{\infty} R(x) \cos kx dx. \quad (1)$$

令

$$f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x') I(x - x') dx', \quad (2)$$

其中 $I(\mathbf{x})$ 是标准(均值为零, 均方差为 1)高斯分布白噪声, 它和另一个高斯白噪声 $T(t)$ (均值为零, 均方差为 t_c) 都可以利用伪随机数产生器在计算机中产生。 $h(\mathbf{x})$ 称为系统的

响应函数,它的傅氏变换 $H(k)$ 和波矢谱有关,

$$\phi(k) = |H(k)|^2. \quad (3)$$

所以如果令

$$H(k) = \sqrt{\phi(k)}, \quad (4)$$

就可以在准确到相因数的范围内模拟关联函数为 $R(r)$ 或波矢谱为 $\phi(k)$ 的湍动场 f .

这样,在本模拟中需要二个彼此独立的随机数列 $I(x)$ 和 $T(t)$, 分别用于空间和时间的 Monte-Carlo 模拟. 对于 $I(x)$, 要求有足够好的统计性能;对于 $T(t)$, 要求有足够长度. 经过反复检验,我们认为已有的乘同余法和混合同余法伪随机数产生器都不能满足要求. 为此,我们自行编辑了两个可以在个人微机(32位)上运行的高质量伪随机数产生器. 一个是把两个不同的乘同余法产生器组合起来的伪随机数产生器^[7], 它在对空间关联随机场的模拟中明显优于单个乘同余法产生器. 另一个是 Tausworth 型的非线性伪随机数产生器^[8,9], 它在原则上可以有 10^{50} 的长度(一般乘同余法产生器在 32 位微机上只能产生 10^6-10^7 个独立随机数). 在本计算中曾用到过 10^9 个随机数,而没有发现明显的相关现象.

三、高斯型空间关联湍动场中的相对扩散

取一维模拟体系 $[0, L]$, 带电粒子在随机静电场中的运动方程为

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{q}{m} E(x, t), \quad (5)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = V(t), \quad (6)$$

其中 q, m 分别是粒子的电荷和质量,随机电场 $E(x, t)$ 分布于 $[0, L]$ 上,并满足

$$\langle E(x, t) \rangle = 0, \quad (7)$$

$$\langle E(x, t) E(x+r, t+\tau) \rangle = E_0^2 t_c \delta(\tau) \exp[-r^2/l_c^2]. \quad (8)$$

这表明 $E(x, t)$ 是时间上的白噪声过程,空间关联为高斯型随机电场. 其中 t_c, l_c 分别是特征的关联时间和关联长度,在模拟计算中也取成时间和长度单位. 在计算中,湍动场的强度 E_0 用参数 $A = qE_0/m$ 来代表.

在得到对应于(7)和(8)式的随机场 $E(x, t)$ 后,用普通的差分法可以对运动方程(5)和(6)式积分,然后计算各时刻 t 的相对扩散

$$Z_r(t) = \langle \Delta r_x^2(t) \rangle = \langle r_x^2(t) \rangle - \langle r_x(t) \rangle^2, \quad (9)$$

其中平均 $\langle \rangle$ 是对体系中所有粒子对作的, M 是粒子对的总数. $r_x = x_1 - x_2$ 是相邻粒子(一对粒子)的间距,在 $t=0$ 时粒子对中的第一个粒子均匀地置于 $[0, L]$ 中,第二个粒子位置为 $x_2(0) = x_1(0) + r_0$, r_0 是粒子对的初始间距.

为了比较,还计算了粒子系的绝对扩散 $W(t)$ 及粒子在空间不相关随机场中的相对扩散 $Z_{un}(t)$,

$$W(t) = \langle (x(t) - x(0))^2 \rangle - \langle x(t) - x(0) \rangle^2, \quad (10)$$

$$Z_{un}(t) = \langle \Delta r_x(t) \rangle_{un}, \quad (11)$$

其中平均 $\langle \rangle$ 是对体系中所有 N 个粒子作的, $\langle \rangle_{un}$ 表示计算时用的是白噪声型的空间随机场。

在下面的计算中,取 $L = 10l_c$, M 为800到1024, N 为1024到2048。粒子的初速度全部取成零。在开始积分后,粒子的位置可能会超出 $[0, L]$,在作下一步积分时,把位于 $[0, L]$ 之外的粒子所受的随机场力按周期性边条件取成 $[0, L]$ 间对应位置上的值。

图1是典型的粒子模拟结果。在 $A = 0.5$ 时分别给出无关联扩散 $Z_{un}(t)$,绝对扩散 $W(t)$ 和三个不同 r_0 值的相对扩散 $Z_r(t)$ 的演化曲线。其中的时间和扩散量都是用 t_c 和 l_c 无量纲化后的值,可以看到

1. 在 t 很小和 $t \gg 1$ 时,均有

$$Z_r(t) \propto t^3.$$

在这两个极限之间, Z_r 非线性地从一个极限过渡到另一极限。非线性演化是单调的,而且有一段明显的指数型增长过程。

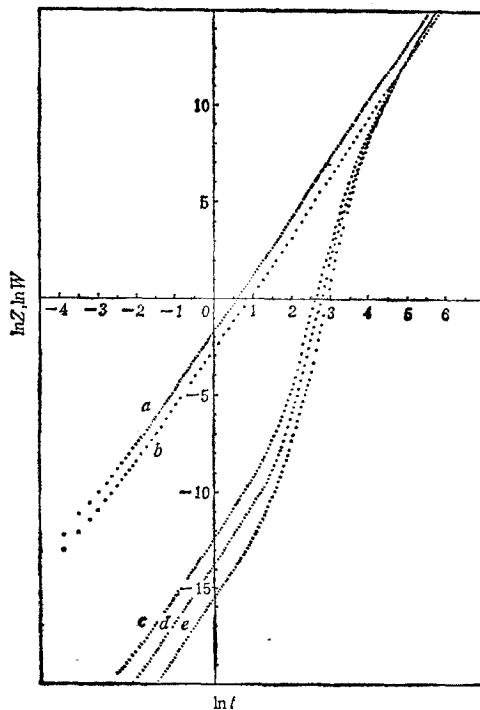


图1 典型的扩散演化曲线 $A = 0.5$ 时的不相关相对扩散 $Z_{un}(t)$ (曲线a),绝对扩散 $W(t)$ (曲线b), $r_0 = 0.005$ (曲线c), $r_0 = 0.0025$ (曲线d), $r_0 = 0.001$ (曲线e)的相对扩散 $Z_r(t)$

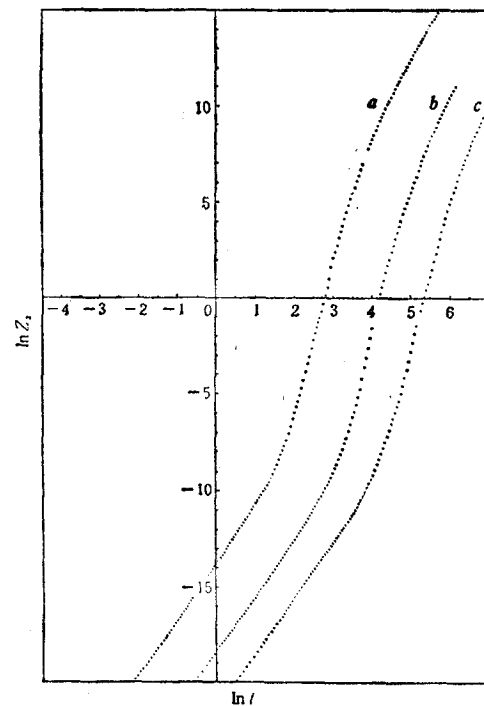


图2 湍动电场强度对相对扩散的影响 $r_0 = 0.0025$, 曲线a为 $A = 0.5$,曲线b为 $A = 0.05$,曲线c为 $A = 0.01$

2. 绝对扩散 $W(t)$ 和不相关相对扩散有完全相同的时间行为: t^3 ,但是 $W(t)$ 总是小于 $Z_{un}(t)$ 。在 $t \gg 1$ 时, $Z_r(t)$ 明显地趋于 $Z_{un}(t)$ 而不是 $W(t)$ 。

3. 在湍动电场强度 $A(E_0)$ 相同时, r_0 不同主要是影响 $Z_r(t) < 1$ 时的行为(r_0 小的 $Z_r(t)$ 值也低),而对 $Z_r > 1$ 的行为基本无影响。当 $t \gg 1$ 时,不论 r_0 取什么值,

$Z_x(t)$ 都趋向同一个 $Z_{un}(t)$ 。

图 2 显示 r_0 固定时, $Z_x(t)$ 随场强 A 的变化。随着场强的增大, $Z_x(t)$ 和 $Z_{un}(t)$ 的整个演化曲线都向上明显地平移。由模拟结果可以得到下面的定标关系:

$$Z_{un}(t) \propto A^2 \propto E_0^2. \quad (12)$$

这些模拟结果与文献[4,5]得到的定性图像完全一致,而且给出明确的参量依赖关系。

在文献[4]和文献[5]中还给出两个特征时间,一个是所谓的 clumps 寿命 t_{cl} , 它由 $Z_x(t_{cl}) = 1$ 来定出,

$$t_{cl} = t_0 \ln(l_c^2/r_0^2), \quad (13)$$

其中 $t_0 = [l_c^2/4t_c A^2]$ 称为扩散时间。另一个是表征无相关相对扩散的时间 t_{un} , 它由 $Z_{un}(t_{un}) = 1$ 定出

$$t_{un} = 3^{1/3} t_0. \quad (14)$$

表 1 给出由(13),(14)式算出的 t_{cl} , t_{un} 理论值和由模拟计算定出的相应值,并给出模拟值对理论值的相对偏差。一般这种偏差在(20—30)%, 对于 Monte-Carlo 方法而言, 这样的偏差是可以接受的。

表 1

A	r_0	t_{cl}			t_{un}		
		模 拟	理 论	偏差(%)	模 拟	理 论	偏差(%)
0.5	0.001	19.05	13.82	37.8	1.86	1.44	29.2
0.5	0.0025	15.64	11.98	30.6	1.80	1.44	25.0
0.5	0.005	14.16	10.60	33.6	1.77	1.44	22.9
0.05	0.0025	64.93	55.63	16.7	8.48	6.69	26.8
0.01	0.0025	208.05	162.61	27.9	24.68	19.57	26.1

四、结 论

本文采用 Monte-Carlo 法直接模拟具有高斯型空间关联和白噪声时间关联的湍动静电场, 并把它用来计算带电粒子在此湍动电场中的相对扩散和绝对扩散。模拟结果不但再现了解析理论预言的相对扩散时间行为, 而且得到了在定量上基本相符的扩散特征时间 t_{cl} , t_{un} 。这说明本文采用的模拟方法是成功的。

本文虽然只模拟高斯型空间关联的随机场, 但是这个方法可以模拟具有任意形式空间关联的一维随机场, 也可以推广到多维和电磁湍动场的情况, 因此可以用来研究更广泛、更实际的湍动场中的粒子扩散及其它有关的物理问题。

作者在编制伪随机数产生器时得到过李有宜教授、相维絨博士及李新的帮助, 贺贤士教授提供了热情的帮助, 在此一并致谢。

[1] J. Casademunt, J. I. Jimenez-Aquino, J. M. Sancho, *Phys. Rev.*, **40**(1989), 5905.

- [2] T. H. Dupree, *Phys. Rev. Lett.*, 25(1967), 789.
[3] B. B. Kadomtsev, O. P. Pogutse, *Phys. Rev. Lett.*, 25(1970), 1155.
[4] J. H. Misguich, R. Balescu, *Plasma Physics*, 24(1982), 289.
[5] M. Suzuki, *Progr. Theor. Phys.*, 71(1984), 267.
[6] G. H. Fichtl, M. Perlmutter; W. Frost, *Handbook of Turbulence*, Vol. 1, eds. W. Frost, T. H. Moulden Plenum Press, New York and London, (1977), p. 433.
[7] 程兴新、曹敏, 统计学方法, 北京大学出版社, (1989), p. 43.
[8] T. G. Lewis, W. H. Payne, *J. ACM*, 20(1973), 456.
[9] R. C. Tausworth, *Math. Comput.*, 19(1965), 201.

A SIMULATION OF DIFFUSION OF CHARGED PARTICLES IN A SPACE CORRELATION TURBULENT ELECTRIC FIELD

HU XI-WEI

Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026

(Received 3 January 1991)

ABSTRACT

A Monte-Carlo method is used to simulate the turbulent electrostatic field with space correlation. Evolution processes of relative and absolute diffusions of charged particles in this turbulent field can be obtained by integrating equations of motion of the particles. Simulation results agree well with the analytic theories^[4,5] both qualitatively and semi-quantitatively.

PACC: 5225F; 5265