

# 微扰法解由正弦波驱动的非线性 漂移波的分岔\*

贺 凯 芬

北京师范大学低能核物理研究所, 北京, 100875

胡 岗

北京师范大学物理系, 北京, 100875

1991 年 1 月 7 日收到

在以驱动波相速度运动的坐标系中, 用微扰法讨论. 在正弦波驱动下的非线性漂移波的分波方程. 结果表明, 在文献 [1] 中观察到的波包能量的滞后分岔和由定态向周期态的分岔可以统一地解析描述, 它们分别对应某一非线性共振模式在时间维上的鞍结点分岔和 Hopf 分岔. 波包能量失稳的频率是该模式的本征频率, 除多普勒移动外, 它的大小还因非线性效应而不同于其在实验室坐标系中的线性值.

PACC: 5235

## 一、引 言

近年来, 同时涉及时间和空间行为的系统的分岔、混沌和湍流问题已经成为非线性领域的中心问题之一, 这类课题在流体、等离子体和其它许多领域中有重要的理论和实际意义. 已经有一些文献对不同的偏微分方程作了数值模拟研究, 其中有的讨论了由时间周期场驱动的偏微分方程, 如正弦 Gordon 方程<sup>[3,4]</sup>, 非线性 Schrödinger 方程<sup>[5]</sup>等. 为研究非均匀磁化等离子体中的漂移波湍流, 在文 [1, 2] 中我们对非线性漂移波方程<sup>[6]</sup>引进时空周期场的扰动  $\varepsilon \sin(\kappa x - \Omega t)$ , 它描写漂移孤立波受到外来行波的扰动后的行为. 再引入耗散, 给出以下方程:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \partial x^2} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\gamma \varphi - \varepsilon \sin(\kappa x - \Omega t), \quad (1)$$

式中  $c$  是线性漂移速度, 三次导数项来自等离子体的极化漂移, 非线性项源于等离子体的温度梯度. 文献 [1] 在  $2\pi$  周期边界条件和  $\kappa = 1$  的参数下对方程 (1) 作了数值模拟. 从计算机实验发现, 波的能量

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[ \varphi^2(x, t) - a \left( \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2)$$

\* 高等学校博士学科点专项科研基金和中国科学院理论物理研究所开放课题资助的项目.

在  $(Q, \varepsilon)$  参数平面的某些区域存在定态, 它们在一定条件下组成滞后回线. 通过改变控制参数, 定态也可能失稳到周期振荡, 甚至出现混沌运动, 对应于能量  $E(t)$  的定态,  $\varphi(x, t)$  是以相速  $Q$  运动的行波. 进一步的数值研究还表明,  $\varphi(x, t)$  存在时间混沌而空间有规的解, 也存在时空都无规的湍性解<sup>[7]</sup>.

从计算机实验揭示出方程 (1) 动力学行为的丰富现象, 给人们提出许多问题, 例如, 能量  $E(t)$  作为方程解  $\varphi(x, t)$  的空间积分, 它的定态失稳与  $\varphi(x, t)$  (或它的各个模式) 的行为有什么联系; 失稳的频率是怎样产生的; 运动是怎样发展到时空湍流的, 等等. 作为第一步, 本文仅讨论从定态能量的第一次分岔, 在偏微分方程中对这类分岔迄今还没有令人满意的解析结果.

本文将用有限个模式的分波方程求解方程 (1) 的定态, 在以驱动波相速度运动的坐标系中, 导出各个模式定态的微扰的本征方程; 并给出求解本征方程的结果, 表明在驱动波相速度  $Q$  和强度  $\varepsilon$  的一定范围内, 存在一个非线性共振模式, 由它的本征值可以确定波包能量  $E(t)$  的定态的分岔行为, 如从定态失稳到周期运动, 从周期运动稳定化到定态, 以及出现滞后分岔等.

## 二、行波解与微扰方法

将方程 (1) 变换到以驱动波相速度  $Q$  运动的坐标系统. 令  $(\kappa = 1, \text{下同})$

$$\xi = x - Qt, \quad \tau = t,$$

则 (1) 式化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \varphi + a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right] - Q \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \varphi + a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right] + c \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + f \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ = -\gamma \varphi - \varepsilon \sin \xi. \end{aligned} \quad (3)$$

$\frac{\partial}{\partial \tau} [\ ] = 0$  给出行波解  $\varphi_0(\xi)$  满足的方程

$$-Q \frac{d}{d\xi} \left[ \varphi_0 + a \frac{d^2 \varphi_0}{d\xi^2} \right] + c \frac{d\varphi_0}{d\xi} + f \varphi_0 \frac{d\varphi_0}{d\xi} = -\gamma \varphi_0 - \varepsilon \sin \xi. \quad (4)$$

在  $2\pi$  周期边界条件下,  $\varphi_0(\xi)$  可写作

$$\varphi_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\xi + \theta_n), \quad (5)$$

代入 (4) 式, 得到各分波振幅  $A_n$ , 位相  $\theta_n$  满足的无穷阶耦合的非线性代数方程组,

$$\begin{aligned} -n[c - (1 - an^2)Q]A_n \sin \theta_n \\ - \frac{f}{4} \left\{ \sum_{l+l'=n} (l+l')A_l A_{l'} \sin(\theta_l + \theta_{l'}) + \sum_{|l-l'|=n} (l-l')A_l A_{l'} \sin(\theta_l - \theta_{l'}) \right\} \\ + \gamma A_n \cos \theta_n = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} -n[c - (1 - an^2)Q]A_n \cos \theta_n \\ - \frac{f}{4} \left\{ \sum_{l+l'=n} (l+l')A_l A_{l'} \cos(\theta_l + \theta_{l'}) + \sum_{|l-l'|=n} |l-l'|A_l A_{l'} \cos(\theta_l - \theta_{l'}) \right\} \\ - \gamma A_n \sin \theta_n + \varepsilon \delta_{1,n} = 0. \quad (n = 1, 2, \dots, \infty), \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$\delta_{i,n} = \begin{cases} 1 & (n=1); \\ 0 & (n \neq 1). \end{cases}$$

方程组(6),(7)在恰当的截断下求解,得到  $\varphi_0(\xi)$  的近似解. 在此基础上讨论它可能出现的分岔, 应回到方程(3). 由于  $2\pi$  周期边条件的限制, 波矢量仅能取离散值  $n$ , 其它频率只可能在时间维上出现, 这导致我们假设方程有如下形式的扰动解:

$$\varphi(\xi, \tau) = \varphi_0(\xi) + \delta\varphi(\xi)e^{i\tau}, \quad (8)$$

$\delta\varphi(\xi)$  要满足周期边条件. 将上式代入方程(3), 得到关于  $\delta\varphi(\xi)$  的线性化方程

$$\begin{aligned} (\lambda + \gamma)\delta\varphi + a\lambda \frac{d^2\delta\varphi}{d\xi^2} - aQ \frac{d^3\delta\varphi}{d\xi^3} + [c - Q + f\varphi_0(\xi)] \frac{d\delta\varphi}{d\xi} \\ + f \frac{d\varphi_0(\xi)}{d\xi} \delta\varphi = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

将  $\delta\varphi(\xi)$  展开为

$$\delta\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \cos(n\xi + \alpha_n), \quad (10)$$

把(10)式和  $\varphi_0(\xi)$  的级数展开(5)式同时代入(9)式, 整理后得到空间微扰  $\delta\varphi(\xi)$  的振幅  $\delta_n$  和相角  $\alpha_n$  的分波方程

$$\begin{aligned} [\gamma + \lambda(1 - an^2)]\delta_n \cos \alpha_n - [c - (1 - an^2)Q]n\delta_n \sin \alpha_n \\ - \frac{f}{2} \sum_{l+l'=n} (l+l')A_l \delta_{l'} \{ \sin \theta_l \cos \alpha_{l'} + \cos \theta_l \sin \alpha_{l'} \} \\ - \frac{f}{2} \sum_{l-l'=n} (l-l')A_l \delta_{l'} \{ \sin \theta_l \cos \alpha_{l'} - \cos \theta_l \sin \alpha_{l'} \} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} [\gamma + \lambda(1 - an^2)]\delta_n \sin \alpha_n - [c - (1 - an^2)Q]n\delta_n \cos \alpha_n \\ - \frac{f}{2} \sum_{l+l'=n} (l+l')A_l \delta_{l'} \{ \cos \theta_l \cos \alpha_{l'} - \sin \theta_l \sin \alpha_{l'} \} \\ - \frac{f}{2} \sum_{l-l'=n} (l-l')A_l \delta_{l'} \{ \cos \theta_l \cos \alpha_{l'} + \sin \theta_l \sin \alpha_{l'} \} = 0 \quad (n=1, 2, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $\{A_n, \theta_n\}$  已从方程(6),(7)解出.

当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 所有模式都被阻尼,  $\{A_n\} \rightarrow 0$ , (11), (12)式中各个模式解耦, 可求出模式  $n$  的线性本征值, 它们是一对共轭复数,

$$\lambda_n^{(0)} = \frac{1}{1 - an^2} [-\gamma \pm i(c - (1 - an^2)Q)n], \quad (13)$$

其中虚部

$$\omega_n^{(0)} = \pm \frac{[c - (1 - an^2)Q]n}{1 - an^2} \quad (14)$$

正是模式  $n$  在以相速  $Q$  运动的坐标系中的线性本征频率. 由于  $a < 0$  (物理上要求的),  $-\gamma < 0$ , 所有模式都是线性稳定的.

当驱动强度  $\varepsilon$  不等于零时, 方程(1)的非线性将通过定态解  $\{A_n, \theta_n\}$  影响(11), (12)式的分岔行为. 令  $X_n \equiv A_n \cos \theta_n$ ,  $Y_n \equiv A_n \sin \theta_n$ ,  $x_n \equiv \delta_n \cos \alpha_n$ ,  $y_n \equiv \delta_n \sin \alpha_n$ ,

方程 (11), (12) 可写作关于  $\{x_n, y_n\} (n = 1, 2, \dots, \infty)$  的齐次线性代数方程组, 有解条件是它们的系数行列式为零, 这导致以下的本征方程:

$$H - \lambda I = 0, \quad (15)$$

式中  $I$  是单位矩阵, 矩阵  $H$  的元素定义为: 当  $m = n$  时,

$$H_{2n-1, 2m-1} = H_{2n, 2m} = -\gamma/(1 - an^2),$$

$$H_{2n-1, 2m} = -H_{2n, 2m-1} = n[c/(1 - an^2) - Q];$$

当  $m > n$  时,

$$H_{2n-1, 2m-1} = fn(-Y_{m-n} + Y_{m+n})/[2(1 - an^2)],$$

$$H_{2n, 2m} = -fn(Y_{m-1} + Y_{m+n})/[2(1 - an^2)],$$

$$H_{2n-1, 2m} = -fn(-X_{m-n} + X_{m+n})/[2(1 - an^2)],$$

$$H_{2n, 2m-1} = -fn(X_{m-n} + X_{m+n})/[2(1 - an^2)];$$

当  $m < n$  时,

$$H_{2n-1, 2m-1} = H_{2n, 2m} = fnY_{n-m}/[2(1 - an^2)],$$

$$H_{2n-1, 2m} = -H_{2n, 2m-1} = fnX_{n-m}/[2(1 - an^2)] \quad (n, m = 1, 2, \dots, \infty).$$

在恰当截断下求解本征方程 (15) 可以提供在微扰下各模式分岔的信息.

### 三、共振模式的非线性失稳

在本文的参数范围内, 振幅  $A_n$  在大  $n$  时迅速衰减, 这样, 截断到 5 个模式求解方程组 (6), (7) 和本征方程 (15). 为与计算机实验结果比较, 所有参数都与文献 [1] 同,  $c = 1$ ,  $a = -0.28711$ ,  $f = -6.0$ ,  $\gamma = 0.1$ .  $Q$  的取值范围为 0.46—0.65, 这对应于在  $(Q, \varepsilon)$  空间中方程 (1) 的动力学行为显示的超级结构的最大元胞, 在这个范围内的分岔行为研究得最仔细<sup>[1,7]</sup>.  $\varepsilon$  的取值范围控制在使相应的能量  $E(t)$  位于其滞后回线的下半分支. 对每一组  $(Q, \varepsilon)$  值, 先从 (6), (7) 式求解  $\{A_n, \theta_n\}$  (或  $\{X_n, Y_n\}$ ), 将结果代入 (15) 式, 求出在相同参数下的本征值  $\lambda_n (n = 1, 2, \dots, 5)$ . 各个模式的本征值从  $\varepsilon = 0$  的线性值 (13) 式开始变化, 如上所述, 改变  $\varepsilon$  的值将通过非零的  $\{X_n, Y_n\}$  显示出非线性对矩阵  $H$  的本征值的影响. 从本征值计算可得到如下一些结果.

1. 在  $(Q, \varepsilon)$  的一定范围内, 存在一个非线性共振模式.

图 1 给出  $Q = 0.60$  时模式  $n = 1-5$  的复共轭本征值的实部  $\lambda_r^{(n)}$  随  $\varepsilon$  的变化. 前面提到, 在  $\varepsilon = 0$  时,  $\lambda_r^{(n)}$  为负值, 所有模式都是线性稳定的. 从图 1 看到, 随  $\varepsilon$  增加, 模式 2 的本征值实部  $\lambda_r^{(2)}$  开始由负变正, 同时其它 4 个模式的  $\lambda_r^{(n)}$  仍维持负值. 图 2 给出对于  $Q$  的若干个值模式 2 的复共轭本征值实部  $\lambda_r^{(2)}$  随  $\varepsilon$  的变化, 它们都在  $\varepsilon$  的一定范围内有峰. 这表明在这一参数范围模式 2 可以有效地吸收驱动波的能量, 是共振模式. 在文献 [1] 中也观察到在这个  $(Q, \varepsilon)$  范围内, 解  $\varphi$  的时间谱中,  $n = 2$  的谱线随  $\varepsilon$  增加很快, 甚至可以超过  $n = 1$  的谱强度, 相图  $\varphi - \partial\varphi/\partial x$  则表现为 2 周 (见文献 [1] 中图 3(b), 图 14).

2. 共振模式的 Hopf 分岔和逆 Hopf 分岔引起波包能量  $E(t)$  的定态向周期运动失稳和从周期运动稳定化到定态,  $E(t)$  失稳的频率就是共振模式失稳时的频率.

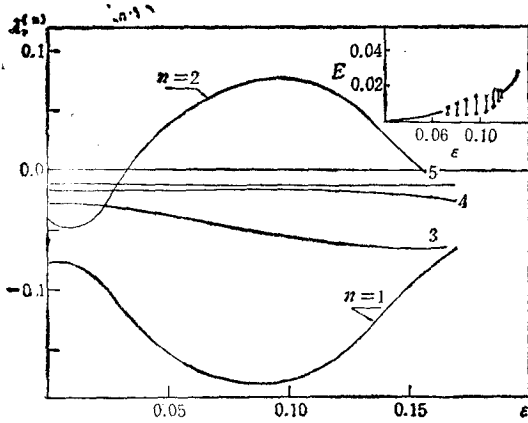


图 1  $\Omega = 0.60$  时模式  $n = 1-5$  的复共轭本征值的实部  $\lambda_1^{(2)}$  随  $\varepsilon$  的变化 图中右上角的小图是  $\Omega = 0.59$  时能量  $E(t)$  随  $\varepsilon$  的变化,  $\circ$  表示  $E$  从定态失稳到周期振荡, 两圆圈间的竖线给出其振幅大小

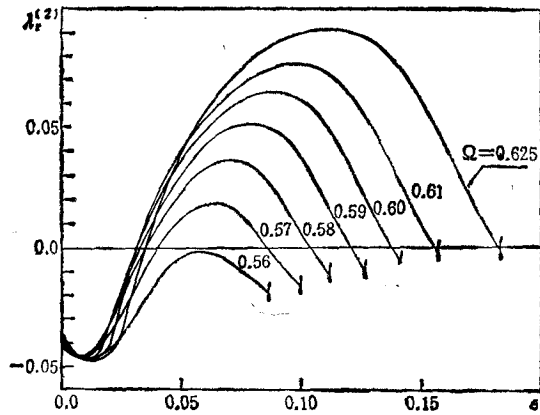


图 2 对应  $\Omega$  的几个不同值, 模式 2 本征值实部  $\lambda_1^{(2)}$  随  $\varepsilon$  的变化 一对箭头表示复共轭本征值蜕变为正负两个实数的位置, 即出现鞍结点分岔的位置

从文献[1]观察到, 在某些参数区,  $E(t)$  可能从定态失稳到周期振荡, 振幅先随  $\varepsilon$  增加逐渐加大, 当  $\varepsilon$  进一步增加时, 振幅反而减小,  $E(t)$  再度回到定态。见图 1 右上角的小图,  $\circ$  表示周期振荡的  $E(t)$ , 两个圆圈间的竖线给出振幅的大小。这个现象从本征值的结果容易得到解释。从图 1, 2 中可见, 模式 2 的本征值实部  $\lambda_1^{(2)}$  先由负变为正, 然后又降为负值, 表明模式 2 在  $\varepsilon$  增加时经历了 Hopf 分岔和逆 Hopf 分岔, 与  $E(t)$  的失稳与复稳过程对应。本征值虚部  $\lambda_1^{(2)}$  也接近  $E(t)$  失稳时的频率  $\omega_c$ , 如当  $\Omega = 0.6, \varepsilon = 0.07$  时, 解得  $\lambda_1^{(2)} = 0.31$ , 接近文献[1]中  $E(t)$  的谱分析得到  $\Omega = 0.6, \varepsilon = 0.675$  时  $\omega_c \approx 0.33$ 。(见文献[1]图 3(a))。考虑到对微扰只作了线性近似, 这个一致是令人满意的, 说明  $E(t)$  的周期失稳是共振模式的 Hopf 分岔引起的,  $E(t)$  周期振荡的频率就是失稳模式的本征频率, 这个频率不同于该模式在实验室坐标系中的线性本征频率, 它经过与相速  $\Omega$  有关的多普勒移动和系统的非线性引起的改变。

此外, 在  $\Omega$  大于约 0.63 时, 在滞后回线的下半分支上已见不到  $E(t)$  振荡再度稳定化到定态, 它直接从周期的或无规的振荡态跃迁到滞后的上半分支, 计算机模拟的这一现象<sup>[4,7]</sup>也可以从本文的结果得到解释, 因为这时模式 2 在未发生逆 Hopf 分岔之前, 已出现另一个突变——鞍结点分岔<sup>[9]</sup>。这在下面说明。

### 3. 共振模式的鞍结点分岔引起 $E(t)$ 的滞后分岔。

图 3 为不同  $\Omega$  值下模式 2 的复共轭本征值的虚部  $\lambda_1^{(2)}$  随  $\varepsilon$  的变化。前面已提到, 当该模式失稳时, 它就是  $E(t)$  失稳的频率。对于一个特定的  $\Omega$  值,  $\lambda_1^{(2)} - \varepsilon$  为半周弧线, 弧线的两个端点, 即与纵轴的交点是该模式经多普勒移动后的线性本征频率(14)式。在某一临界  $\varepsilon$  处, 曲线与横轴相交, 这时  $\lambda_1^{(2)}$  变为零, 复共轭本征值蜕变为正负两个实数, 这时将发生鞍结点分岔。在实部  $\lambda_1^{(2)}$  的图 2 中, 相应的临界位置用两个箭头表示。可以看到, 在  $\Omega$  大于约 0.63 时, 随  $\varepsilon$  增加, 鞍结点分岔的临界点将先于逆 Hopf 分岔的, 这就解释了

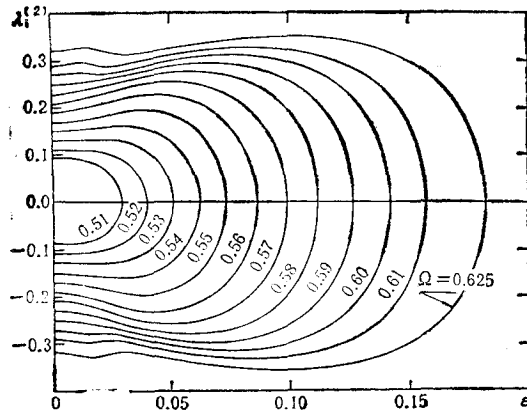


图3 对应  $\Omega$  的几个不同值, 模式 2 本征值的虚部  $\lambda_i^{(2)}$  随  $\varepsilon$  的变化  $\lambda_i^{(2)}$  蜕变为零的位置出现鞍结分岔

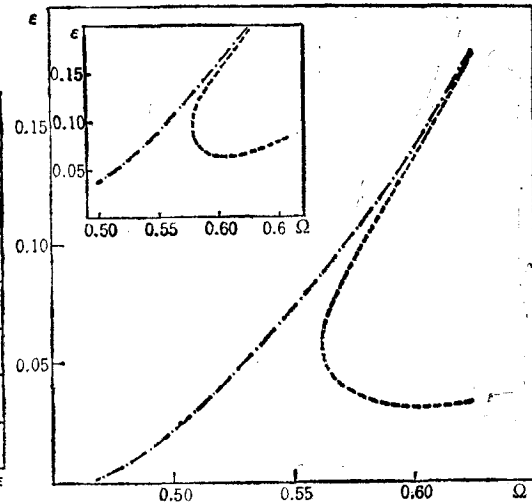


图4 模式 2 在参数  $(\Omega, \varepsilon)$  空间中的分岔线 —— 是 Hopf (与逆 Hopf) 分岔线, - · - · - 是鞍结分岔线; 左上角小图是数值模拟得到的能量  $E$  的分岔线, —— 是  $E(t)$  失稳到周期振荡的位置, - · - · - 是出现滞后跃迁的位置

前面提到的现象。

图 4 给出在  $(\Omega, \varepsilon)$  空间中由本征值得到的模式 2 的分岔位置, 虚线是复共轭本征值实部  $\lambda_i^{(2)}$  变号的位置, 其下半分支对应 Hopf 分岔, 上半分支对应逆 Hopf 分岔。点划线是本征值  $\lambda_i^{(2)}$  由复共轭蜕变为实数即鞍结分岔的位置, 它与  $\varepsilon=0$  轴交于  $\Omega \approx 0.465$ , 这对应图 3 中的原点, 这时, 虚部  $\lambda_i^{(2)}$  半圆弧收缩到一点。现在把本征值结果与计算机实验比较, 见图 4 左上角小图(或文献[1]中图 9), 虚线为  $E(t)$  出现周期振荡的临界位置, 点划线为  $E(t)$  出现滞后跃迁的位置。比较两者可以确认, 正是共振模式的鞍结分岔引起  $E(t)$  的滞后分岔。穿过这条线, 定态对应的  $\varphi(x, t)$  的相图从线的右方的二周变为左方的三周, 模式 3 的谱线成为分岔模式中最强的。这个现象在文献[1,8]中已有详细描述。是否在一定条件下模式 3 (继而模式 4, 5, ...) 将变为非线性共振模式, 是一个有趣的问题, 我们将进一步研究。

本文的解析结果与文献[1]数值结果比较总的而言是令人满意的。但分岔的精确位置有一些差别, 如图 4 上 Hopf 分岔位置低于数值模拟的结果。误差既来自本文的解析近似也来自文献[1]的计算机实验。前者包括两次截断到有限个模式引起的误差, 以及对微扰仅作线性近似, 忽略了不同模式的微扰之间的相互作用带来的影响等。需要指出的是, 分岔位置并不唯一地决定于参数, 它还与初始条件有关(文献[1], 图 15), 这些都有待进一步研究。

- [1] He Kaifen, A. Salat, *Plasma Phys. and Contr. Fusion*, **31**(1989), 123.
- [2] He Kaifen, A. Salat, *Phys. Lett.*, **A132** (1988), 175.
- [3] A. R. Bishop, K. Fessler, P. S. Lowdahl et al., *Phys. Rev. Lett.* **50**(1983), 1095.
- [4] A. R. Bishop, K. Fessler, P. S. Lowdahl et al., *Physica*, **7D** (1983), 259.
- [5] K. Nozaki, N. Bekki, *J. of Phys. Soci. Japan*, **54** (1985), 2363.

- [6] V. Oraevskii, H. Tasso, H. Wobig, in *Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Research, Proc. of the 3rd Int. Conf., Novosibirsk, (1968) (IAEA 1969), Vol. I, p. 671.*
- [7] A. Salat, He Kaifen, IPP 6/280, (1989).
- [8] 贺凯芬, A. Salat, *物理学报*, **39**(1990), 204.
- [9] 例如参考 John Guckenheimer 和 Philip Holmes 著, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, (1983), p. 145.

## A PERTURBATION METHOD FOR THE NONLINEAR DRIFT-WAVES DRIVEN BY A SINUSOIDAL WAVE

HE KAI-FEN HU GANG

*Beijing Normal University, Beijing, 100875*

(Received 7 January 1991)

### ABSTRACT

The nonlinear drift-wave equation driven by a sinusoidal wave is discussed in a coordinate system moving in the driving phase speed. It is shown that the hysteretic jump of the wave energy and its transition to periodic motions from the steady state can be described integrately by the perturbation method proposed in this paper. The saddle-node and Hopf bifurcations of certain resonance mode are responsible for them respectively. The frequency of the periodic oscillatory wave energy is relevant to the eigen-frequency of the system, which is different from the one in the laboratory frame due to the Doppler shift and the nonlinearity.

**PACC:** 5235