第 40 卷 第 1 期　　物 理 学 报　　Vol. 40, No. 1
1991 年 1 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Jan., 1991

广义含时谐振子的精确解和 Berry 相因数*

高孝纯　许晶波　钱铁铮
浙江大学物理系，杭州，310027

1990 年 1 月 31 日收到

本文利用 Lewis-Riesenfeld[1] 的量子理论，求出广义含时谐振子的精确解．研究了此精确解的绝热渐近极限，并求出广义谐振子在量子绝热情形的 Berry 相因数．进而利用此精确解构造了广义含时谐振子的相干态，并得到相应的经典 Hannay 角．

PACC: 0365; 0240

一、引　　言

Berry[2] 首先发现处于某个本征态的量子系统经过一个量子绝热过程，除了获得人们熟悉的动力学相因数 $\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\ E_n(\boldsymbol{R}(t))\right\}$ 外，还要附加一拓扑相因数 $\exp\{i\gamma_n(c)\}$，这里 $\gamma_n(c)$ 为

$$\gamma_n(c)=i\oint_c\langle n(\boldsymbol{R}(t))|\nabla_{\boldsymbol{R}}n(\boldsymbol{R}(t))\rangle\cdot d\boldsymbol{R}. \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{R}$ 为一组随时间变化的参量 $(R_1,R_2,\cdots)$，c 为参量空间的闭合曲线．Simon[3] 立刻认识到 $\gamma_n(c)$ 为 Chern 类的拓扑不变量，其几何意义是以参数流型 $M:\{\boldsymbol{R}\}$ 为底流型的厄密线丛上的 holonomy． 此相因数开始引起人们的广泛注意．它不仅与非阿贝耳规范理论[4,5]、反常[6-8]、分数统计[9,10]以及量子 Hall 效应[11]等人们极感兴趣的问题密切相关，而且接连在实验中得到证实[12-16]． Berry 相因数的经典对应——Hannay 角已由 Hannay 和 Berry 在绝热条件下进行过研究[17,18]．他们在绝热近似下讨论过广义谐振子的 Berry 相因数和 Hannay 角．Berry 还在半经典情形找到了 Berry 相因数与 Hannay 角之间的一般关系式．

对于含时谐振子

$$\hat{H}(t)=\frac{1}{2M}\hat{p}^2+\frac{1}{2}\omega^2(t)\hat{q}^2, \tag{2}$$

Lewis 和 Riesenfeld[1] 利用他们的量子不变量理论讨论过它的精确解． 但由于此系统的参量空间只有一维，因而此系统在绝热演化时不存在 Berry 相因数．最近，Morales[22]

* 国家自然科学基金资助的课题．

讨论了广义含时谐振子

$$\hat{H}(t)=\frac{1}{2}[X\hat{q}^2+Y(\hat{q}\hat{p}+\hat{p}\hat{q})+Z\hat{p}^2] \tag{3}$$

的精确解和 Berry 相因数，但遭到了批评. Cerveró 和 Lejarreta[23] 指出 Morales 得到的结果由于用了一个正则变换是有问题的. 但他们自己在求精确解时采用了一个特殊的初始条件，这是一个不必要的累赘. 本文利用 Lewis-Riesenfeld 的量子不变量理论，不引入特殊的初始条件，求出广义含时谐振子的精确解. 然后仔细研究此精确解的绝热渐近极限，得到广义谐振子在量子绝热情形的 Berry 相因数.

对于(2)式的含时谐振子，Hartley 和 Ray[19] 利用 Lewis-Riesenfeld 的量子理论建立了含时谐振子的相干态 (Pedrosa[20] 指出，Hartley 和 Ray 所构造的相干态是一种压缩态. 范洪义和井思聪[21]用另一种方法也对含时谐振子的相干态和压缩态进行过讨论)，并利用此相干态求了算符 $\hat{q}$ 的期待值，得出了相应的经典相角，此相角在绝热极限下仅有动力学部份，而无几何部份，即 Hannay 角为零. 这也是参量空间为一维的必然结果. 本文利用广义含时谐振子的精确解构造了相干态，并且计算了 $\hat{q}$ 在相干态的期待值，从而得到了经典相角. 在绝热极限下，此经典相角不但包括动力学的部份，而且包括非零的几何部份，即经典 Hannay 角.

二、广义含时谐振子的精确解和 Berry 相因数

考虑一哈密顿量 $\hat{H}(t)$ 显含时间的系统，假定存在一个厄密不变量 $\hat{I}(t)$ 满足

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{I},\hat{H}]+\frac{\partial\hat{I}}{\partial t}=0, \tag{4}$$

式中 $\hat{I}(t)$ 不显含对时间求导的算符. $\hat{I}(t)$ 的本征值方程为

$$\hat{I}(t)|\lambda_n,t\rangle=\lambda_n|n,t\rangle,\ \frac{\partial\lambda_n}{\partial t}=0. \tag{5}$$

系统含时 Schrödinger 方程为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_S=\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle_S. \tag{6}$$

根据 Lewis-Riesenfeld[1] 的量子不变量理论，此方程的普遍解为

$$\Big|\psi(t)\rangle_S=\sum_n c_n e^{i\alpha_n(t)}\Big|\lambda_n,t\rangle, \tag{7}$$

式中

$$\alpha_n(t)=\int_0^t dt'\langle\lambda_n,t'\Big|i\frac{\partial}{\partial t'}-\frac{1}{\hbar}\hat{H}(t')\Big|\lambda_n,t'\rangle. \tag{8}$$

现在讨论(3)式的广义含时谐振子系统，此系统的参量空间为 $\boldsymbol{R}=\{X(t),Y(t),Z(t)\}$，其中要求 $XZ-Y^2>0$. 此系统存在一个不变量

$$\hat{I}(t)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\hat{q}^2}{x}+\left[x\left(\hat{p}+\frac{Y}{Z}\hat{q}\right)-\frac{\dot{x}\hat{q}}{Z}\right]^2\right\}, \tag{9}$$

式中 $x(t)$ 为满足下面辅助方程的 c 数:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{Z}\right)-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)-\frac{XZ-Y^2}{Z}+\frac{Z}{x^4}\right]=0. \tag{10}$$

不难证明，$\hat{I}(t)$ 满足(4)式的不变量条件.

引入两对产生与湮没算符

$$\hat{a}(t)=\sqrt{\frac{\omega_D}{2\hbar Z}}\left[\hat{q}+i\frac{Z}{\omega_D}\left(\hat{p}+\frac{Y}{Z}\hat{q}\right)\right], \tag{11a}$$

$$\hat{a}^+(t)=\sqrt{\frac{\omega_D}{2\hbar Z}}\left[\hat{q}-i\frac{Z}{\omega_D}\left(\hat{p}+\frac{Y}{Z}\hat{q}\right)\right], \tag{11b}$$

$$\hat{b}(t)=\sqrt{\frac{1}{2\hbar}}\left\{\frac{\hat{q}}{x}+i\left[x\left(\hat{p}+\frac{Y}{Z}\hat{q}\right)-\frac{\dot{x}\hat{q}}{Z}\right]\right\}, \tag{11c}$$

$$\hat{b}^+(t)=\sqrt{\frac{1}{2\hbar}}\left\{\frac{\hat{q}}{x}-i\left[x\left(\hat{p}+\frac{Y}{Z}\hat{q}\right)-\frac{\dot{x}\hat{q}}{Z}\right]\right\}, \tag{11d}$$

式中 $\omega_D=(XZ-Y^2)^{1/2}$. 利用 $[\hat{q},\hat{p}]=i\hbar$，不难证明它们满足对易关系

$$[\hat{a},\hat{a}^+]=[\hat{b},\hat{b}^+]=1. \tag{12}$$

于是可重新表述(3)式的 $\hat{H}(t)$ 和(9)式的 $\hat{I}(t)$ 如下:

$$\hat{H}(t)=\hbar\omega_D\left(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2}\right), \tag{13a}$$

$$\hat{H}(t)|n,t\rangle_a=\hbar\omega_D\left(n+\frac{1}{2}\right)|n,t\rangle_a, \tag{13b}$$

$$\hat{a}(t)|n,t\rangle_a=\sqrt{n}\,|n-1,t\rangle_a;\ \hat{a}^+(t)|n,t\rangle_b=\sqrt{n+1}\,|n+1,t\rangle_b \tag{13c}$$

和

$$\hat{I}(t)=\hbar\left(\hat{b}^+\hat{b}+\frac{1}{2}\right), \tag{14a}$$

$$\hat{I}(t)|n,t\rangle_b=\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)|n,t\rangle_b, \tag{14b}$$

$$\hat{b}(t)|n,t\rangle_b=\sqrt{n}\,|n-1,t\rangle_b,\ \hat{b}^+(t)|n,t\rangle_b=\sqrt{n+1}\,|n+1,t\rangle_b. \tag{14c}$$

为了求出广义含时谐振子的精确解，先求(8)式中的 $\alpha_n(t)$，从(11)式得

$$\hat{a}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\omega_D}{Z}}\,x(\hat{b}^+\hat{b})-\sqrt{\frac{Z}{\omega_D}}\,\frac{(\hat{b}^+-\hat{b})}{x}+i\frac{\dot{x}}{\sqrt{Z\omega_D}}(\hat{b}^++\hat{b})\right], \tag{15a}$$

$$\hat{a}^+=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\omega_D}{Z}}\,x(\hat{b}^++\hat{b})+\sqrt{\frac{Z}{\omega_D}}\,\frac{(\hat{b}^+-\hat{b})}{x}-i\frac{\dot{x}}{\sqrt{Z\omega_D}}(\hat{b}^++\hat{b})\right] \tag{15b}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{b}^+}{\partial t}=\frac{1}{2}\Bigg\{&\left[\frac{i}{Z}\dot{x}^2-\frac{2\dot{x}^2}{x}-ix^2\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)+ix\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{Z}\right)\right]\hat{b}\\&-\left[i\frac{\dot{x}^2}{Z}+ix^2\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)+ix\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{Z}\right)\right]\hat{b}^+\Bigg\}.\end{aligned} \tag{16}$$

于是可以得到

$$\hat{a}^{+}\hat{a}=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_D}{Z}x^2+\frac{\dot{x}^2}{Z\omega_D}+\frac{Z}{\omega_D x^2}\right)\hat{b}^{+}\hat{b}+\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_D x^2}{Z}+\frac{\dot{x}^2}{Z\omega_D}+\frac{Z}{\omega_D x^2}-2\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_D}{Z}x^2+\frac{\dot{x}^2}{Z\omega_D}-\frac{Z}{\omega_D x^2}+i\frac{2\dot{x}}{x\omega_D}\right)\hat{b}^{+}\hat{b}^{+}$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_D}{Z}x^2+\frac{\dot{x}^2}{\omega_D Z}-\frac{Z}{\omega_D x^2}-i\frac{2\dot{x}}{x\omega_D}\right)\hat{b}\hat{b}. \tag{17}$$

从 (14) 和 (17) 式可得

$$_b\left\langle n,t\left|\frac{\hat{H}}{\hbar}\right|n,t\right\rangle_b=\omega_{D_b}\left\langle n,t\left|\left(\hat{a}^{+}\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\right|n,t\right\rangle_b$$
$$=\frac{1}{4}(2n+1)\left(\frac{\omega_D}{Z}+\frac{\dot{x}^2}{2\omega_D}+\frac{Z}{\omega_D x^2}\right). \tag{18}$$

利用(14)和(16)式可以求得

$$_b\left\langle n,t\left|i\frac{\partial}{\partial t}\right|n,t\right\rangle_b={}_b\left\langle n-1,t\left|i\frac{\partial}{\partial t}\right|n-1,t\right\rangle_b+\frac{i}{\sqrt{n}}{}_b\left\langle n,t\left|\frac{\partial\hat{b}^{+}}{\partial t}\right|n,t\right\rangle_b$$
$$={}_b\left\langle n-1,t\left|i\frac{\partial}{\partial t}\right|n-1,t\right\rangle_b+\frac{1}{2}\left[\frac{\dot{x}^2}{Z}+x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)-x\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{Z}\right)\right]$$
$$={}_b\left\langle 0,t\left|i\frac{\partial}{\partial t}\right|0,t\right\rangle_b+\frac{n}{2}\left[\frac{\dot{x}^2}{Z}+x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)-x\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{Z}\right)\right]. \tag{19}$$

可以选[1]

$$_b\left\langle 0,t\left|i\frac{\partial}{\partial t}\right|0,t\right\rangle_b=\frac{1}{4}\left[\frac{\dot{x}}{Z}+x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)-x\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{Z}\right)\right], \tag{20}$$

利用(8),(10),(18),(19)和(20)式,最后可得

$$\alpha_n(t)=-\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^t\frac{Z(t')}{x^2(t')}dt', \tag{21}$$

式中 $x(t')$ 为辅助方程(10)的解. 此时含时 Schrödinger 方程的普遍解(7)式可写成

$$\left|\psi(t)\right\rangle_s=\sum_n c_n e^{i\alpha_n(t)}\left|n,t\right\rangle_b. \tag{22}$$

(10),(21)和(22)式就是广义含时谐振子的精确解,其中(21)式为精确的相位表达式.

分两种情况讨论此精确解的绝热渐近极限.

首先考虑 $\dot{x}$ 很小时, $\dot{x}$ 的导数可略去的情形,此时辅助方程(10)的解为

$$\frac{Z}{x^2}=\omega_D\left[1-Z\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)\Big/\omega_D^2\right]^{1/2}. \tag{23}$$

在通常的绝热近似下应有

$$Z\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)\Big/\omega_D^2\ll 1. \tag{24}$$

此时(23)式可写成

$$\frac{Z}{x^2}\approx\omega_D\left[1-Z\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)\Big/2\omega_D^2\right]. \tag{25}$$

当 $Z\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)\Big/\omega_D^2\ll 1$, 且 $\dot{x}$ 很小时,从(17)式可见

$$\hat{a}^{+}\hat{a} \sim \hat{b}^{+}\hat{b} \tag{26}$$

或

$$\hat{I}(t) \sim \hat{H}(t). \tag{27}$$

即 $\hat{I}(t)$ 的本征态近似为 $\hat{H}(t)$ 的本征态．而原来我们知系统是始终处于 $\hat{I}(t)$ 的本征态，于是在上述极限下，系统将始终近似地处于 $\hat{H}(t)$ 的本征态，这正是通常意义下的绝热近似所要求的．因此，在上述极限下，利用(21)和(25)式就可求出系统在参量空间经过一周绝热演化所获得的总的相位

$$\begin{aligned}\alpha_n(T) &= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^T \omega_D dt - \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^T\left[-\frac{Z}{2\omega_D}\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)\right]dt \\ &= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^T \omega_D dt - \left(n+\frac{1}{2}\right)\oint_c\left[-\frac{Z}{2\omega_D}\nabla_R\left(\frac{Y}{Z}\right)\right]\cdot d\boldsymbol{R}.\end{aligned} \tag{28}$$

上式等号右端第一项为动力学相位，第二项即为 Berry 相位

$$\gamma_n(c) = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\oint_c\left[-\frac{Z}{2\omega_D}\nabla_R\left(\frac{Y}{Z}\right)\right]\cdot d\boldsymbol{R}. \tag{29}$$

这样利用求得的精确解取绝热渐近极限得到了 Berry 相因数．

其次当 $\dot{x}$ 比较大时，在保持(24)式的绝热条件下，系统虽不能停留在 $\hat{H}(t)$ 的本征态上，但能一直停留在 $\hat{I}(t)$ 的本征态上．因此，系统在参数空间绝热演化一周时，仍存在一个相因数．此相因数是一种新的绝热相因数，它不同于 Berry 相因数．

三、广义含时谐振子的相干态和 Hannay 角

首先构造广义含时谐振子的相干态．利用第二节得到的精确解，定义相干态如下：

$$|\zeta, t\rangle_S = e^{-|\zeta|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{\sqrt{n!}}e^{i\alpha_n(t)}|n, t\rangle_b, \tag{30}$$

式中 $\zeta = u + iv$ 为一复常数，$\alpha_n(t)$ 由(21)式决定．不难证明 $|\zeta, t\rangle_S$ 为湮没算符 $\hat{b}(t)$ 本征态，

$$\hat{b}(t)|\zeta, t\rangle_S = \zeta e^{2\alpha_0(t)}|\zeta, t\rangle_S, \tag{31}$$

这就是 Hartley 和 Ray[19] 意义下的相干态．

现在根据相干态 $|\zeta, t\rangle_S$ 来讨论波包的运动，即求算符 $\hat{q}$ 的期待值

$$\begin{aligned}\langle\hat{q}\rangle &= {}_S\langle\zeta, t|\hat{q}|\zeta, t\rangle_S = {}_S\langle\zeta, t\left|x(\hat{b}+\hat{b}^{+})\frac{\sqrt{\hbar}}{2}\right|\zeta, t\rangle_S \\ &= (2\hbar|\zeta|^2x^2)^{1/2}\sin\theta,\end{aligned} \tag{32}$$

式中

$$\theta = -2\alpha_0(t) + \delta,\quad \delta = \tan^{-1}u/v. \tag{33}$$

不难证明 $\langle\hat{q}\rangle$ 适合相应的经典运动方程．因此，在 $\dot{x}$ 很小和绝热渐近极限下，

$$-2\alpha_0(t) = \int_0^t \omega_D dt' + \int_0^t\left[-\frac{Z}{2\omega_D}\frac{d}{dt'}\left(\frac{Y}{Z}\right)\right]dt'. \tag{34}$$

这样就可以得到系统在参量空间绝热演化一周的经典 Hannay 角

$$\Delta\theta(c) = \int_0^T \left[-\frac{Z}{2\omega_D}\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)\right]dt$$

$$= \oint_c \left[-\frac{Z}{2\omega_D}\nabla_R\left(\frac{Y}{Z}\right)\right]\cdot d\boldsymbol{R}. \tag{35}$$

从(29)和(35)式得到

$$\Delta\theta(c) = -\frac{\partial}{\partial n}\gamma_n(c). \tag{36}$$

此式 Berry 已用别的方法得到过[18]。

四、讨 论

1. 本文所采用的方法不仅仅限于广义含时谐振子，原则上对所有具有 Lewis-Riesenfeld 不变量的量子系统均适用。

2. 当 $\dot{x}$ 很小时，保持 $\omega_D = (XZ - Y^2)^{1/2}$ 不变，利用相干态，在绝热渐近极限下，就可以得到文献[24]和[25]中的结果，所以他们所得到的是本文结果的一个特例。

3. 利用(11c)和(11d)两式可以写出算符 $\hat{b}(t)$ 和 $\hat{b}^+(t)$ 用通常的 $\hat{a}_0$ 和 $\hat{a}_0^+$ 表示的表达式

$$\hat{b}(t) = \mu(t)\hat{a}_0 + \nu(t)\hat{a}_0^+, \tag{37a}$$

$$\hat{b}^+(t) = \mu^*(t)\hat{a}_0^+ + \nu^*(t)\hat{a}_0, \tag{37b}$$

式中 $\hat{a}_0$ 和 $\hat{a}_0^+$ 为对应哈密顿量

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}X_0\hat{q}^2 + \frac{1}{2}Z_0\hat{p}^2 \tag{38}$$

的产生和湮没算符(X_0 和 Z_0 为常数)，即

$$\hat{a}_0 = \left(\frac{1}{2\hbar}\sqrt{\frac{Z_0}{X_0}}\right)^{1/2}\left(\sqrt{\frac{X_0}{Z_0}}\,\hat{q} + i\hat{p}\right), \tag{39a}$$

$$\hat{a}_0^+ = \left(\frac{1}{2\hbar}\sqrt{\frac{Z_0}{X_0}}\right)^{1/2}\left(\sqrt{\frac{X_0}{Z_0}}\,\hat{q} + i\hat{p}\right), \tag{39b}$$

$$[\hat{a}_0, \hat{a}_0^+] = 1. \tag{40}$$

而

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_0}{X_0}\right)^{1/4}\left[\frac{1}{x} + \left(\frac{X_0}{Z_0}\right)^{1/2} x + ix\frac{Y}{Z} - i\frac{\dot{x}}{Z}\right], \tag{41a}$$

$$\nu(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_0}{X_0}\right)^{1/4}\left[\frac{1}{x} - \left(\frac{X_0}{Z_0}\right)^{1/2} x + ix\frac{Y}{Z} - i\frac{\dot{x}}{Z}\right]. \tag{41b}$$

由(41a)和(41b)式不难证明

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1. \tag{42}$$

因此，此变换是一个含时的 Bogoliubov 变换，并且本文所建立的广义含时谐振子的相干态是一种压缩态[20]。

[1] Jr. H. R. Lewis & W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.*, **10**(1969), 1458.
[2] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A392**(1984), 45.
[3] B. Simon, *Phys. Rev. Lett.*, **51**(1983), 2167.
[4] F. Wilzeck & A. Zee, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 2111.
[5] Hua-Zhong Li, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 539.
[6] P. Nelson & L. Alvareg-Gaume, *Commun. Math. Phys.*, **99**(1985), 103.
[7] H. Sonoda, *Nucl. Phys.*, **B266**(1986), 410.
[8] A. J. Niemi, G. W. Semenoff & Wu Y. S., *Nucl. Phys.*, **B276**(1986), 173.
[9] D. Arovas, J. R. Schrieffer & F. Wilzeck, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 722.
[10] F. D. Haldane & Wu Y. S., *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 2887.
[11] G. W. Semenoff & P. Sodano, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 1195.
[12] G. Delacretaz *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 2598.
[13] A. Tomita & R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 937.
[14] R. Tycko, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 2281.
[15] R. S. Nikam, & P. Ring, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 980.
[16] D. Suter *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 1218.
[17] J. H. Hannay, *J. Phys. A*, **18**(1985), 221.
[18] M. V. Berny, *J. Phys. A.*, **18**(1985), 15.
[19] J. G. Hartley & J. R. Ray, *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 382.
[20] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev.*, **D36**(1987), 1279.
[21] Fan Hong-Yi & Jing Si-Cong, *Commun. in Theor. Phys. (Bejing, China)*, **10**(1988), 363.
[22] D. A. Morales, *J. Phys. A*, **21**(1988), L889.
[23] J. M. Cervero & J. D. Lejarreta, *J. Phys. A*, **22**(1989), L663.
[24] S. Chaturvedi *et al.*, *J. Phys. A*, **20**(1987), L1071.
[25] Fan Hong-Yi & H. R. Zaidi, *Can. J. Phys.*, **66**(1988), 978.

THE EXACT SOLUTION AND BERRY'S PHASE FOR THE GENERALIZED TIME-DEPENDENT HARMONIC OSCILLATOR

GAO XIAO-CHUN XU JIN-BO QIAN TIE-ZHENG

Department of Physis, Zhejiang University, Hangzhou, 310027

(Received 31 January 1990)

ABSTRACT

In this paper, we find the exact solution for the generalized time-dependent harmonic oscillator by making use of the Lewis-Riesenfeld theory[1]. Then, the adiabatic asymptotic limit of the exact solution is discussed and the Berry's phase factor for the oscillator obtained. We proceed to use the exact solution to construct the coherent state and calculate the corresponding classical Hannay angle.

PACC: 0365; 0240