

# 一种 $q^k=1$ 畸变振子及其非玻色激发\*

阎 宏<sup>1)</sup> 陈 卫 常 哲 郭汉英<sup>1)</sup>

中国科学院理论物理研究所, 北京, 100080

1990年5月14日收到

本文讨论一种  $q$  畸变振子系统在畸变参数  $q$  为实数或  $k$  次单位根时的  $SU_q(2)$  及  $SU_q(1,1)$  对称性, 并指出当  $k$  为不同值时,  $q$  畸变振子具有非玻色型激发. 特别地, 当  $k=4$  和  $6$  时,  $q$  振子的激发是费密型的和 2 阶仲费密型的. 本文指出文献[6]中的部分结论是平庸的.

PACC: 0210; 0220; 0365; 1130

## 一、引 言

最近, 许多作者讨论  $SU_q(2)$  以及  $SU_q(1,1)$  代数的  $q$  畸变振子代数的实现问题<sup>[1-4, 6, 8-11]</sup>, 这些讨论大部分集中于畸变参数  $q$  为实数的情形. 本文试图将这种讨论推广到包括  $q$  为实数和单位根(即  $q^k=1, k$  为整数)的情况.

通常的  $SU_q(2)$  及  $SU_q(1,1)$  可在量子力学体系中用李括号描述<sup>[5, 7, 12]</sup>

$$[J_+, J_-] = \eta[2J_0] \quad \eta \text{ 取“+”或“-”}, \quad (1)$$

$$[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad (2)$$

其中使用了简化记号

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} = \frac{\sinh(\gamma x)}{\sinh \gamma}, \quad \gamma = \ln q. \quad (3)$$

并且  $\eta$  取“+”对应  $SU_q(2)$  代数,  $\eta$  取“-”对应  $SU_q(1,1)$  代数. 这两种对称性是在量子力学体系, 即包括简谐振子和  $q$  振子的体系中实现的. 但是, 正如文献[1-4]所指出的,  $SU_q(2)$  代数完全可以由泊松括号实现, 从而是一种可在经典力学体系中找到对称性. 这意味着参数  $q$  与普朗克常数  $\hbar$  不再有联系. 为加以区别, 本文分别把在量子力学体系中以李括号实现的  $SU_q(2)$  代数和在经典力学体系中以泊松括号实现的  $SU_q(2)$  代数分别记成  $SU_{q,\hbar}(2)$  和  $SU_{q,\hbar \rightarrow 0}(2)$ . 根据文献[1, 2], 一个经典力学体系具有  $SU_{q,\hbar \rightarrow 0}(2)$  对称性, 在正则量子化之后得到的量子力学体系则具有  $SU_{q,\hbar}(2)$  对称性.

本文引入参数  $p, p=k-1$  ( $k$  为奇),  $p=k/2-1$  ( $k$  为偶). 对量子力学的  $q$  振子, 证明了  $a_q^{p+1} = (a_q^{\dagger})^{p+1} = 0$ , 其中  $a_q$  和  $a_q^{\dagger}$  分别为  $q$  畸变振子的湮没和产生算

\* 国家自然科学基金资助的课题.

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室).

符,从而表明它与通常的仲费密子极为相似<sup>[15,16]</sup>. 本文主要讨论  $p=1,2$  的情况,指出此时的  $q$  畸变振子严格与阶为 1,2 时的仲费密振子相同(1 阶仲费密子即费密子),并给出其经典力学的对应物. 通过对费密和 2 阶仲费密振子的讨论,指出文献[6]中的部分结果是平庸的.

与畸变参数  $q$  为实数的情形比较, $q$  为单位根时,经典力学  $q$  振子的振动强度具有饱和性质这一鲜明特点. 在正则量子化后,相应的特点就是占有数的有限性. 特别地, $k=4$  时经典力学振子振动强度的饱和性实际上就是量子力学中泡利不相容原理的经典对应.

## 二、 $SU_q(2)$ 的振子实现

本节在  $q$  为实数或  $k$  次单位根的情形下,利用经典力学的  $q$  畸变振子系统,实现了  $SU_{q,h \rightarrow 0}(2)$  对称性,然后在系统正则量子化之后,得到  $SU_{q,h}(2)$  对称性.

考虑由两个全同的一维玻色振子组成的系统,其哈密顿量为

$$H_q = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (P_{qi}^2 + Q_{qi}^2), \quad (4)$$

频率和质量已取为 1,且式中  $P_{qi}, Q_{qi}$  分别代表第  $i$  个  $q$  畸变振子的动量、坐标. 引入复变量  $\alpha_{qi}, \alpha_{qi}^*$  代表  $q$  振子的振动模式,

$$\alpha_{qi} = \frac{P_{qi} - iQ_{qi}}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$\alpha_{qi}^* = \frac{P_{qi} + iQ_{qi}}{\sqrt{2}} \quad i=1,2. \quad (6)$$

从而

$$H_q = \sum_{i=1,2} \alpha_{qi}^* \alpha_{qi}. \quad (7)$$

当  $q \rightarrow 1$  时, $q$  畸变振子即回到普通的简谐振子(没有畸变的物理量依次记为  $H, \alpha_i, \alpha_i^*$  等,下同).

为了定义泊松括号,指明辛形式为

$$\Omega = -i \sum_{i=1,2} d\alpha_i^* \wedge d\alpha_i. \quad (8)$$

从而泊松括号定义为

$$\{f, g\} = (-i) \sum_{i=1,2} \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \frac{\partial g}{\partial \alpha_i^*} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_i^*} \frac{\partial g}{\partial \alpha_i} \right), \quad (9)$$

且基本泊松括号为

$$\{\alpha_i, \alpha_j^*\} = -i\delta_{ij}, \quad (10)$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \{\alpha_i^*, \alpha_j^*\} = 0. \quad (11)$$

在相空间上构造可观测的力学量

$$J_+ = \alpha_{q1}^* \alpha_{q2}; \quad (12)$$

$$J_- = \alpha_{q_2}^* \alpha_{q_1}; \quad (13)$$

$$J_0 = \frac{1}{2} (\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2), \quad (14)$$

式中引入振动强度  $\mathcal{N}_i = \alpha_i^* \alpha_i$ . 显然,  $q = 1$  时, 它们构成在泊松括号意义下的  $SU(2)$  代数,

$$\{J_+, J_-\} = (-i)2J_0, \quad (15)$$

$$\{J_0, J_\pm\} = (-i)(\pm J_\pm). \quad (16)$$

但是, 现在要求它们在  $q$  为实数和  $k$  次单位根时张成泊松括号意义下的  $SU_q(2)$  或  $SU_q(1, 1)$ , 即

$$\{J_+, J_-\} = (-i)\eta[2J_0] \quad \eta \text{ 取“+”或“-”}, \quad (17)$$

$$\{J_0, J_\pm\} = (-i)(\pm J_\pm). \quad (18)$$

由(12)–(14)式及(17),(18)式组成的方程组有如下的一组解<sup>1)</sup>:

$$\alpha_{q_i} = \sqrt{\frac{\sinh(\gamma \mathcal{N}_i)}{\sqrt{\gamma \sinh \gamma \mathcal{N}_i}}} \alpha_i, \quad (19)$$

$$\alpha_{q_i}^* = \left( \sqrt{\frac{\sinh(\gamma \mathcal{N}_i)}{\sqrt{\gamma \sinh \gamma \mathcal{N}_i}}} \right)^* \alpha_i^* \quad i = 1, 2 \text{ 不求和}, \quad (20)$$

且满足条件

$$\eta = \text{sign}(\tanh(2\gamma \mathcal{N}_1)) = \text{sign}(\tanh(2\gamma \mathcal{N}_2)). \quad (21)$$

当  $q$  为实数时, 自然有

$$\eta = \text{sign}(\tanh(2\gamma \mathcal{N}_1)) = \text{sign}(\tanh(2\gamma \mathcal{N}_2)) \quad \eta \text{ 取“+”}. \quad (22)$$

而当  $q$  为  $k$  次单位根时, 总有一部分模式给出  $\eta$  取“+”, 一部分模式给出  $\eta$  取“-”. 即一部分模式给出  $SU_{q, h \rightarrow 0}(2)$  对称性, 一部分模式给出  $SU_{q, h \rightarrow 0}(1, 1)$  对称性.

显然,  $q$  畸变振子与简谐振子的振动强度  $\mathcal{N}_{q_i}$  与  $\mathcal{N}_i$  之间有如下的关系:

$$\mathcal{N}_{q_i} = |\mathcal{N}_i|, \quad (23)$$

并且  $\mathcal{N}_i$  可以从 0 取到  $\infty$ , 当  $q$  为实数时  $\mathcal{N}_{q_i}$  也是这样取值. 然而当  $q$  为  $k$  次单位根时,  $\mathcal{N}_{q_i}$  则为有限的. 从(10),(11)式出发, 可对此系统进行正则量子化<sup>[1,4]</sup>. 对应于经典力学量  $\alpha_{q_i}, \alpha_{q_i}^*, \mathcal{N}_{q_i}$  有量子力学算符  $a_{q_i}, a_{q_i}^*, N_{q_i}$  (以及  $q = 1$  时的各物理量), 并由(10),(11)式得到基本的对易关系

$$[a_i, a_i^\dagger] = \delta_{ii},$$

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0. \quad (24)$$

与(19),(20)式相对应,  $q$  振子算符与简谐振子的算符有如下的关系:

$$a_{q_i} = a_i \sqrt{\frac{[N_i]}{N_i}} = \sqrt{\frac{[N_i + 1]}{N_i + 1}} a_i; \quad (25)$$

$$a_{q_i}^\dagger = \left( \sqrt{\frac{[N_i]}{N_i}} \right)^* a_i^\dagger = a_i^\dagger \left( \sqrt{\frac{[N_i + 1]}{N_i + 1}} \right)^*; \quad (26)$$

1) 可相差一相因数, 见第五节.

$$N_{qi} = |[N_i]|. \quad (27)$$

当  $q$  为实数时, (25)–(27) 式与文献 [1, 2] 中给出的形式相同。此时可观测量为

$$J_+ = a_{q1}^+ a_{q2}; \quad (28)$$

$$J_- = a_{q2}^+ a_{q1}; \quad (29)$$

$$J_0 = \frac{1}{2} (N_1 - N_2). \quad (30)$$

显然

$$[J_+, J_-] = |[N_2 + 1][N_1]| - |[N_1 + 1][N_2]| \quad (31)$$

$$= \eta [2J_0], \quad (32)$$

$$[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}. \quad (31')$$

满足  $SU_q(2)$ , 只要  $q$  振子的状态选取满足

$$\eta = \text{sign}([N_1][N_2 + 1]) = \text{sign}([N_1 + 1][N_2]) \quad \eta \text{ 取“+”} \quad (32')$$

就是所需要的解。实际上,  $\eta$  取“+”给出  $SU_{q,\eta}(2)$  对称性,  $\eta$  取“−”给出  $SU_{q,\eta}(1, 1)$  对称性。当  $q$  为实数时只有  $\eta$  取“+”这一种情况, 因而体系中只存在  $SU_q(2)$  对称性; 当  $q$  为偶数次单位根时, 体系的状态给出两种可能性, 即 (32') 式中  $\eta$  取“+”, “−”两种情况; 当  $q$  为奇数次单位根时, 体系的状态有多于以上两种的可能性, 例如存在  $[N_1][N_2 + 1]$  的符号与  $[N_1 + 1][N_2]$  的符号相反的情况, 此时体系给出的对称性既不是  $SU_q(2)$  也不是  $SU_q(1, 1)$ , 本文讨论中一律略去这多出的可能性。

### 三、 $q^k=1$ 时的畸变振子

本节讨论  $q$  为  $k$  次单位根时, 经典  $q$  畸变振子的模式及振动强度的特点, 以及量子  $q$  振子的态空间等方面的性质, 给出  $q$  畸变振子激发数算符的恰当定义。

首先考虑经典  $q$  振子在  $q$  为  $k(\geq 2)$  次单位根时的情况。此时  $\gamma = 2\pi i/k$ , 振动强度

$$\mathcal{N}_q = \left| \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{k} \mathcal{N}\right)}{\sin 2\pi/k} \right| \leq \frac{1}{\sin(2\pi/k)} \quad (33)$$

是连续而且有限的(由于只涉及一个  $q$  振子, 因此略去脚标  $i$ , 下同)。当简谐振子的振动强度  $\mathcal{N}$  为非零值  $\frac{1}{2}kl$ , ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) 时,  $\mathcal{N}_q = 0$  即振动反而停止。一般地, 当  $\mathcal{N}$  取值在谱空间  $\left[\frac{1}{2}kl, \frac{1}{2}k(l+1)\right]$  时,  $\mathcal{N}_q$  经历一个从零开始增强, 并在达到最大值  $(\sin 2\pi/k)^{-1}$  后下降到零的过程。振动强度所具有的这种特点, 可被称作强度的饱和性。

为了便于理解振动强度的这一特点, 考虑  $k=4$  的情形。此时  $\mathcal{N}_q \leq 1$ , 当  $\mathcal{N}$  取值在  $[2l, 2l+2)$  上时,  $\mathcal{N}_q$  从零连续上升, 在  $\mathcal{N} = 2l+1$  处取得最大值 1, 然后回落, 完成一个周期, 在  $\mathcal{N} = 2l+2$  处复为零并开始下一循环。

根据上一节, 在对体系进行正则量子化之后, 将得到量子力学的  $q$  振子体系. 经典力学振子的力学量及振动模式函数将被量子力学的算符及粒子数本征态取代. 根据文献 [1—4],  $q$  振子的粒子数本征态实际上与普通简谐振子的 Fock 态相同. 当  $q$  为实数时, 随着  $N$  取  $0, 1, 2, \dots$  等一系列分立值,  $N_q$  从零开始在一系列分立值上增加直到  $\infty$ . 当  $q$  为偶数次单位根时,  $N = \frac{1}{2}kl, \frac{1}{2}kl+1, \dots, \frac{1}{2}k(l+1)-1$ , 则  $N_q$  从零开始上升, 在取得一个或两个最大值后下降, 完成一个周期. 当  $N = \frac{1}{2}k(l+1)$  处  $N_q$  复为零并开始下一循环. 当  $q$  为奇次单位根时,  $N$  取  $kl, kl+1, \dots, k(l+1)-1$  时,  $N_q$  从零开始增加, 取得一或两个最大值后下降, 在  $N = \frac{1}{2}(kl+k)$  和  $\frac{1}{2}(kl+k)-1$  处取得两个相等(非零)最小值后, 重新上升, 达到与前相同的一或两个最大值, 然后下降, 完成一个周期. 当  $N = k(l+1)$  时,  $N_q$  复为零并开始下一循环.

每当  $N_q$  的本征值完成一个周期时, 对应的粒子数本征态就构成一个完备的 Fock 空间

$$\begin{aligned} V_{p+1}^l &= \{|(p+1)l\rangle, |(p+1)l+1\rangle, \dots, |(p+1)(l+1)-1\rangle\} \\ &= \left\{ |(p+1)l+n\rangle = \frac{(a_q^+)^n}{\sqrt{[n]!}} |(p+1)l\rangle, n=0, 1, 2, \dots, p \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

式中  $(p+1)$  就是此完备 Fock 空间的维数, 而且

$$V = \bigcup_{l=0}^{\infty} V_{p+1}^l, \quad (35)$$

$V$  即普通简谐振子的(无穷维) Fock 空间. 在每个 Fock 空间  $V_{p+1}^l$  中, 有唯一的真空态  $|(p+1)l\rangle$ , 有  $N_q|(p+1)l\rangle = 0$ . 但只有  $V_{p+1}^0$  的真空态  $|0\rangle$  才是简谐振子的真空态  $N|0\rangle = 0$ , 而  $|(p+1)l\rangle (l \neq 0)$  虽是  $q$  量子真空, 却是玻色量子的非真空态

$$N|(p+1)l\rangle = (p+1)l|(p+1)l\rangle.$$

由于  $N_q$  本征态经常不为整数, 因此它不是好的粒子数算符. 在仲统计场论<sup>[5]</sup>中, 曾遇到类似的问题, 即  $a^+a$  的谱不为整数, 从而需要重新构造粒子数算符. 在这里, 也需要这样做. 实际上, 不难看到,  $N' = N(\text{mod } p)$  即满足做为  $q$  量子数算符的要求, 它正确地描述  $V_{p+1}^l$  的真空态, 又能给出合理的谱.

#### 四、 $q$ 振子激发的统计性质

本节指出,  $q$  振子的激发实际上是与  $p$  阶仲费密子行为相近, 并对  $p=1, 2$  的情况进行较详细的分析指出, 此时  $q$  振子实际上就是  $1, 2$  阶仲费密振子. 这里给出这两种情况的经典力学对应.

当  $p=1$  时, 完备的 Fock 空间有无穷多个, 如果用简谐振子的粒子数本征态来构造, 就是  $V^l = \{|2l\rangle, |2l+1\rangle\} \quad l=0, 1, 2, \dots$ . 并且不难验证  $a_q$  和  $a_q^+$  满足费

密代数关系

$$[a_q, a_q^+] = 1, \quad (36)$$

$$a_q^2 = (a_q^+)^2 = 0. \quad (37)$$

当作用在 Fock 空间  $V_2^I$  上时有

$$a_q |2l\rangle = 0, \quad (38)$$

$$a_q |2l+1\rangle = \sqrt{(-)^l} |2l\rangle, \quad (39)$$

$$a_q^+ |2l\rangle = (\sqrt{(-)^l})^* |2l+1\rangle, \quad (40)$$

$$a_q^+ |2l+1\rangle = 0. \quad (41)$$

此时的粒子数算符为  $N' = N_q = \frac{1}{2}(a_q^+ a_q - a_q a_q^+) + \frac{p}{2}$ , 谱为  $\{0, 1\}$ . 显然, 经典力学  $q$  振子的振动强度的饱和性质即对应着占有数存在上限 (为 1). 因此这一饱和性质实际上就是泡利不相容原理的经典对应.

当  $p = 2$  时, 经典  $q$  振子的振动模式强度  $\mathcal{N}_q$  取值在 0 到  $2/3$  之间, 正则量子化之后,  $N'$  的本征值为  $0, 1, 2$ , 完备 Fock 空间为  $V_3^I = \{|3l\rangle, |3l+1\rangle, |3l+2\rangle\}$ . 并可验证  $a_q, a_q^+$  满足

$$a_q^+ a_q a_q + a_q a_q^+ a_q + a_q a_q a_q^+ = 2a_q; \quad (42)$$

$$a_q a_q^+ a_q = a_q; \quad (43)$$

$$(a_q^+)^3 = a_q^3 = 0. \quad (44)$$

这就是文献[15]中  $\beta = 1$  的情形, 也就是仲费密子阶为 2 的情形<sup>[14,15]</sup>. 要得到熟知的形式<sup>[13]</sup>需要在  $a_q$  和  $a_q^+$  上多乘上  $\sqrt{2}$  因数. 此时,  $N'$  再次与文献[13]中的定义相符合,

$$N' = a_q^+ a_q - a_q a_q^+ + p/2. \quad (45)$$

当  $p = 3$  时,  $a_q^+ a_q$  的谱与仲统计中  $a^+ a$  的谱的变化趋势相类似, 但具体取值有些差别. 最重要的相似之处, 就在于  $a_q^{p+1} = (a_q^+)^{p+1} = 0$ , 且  $N'$  的谱完全符合仲统计的要求.

## 五、简单讨论

在文献[1—4]及本文中,  $SU_q(2)$  对称性是在双振子体系中实现的. 而实际上, 此对称性存在于单振子体系. 例如可如下构造可观测量

$$J_+ = \frac{1}{q + q^{-1}} a_q^+; \quad (46)$$

$$J_- = -\frac{1}{q + q^{-1}} a_q; \quad (47)$$

$$J_0 = N + \frac{1}{2}. \quad (48)$$

不难验证它们张成  $SU_{q,h}(2)$ . 类似地, 可在单振子的经典力学体系中实现  $SU_{q,h \rightarrow 0}(2)$ .

在文献[4]中讨论了简谐振子的多次  $q$  畸变代数, 并给出不同次  $q$  畸变之间的链式关

系。实际上如果所有的畸变参数  $q_i$  均为实数, 则这条链一定是随  $i$  值增加而无限长的。但当某个  $q_i$  为单位根时, 这条链则可能会截断。例如, 对  $q_i$  为四次单位根的情形, 由 (36), (37) 式可知,  $N_{q_i}^2 = N_{q_i}$ , 从而  $[N_{q_i}]_{q_{i+1}} = N_{q_i}$ , 使得  $q_{i+1}$  畸变是平庸的。再如, 对  $q_i$  为 6 次单位根的情形, 由 (42)–(44) 式有  $N_{q_i}^3 = N_{q_i}$ , 从而  $[N_{q_i}]_{q_{i+1}} = N_{q_i}$ 。因此, 由费密的或 (2 阶) 仲费密的简谐振子实现的李代数, 想通过振子的  $q$  畸变来得到李代数的  $q$  畸变, 结果只能是平庸的。换言之, 畸变后的量子代数是退化的, 与普通的李代数没有区别。这种做法曾经在文献 [6] 中出现过, 在后面的附录中较详细地指出文献 [6] 中对  $B_N$ ,  $D_N$  李代数的  $q$  畸变实际上是平庸的。

此外应强调, 在 (19), (20) 及 (25), (26) 式等号右端可出现一个相位因数<sup>[1,2]</sup>即

$$\alpha_{q_i} \rightarrow \alpha_{q_i} \exp(i\phi(\mathcal{N}_i)) \quad (49)$$

和

$$a_{q_i} \rightarrow a_{q_i} \exp(i\phi(\mathcal{N}_i)). \quad (50)$$

由于这一因数不影响本文的讨论, 因此在前面已略去, 但由于它可能与 Berry 相位<sup>[16]</sup>有密切联系, 因此拟另文讨论。

最后指出, 由于 (24)–(26) 式, 量子力学体系中的力学量  $P_q$  和  $Q_q$  为

$$P_q = i \frac{a_q - a_q^*}{\sqrt{2}}, \quad (51)$$

$$Q_q = \frac{a_q + a_q^*}{\sqrt{2}}. \quad (52)$$

有对易关系

$$[P_q, Q_q] = \pm i\hbar \left| \frac{\cos \frac{\pi}{k} (2N+1)}{\cos \frac{\pi}{k}} \right|. \quad (53)$$

在  $k=2(2m+1)$  且  $N=m$  时, 对易子为零 ( $m$  为正整数或零), 即  $P_q$  与  $Q_q$  完全对易。即使  $q$  取实数, 以上关系也有修正。当选定辛形式 (8) 式后,  $P_q$  与  $Q_q$  不再是共轭量。  $P_q$  与  $Q_q$  在某些情况下可以具有较小的不确定性甚至变得完全可同时确定。

## 附 录

在文献 [6] 中提出了 Clifford 代数的  $q$  畸变, 即  $q$ -Clifford 代数, 并用来实现李代数  $B_N$  和  $D_N$  的  $q$  畸变。实际上, 如果引入生成元  $N_i$ , 使  $\omega_i = q^{-N_i}$ , 则可得到与文献 [6] 中 (2.6) 式等价的关系

$$\psi_i \psi_i^\dagger = [1 - N_i]_{q^2}, \quad \psi_i^\dagger \psi_i = [N_i]_{q^2}.$$

设  $q^2=1$  时  $\psi_i = f_i$ ,  $\psi_i^\dagger = f_i^\dagger$ 。由文献 [6] 中 (2.1)–(2.6) 式可知,  $f_i$ ,  $f_i^\dagger$ ,  $N_i$  即普通费密振子代数的元素, 且  $N_i = f_i^\dagger f_i$ ,  $N_i^2 = N_i$ , 从而  $[N_i]_{q^2} = N_i$ ,  $[1 - N_i]_{q^2} = 1 - N_i$ , 与  $q$  取值无关。这样

$$\psi_i \psi_i^\dagger = f_i f_i^\dagger, \quad \psi_i^\dagger \psi_i = f_i^\dagger f_i,$$

从而

$$\psi_i \psi_i^\dagger + \psi_i^\dagger \psi_i = 1.$$

因而全部的  $q$ -Clifford 代数即

$$[\psi_i, \psi_j^\dagger]_+ = \delta_{ij}, \quad [\psi_i, \psi_j]_+ = [\psi_i^\dagger, \psi_j^\dagger]_+ = 0.$$

从而就是  $f_i, f_i^\dagger, N_i$  的代数, 或者说  $q$ -Clifford 代数是平庸的, 与 Clifford 代数没有差别。因此, 用  $q$ -Clifford

代数表示的  $B_N$  和  $D_N$  李代数的  $q$  畸变也是平庸的, 与普通的  $B_N$ ,  $D_N$  代数没有差别, 畸变参数仅存在于形式上, 与代数没有实质联系.

- [1] 陈卫、常哲、郭汉英, 本刊本期.
- [2] Zhe Chang, Wei Chen and Han-Ying Guo, *J. Phys. A*, **23** (1990), 4185.
- [3] Zhe Chang, Wei Chen, Han-Ying Guo and Hong Yan, to appear in *J. Phys. A*, **23**(1990).
- [4] Zhe Chang, Wei Chen, Han-Ying Guo and Hong Yan, preprint, *ASITP-90-22*, *CCAST-90-18*.
- [5] V. G. Drinfel'd, *Proc. I. C. Berkeley*, (1986).
- [6] T. Hayashi, *Commun. Math. Phys.*, **127**, (1990), 129.
- [7] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10**, (1985), 63; *Commun. Math. Phys.*, **102** (1986), 537.
- [8] L. C. Biedenharn, *J. Phys. A*, **22** (1989), L873.
- [9] A. J. Macfarlane, *J. Phys. A*, **22** (1989), 4581.
- [10] Y. J. Ng, *J. Phys. A*, **23** (1990), 1023.
- [11] Zhe Chang, Han-Ying Guo and Hong Yan, to appear in *Commun. Theor. Phys.*, **14**(4) (1990).
- [12] L. Alvarez-Gaumé, G. Sierra and C. Gomez, *Nucl. Phys.*, **B330** (1990), 347.
- [13] Y. Ohnuki, S. Kamefuchi, *Quantum Field Theory and Parastatistics*, University of Tokyo Press, Tokyo- (1982).
- [14] O. W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(22), (1987), 2507.
- [15] A. Yu. Ignatiev, V. A. Kuzmin, *Yad. Fiz.*, **46**(1988), 786.  
L. C. Biedenharn, P. Truini and H. VanDam, *J. Phys. A*, **22**(1989), L67.
- [16] M. V. Berry, *Proc. R. Soc., A*, **392** (1984), 45; *Sci. Am.*, **46** (1988), 2959.

## A KIND OF $q$ -DEFORMED OSCILLATORS AND THEIR NON-BOSONIC EXCITATIONS WHEN $q^k=1$

YAN HONG   CHEN WEI   CHANG ZHE   GUO HAN-YING

*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing, 100080*

(Received 14 May 1990)

### ABSTRACT

The  $q$ -oscillator is studied in the case of  $q$  being roots of unity, and  $SU_q(2)$  and  $SU_q(1, 1)$ , the algebras realized through the oscillators are indicated. The excitations are found to be non-bosonic and the classical mechanical counterparts are given. Especially when rank  $k$  is 4 and 6, the excitations are shown to be fermi and parafermi like respectively. Short comment upon [6] is given to show that parts of the results therein are trivial.

**PACC:** 0210; 0220; 0365; 1130