

经典 q 变形谐振子及其 $\hbar$ 量子化*

陈 卫 常 哲 郭汉英¹⁾

中国科学院理论物理研究所, 北京, 100080,

1990年4月23日收到

通常所谓的量子包络代数可以在经典 Poisson 括号的意义上实现. 以谐振子系统为例, 给出 $U_q(SU(2))$ 的这种经典实现, 指出这种 q 变形伴随着相空间复坐标的 Beltrami 变形. 并讨论了这种经典 q 变形谐振子系统的 $\hbar$ 量子化, 得到在 Lie 括号意义下的 $U_q(SU(2))$ 代数.

PACC: 0210;0365;1130

一、引 言

量子包络代数或 Lie 代数的 q 变形对应于一种新型的代数结构^[1]. 这种代数结构及其可结合性条件所对应的量子 Yang-Baxter 方程在精确可解统计模型^[2], 可积场论模型^[3], 精确可解 S 矩阵理论^[4], 涉及分数统计的两维场论模型^[5]及共形场论^[6]等问题中起着重要作用. 通常认为, Lie 代数的 q 变形总是与量子化相联系的. 刻画这种变形的参数 q 总是与普朗克常数 $\hbar$ 相关. q 变形代数的经典极限就是通常的 Lie 代数. 但这种相关性是否普适却是一个值得探讨的问题.

可以指出, Lie 代数的 q 变形完全可以在经典 Poisson 括号的意义上实现. 因而 q 变形与 $\hbar$ 量子化可以是两种不同的概念. 本文以由两个非线性经典谐振子组成的系统为例给出通常所指的量子包络代数 $U_q(SU(2))$ 在未变形系统的相空间的 Poisson 括号意义下的实现. 求出正则坐标与正则动量的 q 变形, 使得变形以后的 J_+ 与没有变形的 J_- 在 Poisson 括号的意义上构成 $U_q(SU(2))$ 代数. 可以发现, 如果用复变数来表示正则坐标与正则动量的这种 q 变形, 它们恰好是两个复变数各自的 Beltrami 变换, 即拟共形变换. 而在 $q \rightarrow 1$ 的条件下, 即这种变形消失时, 在 Poisson 括号的意义上 $U_q(SU(2))$ 代数就回到相应的 $SU(2)$ 代数. 进而探讨这种经典 q 变形谐振子系统的量子化, 得到在 Lie 括号意义下的 $U_q(SU(2))$ 代数. 应该强调的是, 本文的结论显然并不限于 $U_q(SU(2))$ 而具一般的意义, 可以推广到一般的量子包络代数.

* 国家自然科学基金资助的课题.

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室).

二、经典线性谐振子系统, $SU(2)$ 代数及其量子化

考虑两个具有相同质量 m 与固有频率 ω 的一维线性谐振子组成的经典系统, 其哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}(P_2^2 + q_2^2). \quad (1)$$

这里已经取 $m = \omega = 1$. 在该系统的相空间 V 上可以给定 Symplectic 形式,

$$\Omega = dq_1 \wedge dP_1 + dq_2 \wedge dP_2. \quad (2)$$

这样就可以在相空间 (V, Ω) 上定义经典 Poisson 括号与哈密顿向量场. 为方便起见, 引进复坐标,

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{p_1 + iq_1}{\sqrt{2}}, & \bar{z}_1 &= \frac{p_1 - iq_1}{\sqrt{2}}, \\ z_2 &= \frac{p_2 + iq_2}{\sqrt{2}}, & \bar{z}_2 &= \frac{p_2 - iq_2}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

经典谐振子系统的哈密顿量 H 及系统相空间上的 Symplectic 形式 Ω 用复坐标可以分别写成

$$H = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2, \quad (4)$$

$$\Omega = \frac{1}{i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2). \quad (5)$$

显然相空间上的基本 Poisson 括号为

$$\{z_i, \bar{z}_j\}_P = -i\delta_{ij}; \{z_i, z_j\}_P = 0; \{\bar{z}_i, \bar{z}_j\}_P = 0 \quad j, i = 1, 2. \quad (6)$$

在相空间 (V, Ω) 上构造一组可观察量

$$J_+ \equiv z_1 \bar{z}_2; \quad J_- \equiv z_2 \bar{z}_1; \quad J_3 \equiv \frac{1}{2}(z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2). \quad (7)$$

容易验证 J_+, J_3 在 Symplectic 形式(5)式给定的 Poisson 括号下构成 $SU(2)$ 代数的生成元, 满足如下的代数关系:

$$\{J_+, J_-\}_P = -i \cdot 2J_3, \quad \{J_3, J_{\pm}\}_P = -i(\pm J_{\pm}). \quad (8)$$

力学量 $J_{\pm}, J_3$ 对应的哈密顿向量场分别为

$$\begin{aligned} X_{J_+} &= i \left(\bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \right); \\ X_{J_-} &= i \left(\bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \right); \\ X_{J_3} &= \frac{i}{2} \left(\bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

哈密顿向量场 $X_{J_{\pm}}, X_{J_3}$ 在 Lie 括号的意义上构成 $SU(2)$ 代数

$$\begin{aligned} [X_{J_+}, X_{J_-}] &= 2X_{J_3}, \\ [X_{J_3}, X_{J_{\pm}}] &= \pm X_{J_{\pm}}. \end{aligned} \quad (10)$$

定义

$$\phi_{jm} = \frac{(-\bar{z}_2)^{j+m} \bar{z}_1^{j-m} + z_1^{j+m} z_2^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}, \quad (11)$$

则有

$$\begin{aligned} X_{J_{\pm}} \phi_{jm} &= -i \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \phi_{j, m \pm 1}, \\ X_{J_3} \phi_{jm} &= -im \phi_{jm}. \end{aligned} \quad (12)$$

因此, ϕ_{jm} 为 $SU(2)$ 代数(10)式的一组表示.

可以看到, 经典线性谐振子系统在 Poisson 括号意义下确定一个 $SU(2)$ 代数结构. 系统力学量的哈密顿向量场在 Lie 括号形式下也确定一个 $SU(2)$ 代数结构.

下面考虑这一系统的量子化. 在通常的正则量子化程序中, 基本 Poisson 括号(6)式改为 Lie 括号. 因而有¹⁾

$$[z_i, \bar{z}_j] = -\delta_{ij}, [z_i, z_j] = 0, [\bar{z}_i, \bar{z}_j] = 0 \quad i, j = 1, 2. \quad (13)$$

利用基本对易关系(13)式计算 $J_{\pm}, J_3$ 之间的对易关系得到

$$[J_+, J_-] = 2J_3, [J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}. \quad (14)$$

(14)式恰好为 $J_{\pm}, J_3$ 在 Lie 括号形式下构成的 $SU(2)$ 代数. 经典线性谐振子系统中 $J_{\pm}, J_3$ 构成 Poisson 括号意义下的 $SU(2)$ 代数, 它的量子化对应为 $SU(2)$ Lie 代数. 反之, 由量子线性谐振子系统确定的 $SU(2)$ Lie 代数有其经典对应, 经典线性谐振子系统构成的 Poisson $SU(2)$ 代数.

在量子谐振子系统中定义真空 $|0\rangle$ 满足

$$\bar{z}_i |0\rangle = 0 \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

令

$$|jm\rangle \equiv \frac{(z_1)^{j+m} (z_2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0\rangle, \quad (16)$$

不难验证下列关系成立:

$$\begin{aligned} J_{\pm} |jm\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle, \\ J_3 |jm\rangle &= m |jm\rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

因此, $|jm\rangle$ 构成 $SU(2)$ Lie 代数的一组表示. 它们与经典情形下的 ϕ_{jm} 完全对应.

三、相空间 (V, Ω) 上的经典 q 变形谐振子系统及 $U_q(SU(2))$ Poisson 代数

在上节给出的相空间 (V, Ω) 中构造经典的 q 变形非线性谐振子系统的力学量, 并以原来的 Symplectic 形式 Ω ((5)式)为出发点, 在原来的 Poisson 括号意义下实现 $U_q(SU(2))$ 代数. 值得注意的是, 在这里并没有将原来的相空间及 Symplectic 形式 (V, Ω) 变形, 而只是构造变形的力学量, 以实现 $U_q(SU(2))$ 代数.

1) 这里, 仍用同样的符号表示正则量子化后力学量的对应算符.

引入由 $z_i, \bar{z}_i (i = 1, 2)$ 构造的新的复坐标 $z'_i, \bar{z}'_i$ 作为原来相空间 (V, Q) 上的力学量

$$\begin{aligned} z_i &\rightarrow z'_i = W_i(z_i, \bar{z}_i), \\ \bar{z}_i &\rightarrow \bar{z}'_i = \bar{W}_i(z_i, \bar{z}_i). \end{aligned} \quad (18)$$

并引入哈密顿量

$$H' = z'_{12}\bar{z}'_1 + z'_{21}\bar{z}'_2 \quad (19)$$

来描述变形后的谐振子系统的动力学。由于相空间与 Symplectic 形式 (V, Q) 没有改变,因而变形后的复坐标(18)式的 Poisson 括号为

$$\begin{aligned} \{z'_1, \bar{z}'_1\}_P &= i \left(\frac{\partial W_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}_1} \cdot \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial z_1} \right) \equiv F(z_1, \bar{z}_1); \\ \{z'_2, \bar{z}'_2\}_P &= i \left(\frac{\partial W_2}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial \bar{z}_2} - \frac{\partial W_2}{\partial \bar{z}_2} \cdot \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial z_2} \right) \equiv G(z_2, \bar{z}_2). \end{aligned} \quad (20)$$

$$\{z'_i, z'_j\}_P = 0; \{\bar{z}'_i, \bar{z}'_j\}_P = 0; \{z'_i, \bar{z}'_j\}_P = 0; \{z'_2, \bar{z}'_1\}_P = 0 \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

这里 $F(z_1, \bar{z}_1), G(z_2, \bar{z}_2)$ 为待定函数。

在相空间 (V, Q) 上定义可观察量

$$J'_+ \equiv z'_1\bar{z}'_2; J'_- \equiv z'_2\bar{z}'_1; J'_3 \equiv \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2). \quad (22)$$

注意,这里 $J'_\pm$ 是用变形后的复坐标(18)式定义的,而 $J'_3 = J_3$ 仍用 (V, Q) 上原来的复坐标定义。显然, $J'_\pm, J'_3 = J_3$ 之间的 Poisson 括号可以由基本 Poisson 括号(6)及(20),(21)式给出。如果要求 $J'_\pm, J'_3$ 在 Poisson 括号的意义上构成 $U_q(SU(2))$ 代数

$$\{J'_+, J'_-\}_P = -i[2J'_3]; \{J'_3, J'_\pm\}_P = -i(\pm J'_\pm). \quad (23)$$

这里 $[2J'_3] \equiv q^{J'_3} - q^{-J'_3} = \frac{\sinh(\gamma \cdot 2J'_3)}{\sinh \gamma}$, $\gamma = \log q$ (为方便起见,在本文中取 q 为实数)。

则得到一组关于 $W_i, \bar{W}_i$ 的微分方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(W_1\bar{W}_2)}{\partial \bar{z}_1} \cdot \frac{\partial(\bar{W}_1W_2)}{\partial z_1} + \frac{\partial(W_1\bar{W}_2)}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial(\bar{W}_1W_2)}{\partial \bar{z}_2} \\ &- \frac{\partial(W_1\bar{W}_2)}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial(\bar{W}_1W_2)}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial(W_1\bar{W}_2)}{\partial \bar{z}_2} \cdot \frac{\partial(\bar{W}_1W_2)}{\partial z_2} \\ &= \frac{\sinh\{\gamma(z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2)\}}{\sinh \gamma}, \end{aligned} \quad (24a)$$

$$z_1 \frac{\partial(W_1\bar{W}_2)}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial(W_1\bar{W}_2)}{\partial z_2} - \bar{z}_1 \frac{\partial(W_1\bar{W}_2)}{\partial \bar{z}_1} - \bar{z}_2 \frac{\partial(W_1\bar{W}_2)}{\partial \bar{z}_2} = W_1\bar{W}_2. \quad (24b)$$

不难证明,若取

$$\begin{aligned} F(z_1, \bar{z}_1) &= -i \sqrt{\frac{\gamma}{\sinh \gamma}} \cosh(\gamma z_1 \bar{z}_1), \\ G(z_2, \bar{z}_2) &= -i \sqrt{\frac{\gamma}{\sinh \gamma}} \cosh(\gamma z_2 \bar{z}_2) \end{aligned} \quad (25)$$

及

$$\begin{aligned} W_1 \bar{W}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma \sinh \gamma}} \sinh(\gamma z_1 \bar{z}_1), \\ W_2 \bar{W}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma \sinh \gamma}} \sinh(\gamma z_2 \bar{z}_2), \end{aligned} \quad (26)$$

则 $U_q(SU(2))$ Poisson 代数(23)式得到满足. 由(25),(26)式自然可得

$$\begin{aligned} z'_1 &= W_1(z_1, \bar{z}_1) = \sqrt{\frac{\sinh(\gamma z_1 \bar{z}_1)}{\gamma \sinh \gamma}} z_1 e^{i g_1(z_1, \bar{z}_1)}, \\ z'_2 &= W_2(z_2, \bar{z}_2) = \sqrt{\frac{\sinh(\gamma z_2 \bar{z}_2)}{\gamma \sinh \gamma}} z_2 e^{i g_2(z_2, \bar{z}_2)}. \end{aligned} \quad (27)$$

这里 g_1, g_2 分别为 $z_1 \bar{z}_1$ 与 $z_2 \bar{z}_2$ 的任意函数. 定义

$$\mu_i = \frac{\frac{\partial W_i}{\partial \bar{z}_i}}{\frac{\partial W_i}{\partial z_i}} \quad i = 1, 2. \quad (28)$$

当 g_1, g_2 取作常数时, 可得

$$\mu_i = \frac{z_i \gamma z_i \bar{z}_i \cosh(\gamma z_i \bar{z}_i) - \sinh(\gamma z_i \bar{z}_i)}{\bar{z}_i \gamma z_i \bar{z}_i \cosh(\gamma z_i \bar{z}_i) + \sinh(\gamma z_i \bar{z}_i)}. \quad (29)$$

显然(29)式中的 μ_i 是满足下述条件的 Beltrami 伸缩比:

$$|\mu_i| < 1. \quad (30)$$

这说明变换(18)式在这种条件下为拟共形变换^[7].

看到(27)式给定的所谓 q 变形非线性谐振子系统, 的确可以确定一个 Poisson 括号意义下的 $U_q(SU(2))$ 代数. 该 q 变形系统的哈密顿量((19)式)与 J'_3, J'^2 的 Poisson 括号为零, 但与 J'_+, J'_- 之间的 Poisson 括号不为零,

$$\{H', J'_3\}_P = 0; \{H', J'^2\}_P = 0; \{H', J'_\pm\}_P = 0. \quad (31)$$

这在某种意义上与量子理论的情况非常相似, 但这里的 q 变形系统仍是经典系统, 而不是 $\hbar$ 量子系统. q 变形的经典非线性谐振子系统的正则运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \{p_i, H'\}_P = -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma \sinh \gamma}} \cosh\left(\gamma \frac{p_i^2 + q_i^2}{2}\right) \cdot q_i, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \{q_i, H'\}_P = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma \sinh \gamma}} \cosh\left(\gamma \cdot \frac{p_i^2 + q_i^2}{2}\right) \cdot p_i \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (32)$$

(32)式的解为

$$\begin{aligned} p_i &= A_i \cos\left\{\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\sinh \gamma}} \cosh \frac{A_i^2}{2}\right)t\right\}, \\ q_i &= A_i \sin\left\{\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\sinh \gamma}} \cosh \frac{A_i^2}{2}\right)t\right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

从上式看到 q 变形系统的确为经典可实现的物理系统。其运动形式为振动频率与振幅有依赖关系的谐振动。

四、经典 q 变形谐振子系统的量子化及 $U_q(SU(2))$ Lie 代数

从上节看到, $J'_\pm, J'_3$ 仍然是相空间 $(V, \mathcal{Q})$ 上的可观察量。所以 q 变形经典非线性谐振子的量子化, 仍然从 $z_i, \bar{z}_i$ 的基本对易子(13)式出发。首先给定变换(27)式即 $z_i, \bar{z}_i$ 如下的序:

$$\begin{aligned} z'_i &= z_i \sqrt{\frac{\sinh(\gamma \bar{z}_i z_i)}{\gamma \sinh \gamma}} \cdot e^{ig_1(z_i \bar{z}_i)} \\ &= \sqrt{\frac{\sinh(\gamma \bar{z}_i z_i)}{\gamma \sinh \gamma}} \cdot e^{ig_1(z_i \bar{z}_i)} \cdot z_i; \\ \bar{z}'_i &= \bar{z}_i \sqrt{\frac{\sinh(\gamma z_i \bar{z}_i)}{\gamma \sinh \gamma}} \cdot e^{ig_2(z_i \bar{z}_i)} \\ &= \sqrt{\frac{\sinh(\gamma z_i \bar{z}_i)}{\gamma \sinh \gamma}} \cdot e^{ig_2(z_i \bar{z}_i)} \cdot \bar{z}_i \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (34)$$

定义

$$N'_i = N_i \equiv z_i \bar{z}_i, \quad (35)$$

由(34)式可得

$$\begin{aligned} z'_i \bar{z}'_i &= \sqrt{\frac{\sinh \gamma}{\gamma}} [N_i], \\ \bar{z}'_i z'_i &= \sqrt{\frac{\sinh \gamma}{\gamma}} [N_i + 1]; \\ [z'_i, z'_i] &= \sqrt{\frac{\sinh \gamma}{\gamma}} ([N_i + 1] - [N_i]) \\ &= \sqrt{\frac{\sinh \gamma}{\gamma}} \frac{\cosh \frac{\gamma}{2} (2N_i + 1)}{\cosh \frac{\gamma}{2}} \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (36)$$

(36)式与 Marcfarlane, Biedenharn, Ng 和宋行长^[8]的结果一致。

利用(36)式容易得到 $J'_\pm, J'_3$ 满足的 Lie 代数关系

$$[J'_+, J'_-] = \frac{\sinh \gamma}{\gamma} [2J'_3]; [J'_3, J'_\pm] = \pm J'_\pm. \quad (37)$$

令

$$\tilde{J}'_\pm = \sqrt{\frac{\gamma}{\sinh \gamma}} J'_\pm; \quad \tilde{J}'_3 = J'_3, \quad (38)$$

则有

$$[\tilde{J}_+, \tilde{J}_-] = [2\tilde{J}_3]; [\tilde{J}_3, \tilde{J}_\pm] = \pm \tilde{J}_\pm. \quad (39)$$

(39)式恰好为 Lie 括号形式下的 $U_q(SU(2))$ 代数. 这说明 q 变形的经典非线性谐振子系统的量子化在一个与 q 有关的常数因数的等价意义下可以得到 Lie 括号形式的 $U_q(SU(2))$ 代数.

定义本征态

$$|n_i\rangle' = \frac{(z'_i)^n}{\sqrt{[n]!}} |0\rangle, \quad (40)$$

式中

$$[n]! = [n][n-1]\cdots[1], \quad [x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}},$$

则有

$$\begin{aligned} N'_i |n_i\rangle' &= n_i |n_i\rangle'; \\ z'_i |n_i\rangle' &= [n_i + 1]^{1/2} |n_i + 1\rangle'; \\ \bar{z}'_i |n_i\rangle' &= [n_i]^{1/2} |n_i - 1\rangle'. \end{aligned} \quad (41)$$

令

$$|jm\rangle' = \frac{(z'_1)^{j+m}(z'_2)^{j-m}}{\sqrt{[j+m]![j-m]!}} |0\rangle, \quad (42)$$

容易验证

$$\begin{aligned} J'_\pm |jm\rangle' &= \sqrt{\frac{\sinh \gamma}{\gamma}} \sqrt{[j \mp m][j \pm m + 1]} |j, m \pm 1\rangle'; \\ J'_3 |jm\rangle' &= m |jm\rangle', \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}'_\pm |jm\rangle' &= \sqrt{[j \mp m][j \pm m + 1]} |j, m \pm 1\rangle'; \\ \tilde{J}'_3 |jm\rangle' &= m |jm\rangle'. \end{aligned} \quad (44)$$

从而 $|jm\rangle'$ 为 $\tilde{J}'_\pm, \tilde{J}'_3$ 构成的 Lie 括号形式下的 $U_q(SU(2))$ 代数的一组表示.

五、讨 论

本文通过一个简单的例子说明, q 变形与 $\hbar$ 量子化可以是两个独立的概念. 参数 q 与普朗克常数 $\hbar$ 可以是完全无关的两个独立参数. 量子化的 q 变形系统当 $\hbar \rightarrow 0$ 时回到经典的 q 变形系统; 而再取 $q \rightarrow 1$, 就回到经典的没有变形的系统. 当然也可以对量子化的 q 变形系统首先取 $q \rightarrow 1$ 的极限, 这样得到的显然是没有 q 变形的量子化系统; 再取 $\hbar \rightarrow 0$, 仍回到原来的没有 q 变形的经典系统.

有趣的是, 经典的 q 变形, 对于相空间的复坐标而言, 是具有特定 Beltrami 伸缩比的拟共形变换. q 变形普适包络代数(即通常的量子包络代数)与 Beltrami 变换的这种联系显然值得进一步探讨. 由于所讨论的简单的例子的相空间 (V, Ω) 为复 2 维 Symplectic 空间, 这表明, 量子群与多维复流形的变形理论^[2]会有深刻的联系. 对此我们将

另文探讨。

如在引言中所指出的,本文的模型容易推广到更一般的情形,相应的结论具有一般的意义。即可以推广到任意情形的量子包络代数。而且,利用谐振子系统可以探讨无限维代数,如 Virasoro 代数与 Kac-Moody 代数的 q 变形及其 $\hbar$ 量子化。这些问题正在研究之中。

本文并没有讨论 $U_q(SU(2))$ 代数的 Hopf 代数结构,如何利用这类振子模型探讨这些优美的代数结构当然也是值得探讨的问题。

- [1] L. D. Fadeev, In: Les Houches Lectures 1982, Elsevier, Amsterdam, (1984);
P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, Lecture in Physics, Vol. 151 Springer, Berlin, (1982) p. 61;
W. G. Drinfeld, Proc. Intern. Congress of Mathematicians (Berkeley), Vol. 1, Academic Press, New York, (1986), p. 793;
M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, 11(1986), 247.
- [2] R. J. Baxter, Exactly Solved Models in Statistical Mechanics, Academic Press, (1982).
- [3] E. K. Sklyanin, Zap. Nauchn. Sem. LOMI 95 55 (1980), (*J. Soviet Math.*, 19(1982));
H. J. de Vega *et al.*, *Nucl. Phys.*, B284, (1984), 377.
- [4] A. B. and A. B. Zamolodchikov, *Ann. Phys.*, 80, (1979), 25.
- [5] J. Frohlich, Statistics of Fields, The Yang-Baxter equation, and Theory of Knots and Links, Cargèse Lectures, (1987), to appear in Non-perturbative Quantum Field Theory, Plenum.
- [6] G. Moor and N. Seiberg, IASSNS-HEP-88/18 and 88/35.
- [7] S. L. Krushkal, Quasiconformal Mappings and Riemann Surfaces, V. H. Winston & Sons, (1979).
- [8] A. J. Macfarlane, *J. Phys.*, A22 (1989), 4581.
L. C. Biedenharn, *J. Phys.*, A 22(1989), L873.
Y. J. Ng, North Carolina Univ. Preprint, IFP-365-UNC. (1989).
X. C. Song, *J. Phys.*, A23 (1990), L821.
- [9] K. Kodaria, Complex Manifold and Deformation of Complex Structures, Springer-Verlag, (1987).

CLASSICAL q -DEFORMED HARMONIC OSCILLATORS AND THEIR $\hbar$ QUANTIZATION

CHEN WEI CHANG ZHE GUO HAN-YING

Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing, 100080

(Received 23 April 1990)

ABSTRACT

We point out that the usual quantum enveloping algebra can be realized at classical level in the sense of Poisson bracket. As an example, we give the classical realization of $U_q(SU(2))$ by a system of classical harmonic oscillators. We show that the q -deformation corresponds to Beltrami deformation of the complex coordinate of phase space. $\hbar$ quantization of the system of the classical deformed oscillators is also discussed, $U_q(SU(2))$ algebra in Lie bracket obtained.

PACC: 0210; 0365; 1130