

量子 Hall 效应与 Berry 相因数

陈 成 明 张 全

浙江大学物理系, 杭州, 310027

1990 年 5 月 14 日收到

本文将绝热过程中的 Berry 相因数的概念推广到简并系统, 并且研究了量子 Hall 效应与 Berry 相因数之间的关系. 证明了不论是整数还是分数量子 Hall 电导率都对应于特殊的 Berry 相因数.

PACC: 0210;0370

一、绝热过程中的 Berry 相因数

Berry 相因数是量子力学中具有明显的不可积拓扑性质的物理量, 它不仅可以用来解释已被证实的 Aharonov-Bohm 效应^[1]和 Aharonov-Susskind^[2]效应, 最近, Delacretaz^[3]验证了 Na_3 分子体系中 Berry 相因数的存在. Tomito 和 Chiao^[4]又成功地实现了 Chiao 本人和吴咏时^[5]提出的观察玻色子 Berry 相因数的光纤实验.

本节将绝热过程中的 Berry 相因数的概念推广到简并系统, 为下一节研究量子 Hall 效应与 Berry 相因数之间的关系作准备.

考虑某个量子系统, 其哈密顿量 H 依赖于参量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$. 设 α 随时间 t 缓慢变化且 $\alpha(T) = \alpha(0)$, 则在参量 α 空间中定义了一个闭合回路 C , 从 $t = 0$ 到 $t = T$, 该系统(哈密顿量为 $H(\alpha(t))$) 在参量 α 空间中的闭合回路 C 上绕行了一周(假定 T 足够大, 使绝热定理能够近似成立).

若 $t = 0$ 时, 系统处于 $H(\alpha(0))$ 的某一本征态 $|\phi_n(\alpha(0))\rangle$,

$$H(\alpha(0))|\phi_n(\alpha(0))\rangle = E_n(\alpha(0))|\phi_n(\alpha(0))\rangle,$$

则根据量子力学的绝热定理: 在随后的任一瞬时, 该系统都将处于该瞬时的哈密顿量 $H(\alpha(t))$ 的对应本征态 $|\phi_n(\alpha(t))\rangle$,

$$H(\alpha(t))|\phi_n(\alpha(t))\rangle = E_n(\alpha(t))|\phi_n(\alpha(t))\rangle.$$

当 $t = T$ 时, $H(\alpha(T)) = H(\alpha(0))$, 系统将回到原来的定态 $|\phi_n(\alpha(0))\rangle$, 但相差一个相因数. 这个相因数是什么? 通常的答案是 $|\phi(T)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt E_n(\alpha(t))\right\}|\phi(0)\rangle$. 但是, Berry^[6]指出, 除了上面熟悉的动力学相因数外, 还存在一个与回路 C 有关的相因数 $\gamma_n(C)$, 即

$$|\phi(T)\rangle = \exp(i\gamma_n(C))\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt E_n(\alpha(t))\right)|\phi(0)\rangle.$$

下面给出计算 $\gamma_n(C)$ 的明显表达式.

设

$$|\phi(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\alpha(t'))\right\} \exp(i\gamma_n(t)) |\phi_n(\alpha(t))\rangle. \quad (1)$$

将上式代入 Schrödinger 方程

$$H(\alpha(t)) |\phi(t)\rangle = i\hbar |\dot{\phi}(t)\rangle. \quad (2)$$

整理可得

$$\dot{\gamma}_n(t) = i\langle \phi_n(\alpha(t)) | \nabla_\alpha | \phi_n(\alpha(t)) \rangle \cdot \dot{\alpha}(t),$$

所以

$$\gamma_n(C) = \gamma_n(T) - \gamma_n(0) = i \oint_C \langle \phi_n(\alpha) | \nabla_\alpha | \phi_n(\alpha) \rangle d\alpha \quad (3)$$

这就是关于 Berry 相因数 $\gamma_n(C)$ 的基本计算式.

以上的推导实际上是基于这样的假设: 1) 系统能级是分立的; 2) 能级非简并.

下面对简并情形的 Berry 相因数作一讨论.

设 E_n 能级处有 f 度简并,

$$\begin{aligned} H(\alpha) |\phi_{nv}(\alpha)\rangle &= E_n(\alpha) |\phi_{nv}(\alpha)\rangle \\ v &= 1, 2, \dots, f. \end{aligned} \quad (4)$$

适当选择 $|\phi_{nv}\rangle (v=1, 2, \dots, f)$, 使其正交归一. 设初态为

$$|\phi(0)\rangle = \sum_v a_v |\phi_{nv}(\alpha(0))\rangle,$$

则

$$|\phi(T)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt E_n(\alpha(t))\right\} \sum_v a_v e^{i\gamma_{nv}(C)} |\phi_{nv}(\alpha(0))\rangle. \quad (5)$$

由此可见: 在一般情况下, 系统在参量空间的闭合回路 C 上绕行一周并不能回到其初始态, 而只有对参量空间的某些特殊的回路, 系统才能回到原态. 这时, $\gamma_{nv}(C)$ 与 v 无关, 可将其提出求和号

$$\begin{aligned} |\phi(T)\rangle &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt E_n(\alpha(t))\right\} \exp(i\gamma_n(C)) \sum_v a_v |\phi_{nv}(\alpha(0))\rangle \\ &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt E_n(\alpha(t))\right\} \exp(i\gamma_n(C)) |\phi_n(0)\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

式中的 $\gamma_n(C)$ 即为 Berry 相因数. 而在一般情况下, 由于系统不能回到初始态, 因而不存在上述意义的 Berry 相因数.

先计算(5)式中 $\gamma_{nv}(C)$.

令

$$|\phi(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\alpha(t'))\right\} \sum_v a_v e^{i\gamma_{nv}(t)} |\phi_{nv}(\alpha(t))\rangle. \quad (7)$$

将上式代入 Schrödinger 方程(2)得

$$\sum_v a_v \dot{\gamma}_{nv}(t) e^{i\gamma_{nv}(t)} |\phi_{nv}(\alpha(t))\rangle = i \sum_v a_v e^{i\gamma_{nv}(t)} \nabla_\alpha |\phi_{nv}(\alpha)\rangle \cdot \dot{\alpha}.$$

上式等号两边左乘 $\langle \phi_{nv'}(\mathbf{a}(t)) |$ 得

$$a_{v'} \dot{\gamma}_{nv'}(t) e^{i\gamma_{nv'}(t)} = \sum_v i a_v e^{i\gamma_{nv}(t)} \langle \phi_{nv'}(\mathbf{a}) | \nabla_{\mathbf{a}} | \phi_{nv}(\mathbf{a}) \rangle \cdot \dot{\mathbf{a}}.$$

假定对某个具体系统,有

$$\langle \phi_{nv'}(\mathbf{a}) | \nabla_{\mathbf{a}} | \phi_{nv}(\mathbf{a}) \rangle = 0 \quad (v \neq v'), \quad (8)$$

则可以得

$$\dot{\gamma}_{nv}(t) = i \langle \phi_{nv}(\mathbf{a}) | \nabla_{\mathbf{a}} | \phi_{nv}(\mathbf{a}) \rangle \cdot \dot{\mathbf{a}}.$$

故有

$$\gamma_{nv}(C) = i \oint_C \langle \phi_{nv}(\mathbf{a}) | \nabla_{\mathbf{a}} | \phi_{nv}(\mathbf{a}) \rangle \cdot d\mathbf{a}. \quad (9)$$

前面所说的参量 $\mathbf{a}$ 空间中特殊回路,即指这样的回路,它们使积分(9)式与 v 无关.至于如何具体地寻找这些特殊的回路,只有对具体的系统作具体的分析.

利用(8)式和归一化条件,可以将(9)式写成另一种形式

$$\begin{aligned} \gamma_n(C) &= i \sum_v \sum_{v'} a_v^* a_{v'} \oint_C \langle \phi_{nv}(\mathbf{a}) | \nabla_{\mathbf{a}} | \phi_{nv'}(\mathbf{a}) \rangle \cdot d\mathbf{a} \\ &= i \oint_C \langle \phi(\mathbf{a}) | \nabla_{\mathbf{a}} | \phi(\mathbf{a}) \rangle \cdot d\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (10)$$

从以上的讨论可以看出,简并情形与非简并情形相比有其独特性.在非简并的情况下,系统只要在参量空间中绕一周,则必定会回到初始态.而在简并存在的情况下,只有对某些特殊的参量空间的回路,系统才能回到初始态,才存在前述意义下的 Berry 相因数,其条件要比非简并情形苛刻些.

二、Berry 相因数与 Hall 电导率

关于量子 Hall 效应,几年来许多科学工作者作了大量的工作,本文主要讨论 Hall 电导率与 Berry 相因数的关系.采用的物理模型是二维电子气模型.

假设二维系统几何尺寸如图 1 所示,外磁场 $\mathbf{B}$ 加在 Z 方向.

由于实际上存在电子-电子相互作用及衬底背景电势,系统(多体)的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P}_i - \frac{e}{c} \mathbf{A}_i \right)^2 \\ &+ \sum_{i < j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \sum_i V_0(\mathbf{r}_i), \end{aligned} \quad (11)$$

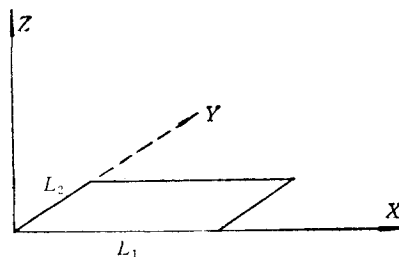


图 1

式中等号右边第二项为电子间的库仑相互作用,第三项为衬底电势(该哈密顿量不含外电场项).

1. 广义周期性边界条件

采用 Landau 规范: $\mathbf{A} = -By\hat{x}$, 并定义

$$t_i(L_1\hat{x}) = \exp\left(i\frac{L_1}{\hbar}(P_{ix} + \frac{e}{C}By_i)\right), \quad (12a)$$

$$t_i(L_2\hat{y}) = \exp\left(i\frac{L_2}{\hbar}P_{iy}\right), \quad (12b)$$

容易证明

$$t_i(L_1\hat{x})t_i(L_2\hat{y}) = t_i(L_2\hat{y})t_i(L_1\hat{x})\exp(i2\pi N_i), \quad (13)$$

式中 $N_i = \frac{L_1L_2eB}{C\hbar}$, 为整数. 故有

$$[t_i(L_1\hat{x}), t_i(L_2\hat{y})] = 0. \quad (14)$$

又因为

$$V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \int \tilde{V}(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \cdot d\mathbf{k} \quad (15a)$$

改写成分立形式

$$V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{(2\pi)^2}{L_1L_2} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{V}(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)], \quad (15b)$$

并假设

$$V_0(x + L_1, y) = V_0(x, y + L_2) = V_0(x, y), \quad (16)$$

显然, 由(15b)和(16)式得到

$$[t_i(L_1\hat{x}), H] = [t_i(L_2\hat{y}), H] = 0. \quad (17)$$

所以, $t_i(L_1\hat{x})$, $t_i(L_2\hat{y})$ 和 H 可同时对角化. 假定 ϕ 是 H 的一个本征函数, 则它必然也是 $t_i(L_1\hat{x})$ 和 $t_i(L_2\hat{y})$ 的本征函数. 选择 ϕ 使其对所有的 $t_i(L_1\hat{x})$ 和 $t_i(L_2\hat{y})$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 的本征值为 1, 这样就给出广义周期性边界条件

$$\phi(\dots; x_i + L_1, y_i; \dots) = \exp(-ieBy_iL_1/c\hbar)\phi(\dots; x_i, y_i; \dots), \quad (18a)$$

$$\phi(\dots; x_i, y_i + L_2; \dots) = \phi(\dots; x_i, y_i; \dots). \quad (18b)$$

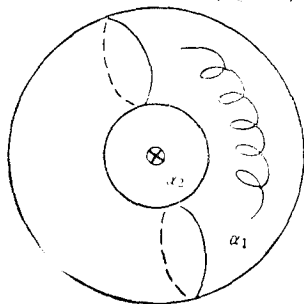


图 2

这个边界条件在下文的讨论中将起重要作用.

由(18a)和(18b)两式可见, 系统处于一个拓扑环形曲面上, 由于没有 Hall 电场, 就不会有 Hall 电流. 为了产生 Hall 电流, 可以通过引入螺线管, 改变螺线管中的磁通量即可产生电场. 为了使电场可指向任何方向, 设引入的两个螺线管其通量分别为 α_1 和 α_2 (以 $\hbar/e$ 为单位), 一个置于该环形曲面内部, 而另一个则通过其中心(见图 2). 这样, 原来的哈密顿量中应加入两个耦合项, 而成为

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \sum_i \frac{1}{2m} \left[\left(P_{ix} + \frac{eB}{C} y_i + \frac{\hbar\alpha_1}{L_1} \right)^2 + \left(P_{iy} + \frac{\hbar\alpha_2}{L_2} \right)^2 \right] \\ & + \sum_{i < j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \sum_i V_0(\mathbf{r}_i). \end{aligned} \quad (19)$$

也即现在的哈密顿量成为依时变化的, 其对时间的依赖性来源于 α_1 和 α_2 的依时变化。由于通常感兴趣的是弱 E 极限, 根据 Faraday 定律, 这对应于 α_1, α_2 的绝热变化。在绝热极限下, α_1 和 α_2 的作用如同两个参量, 因而此时的哈密顿量为双参量哈密顿量。

2. Hall 电导率 σ_H

为了计算 Hall 电导率, 采用 Kubo 公式

$$\sigma_H = i \frac{e^2 \hbar}{L_1 L_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \phi_0 | V_1 | \phi_n \rangle \langle \phi_n | V_2 | \phi_0 \rangle - \langle \phi_0 | V_2 | \phi_n \rangle \langle \phi_n | V_1 | \phi_0 \rangle}{(E_0 - E_n)^2} \quad (20)$$

式中

$$V_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \left(p_i x + \frac{eB}{C} y_i + \frac{\hbar \alpha_1}{L_1} \right) = \frac{L_1}{\hbar} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha_1}, \quad (21a)$$

$$V_2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \left(p_i y + \frac{\hbar \alpha_2}{L_2} \right) = \frac{L_2}{\hbar} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha_2}, \quad (21b)$$

ϕ_0 和 ϕ_n 分别为基态和激发态波函数。故 σ_H 又可写成

$$\begin{aligned} \sigma_H &= i \frac{e^2}{\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\langle \phi_0 \left| \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha_1} \right| \phi_n \right\rangle \left\langle \phi_n \left| \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha_2} \right| \phi_0 \right\rangle - \left\langle \phi_0 \left| \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha_2} \right| \phi_n \right\rangle \left\langle \phi_n \left| \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \alpha_1} \right| \phi_0 \right\rangle}{(E_0 - E_n)^2} \\ &= i \frac{e^2}{\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\langle \phi_0 \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right| \phi_n \right\rangle \left\langle \phi_n \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right| \phi_0 \right\rangle - \left\langle \phi_0 \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right| \phi_n \right\rangle \left\langle \phi_n \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right| \phi_0 \right\rangle \right] \\ &= i \frac{e^2}{\hbar} \left[\left\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \alpha_1} \left| \frac{\partial \phi_0}{\partial \alpha_2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_0}{\partial \alpha_2} \left| \frac{\partial \phi_0}{\partial \alpha_1} \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

定义

$$J = \langle \phi_0 | \nabla_\sigma | \phi_0 \rangle, \quad (23)$$

则 σ_H 可简写为

$$\sigma_H = i \frac{e^2}{\hbar} \left[\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \right]. \quad (24)$$

以下的讨论将基于这样的假设: 存在着一个将基态与激发态隔开的能隙。这实际上是产生量子 Hall 效应的必要条件。

为方便起见, 将(11)式的哈密顿量记作 $H(\cdots, P_i - \frac{e}{c} A_i, \cdots)$, 而将(19)式的哈密顿量记作 $\tilde{H}(\cdots, P_i - \frac{e}{c} (A_i + \alpha_1 + \alpha_2), \cdots)$ 。其中 α_1 和 α_2 分别为螺线管 α_1 和 α_2 在二维表面上产生的矢量势。 H 的基态 ϕ_0 满足

$$H(\cdots, P_i - \frac{e}{c} A_i, \cdots) \phi_0 = E_0 \phi_0, \quad (25)$$

加 α_1 和 α_2 后的 $\tilde{H}$ 的基态 ϕ 满足

$$\tilde{H}(\cdots, P_i - \frac{e}{c} (A_i + \alpha_1 + \alpha_2), \cdots) \phi = E \phi. \quad (26)$$

作规范变换

$$\phi(\cdots; x_i, y_i; \cdots) = \exp\left(i \frac{\alpha_1}{L_1} \sum_i x_i\right) \exp\left(i \frac{\alpha_2}{L_2} \sum_i y_i\right) u(\cdots; x_i, y_i; \cdots). \quad (27)$$

可证明 u 满足

$$H\left(\cdots, P_i - \frac{e}{C} A_i, \cdots\right) u = E u. \quad (28)$$

由于(26)式中的 ϕ 必须满足广义周期边界条件(18)式, 可以推得 u 也满足下列条件:

$$u(\cdots; X_i + L_1, Y_i; \cdots) = \exp(-i\alpha_1) \exp(-ieBY_iL_1/\hbar) u(\cdots; X_i, Y_i; \cdots), \quad (29a)$$

$$u(\cdots; X_i, Y_i + L_2; \cdots) = \exp(-i\alpha_2) u(\cdots; X_i, Y_i; \cdots). \quad (29b)$$

可见如果 α_1 和 α_2 不是 2π 的整数倍时, 则 u 不满足(18)式的广义周期性边界条件. 反之, 当 α_1 和 α_2 是 2π 的整数倍时, 由于 u 和 ϕ_0 同为 $H\left(\cdots, P_i - \frac{e}{C} A_i, \cdots\right)$ 的基态本征函数, 且满足相同的边界条件, 所以必有 $E = E_0$, 而至于 u 与 ϕ_0 是否相同则必须分两种情况加以讨论:

1) 基态非简并情形 当 α_1 和 α_2 绝热地改变 2π 时, 由于存在能隙, 系统必定回到初始态 (差一个相因数), 这是绝热定理所保证的. 这样整个 α 空间可以由一个单位原胞 ($0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$) 来代替 (见图 3). 任何有物理意义的与 α 无关的物理量都必须在这个单位原胞上求平均. (这实际上也是对各种可能边界条件求平均, 而有意义的物理量是与边界条件无关的.)

所以, Hall 电导率 σ_H 为

$$\begin{aligned} \sigma_H &= i \frac{e^L}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\alpha_2 \int_0^{2\pi} d\alpha_1 \left[\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \right] \\ &= i \frac{e^2}{2\pi\hbar} \oint_{C_1} \mathbf{J} \cdot d\alpha \\ &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \left[i \oint_{C_1} \langle \phi_0 | \nabla_\alpha | \phi_0 \rangle \cdot d\alpha \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

不难看出, 上式等号右边方括号内的积分实际上是上一节所指出的 Berry 相因数 $\gamma_0(C_1)$. 所以, σ_H 又可写成

$$\sigma_H = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \gamma_0(C_1). \quad (31)$$

这就给出 Hall 电导率与 Berry 相因数的关系: 两者仅差一些物理常数. 在后面附录中给出在基态非简并的情况下, 只能产生整数量子 Hall 效应, 且 $\sigma_H = Ne^2/h$ (N 为填充因数, 这里为整数), 因而, 把 N 与 Berry 相因数联系起来.

2) 基态简并情形 当 α_1, α_2 分别绝热地增加 2π 时, 虽然存在能隙, 系统未必回到初始态 (尽管 u 和 ϕ_0 同为 $H\left(\cdots, P_i - \frac{e}{C} A_i, \cdots\right)$ 的基态波函数, 见上一节关于简并情形的讨论). 但是只要基态简并度有限, 则 α_1, α_2 分别绝热地增加 $q_1 \cdot 2\pi, q_2 \cdot 2\pi$ (其中 q_1, q_2 为有限的整数) 时系统必可回到初始态 (相差一个相因数). 由于在这里 α_1 和 α_2 的地位相同, 有理由相信 $q_1 = q_2 = q$. 这样, 整个 α 空间可以由 $(0 \leq \alpha_1 \leq q \cdot 2\pi,$

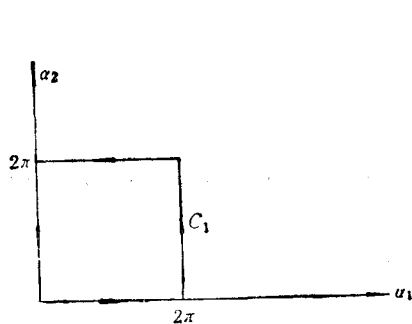


图 3

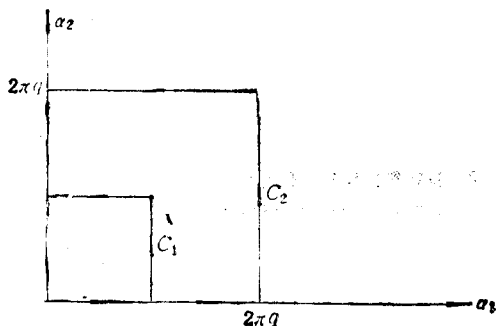


图 4

$0 \leq \alpha_2 \leq q \cdot 2\pi$) 的单位原胞代替(见图 4). 同样, 将 σ_H 在该原胞中求平均

$$\begin{aligned}\sigma_H &= i \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{(2\pi q)^2} \int_0^{2\pi q} d\alpha_2 \int_0^{2\pi q} d\alpha_1 \left[\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \right] \\ &= \frac{e^2}{2\pi \hbar q^2} \left[i \oint_{C_2} \langle \psi_0 | \nabla_{\alpha} | \psi_0 \rangle \cdot d\alpha \right].\end{aligned}\quad (32)$$

同样可见, 上式等号右边方括号中的正是 Berry 相因数 $\gamma_0(C_2)$.

$$\sigma_H = \frac{e^2}{2\pi \hbar q^2} \gamma_0(C_2). \quad (33)$$

容易看到, 基态简并时系统在参量 α 空间沿 C_2 绕行一周后回到初始态, 而沿 C_1 绕行一周却不一定能回到初始态, 所以在这里 C_2 正是上一节所说的那些特殊回路.

由后面附录的讨论可知, 在基态简并情况下, 将产生分数量子 Hall 效应, $\sigma_H = \frac{p}{q} \frac{e^2}{h}$ (其中 $\nu = p/q$ 为填充因数, p, q 为互质数), 而且其简并度正好为 q , 也就给出 ν 与 Berry 相因数的联系.

总结以上两种情况, 可以看出量子 Hall 电导率实质上是一种特殊的 Berry 相因数, 因而它具有所有 Berry 相因数的几何特性, 这正是本文的主要结果.

附 录

由于本文所处理的系统为多体系统, 具体地求解 Schrödinger 方程是不现实的, 因而也无法直接计算 $\gamma_0(C) = i \oint_C \langle \psi_0 | \nabla_{\alpha} | \psi_0 \rangle \cdot d\alpha$. 以下采用 Laughlin^[3] 的规范变换方法来推出 σ_H 的表达式, 从而也可以反求出 $\gamma_0(C)$.

首先注意到前面引入的两个外参量 α_1, α_2 完全是为了推导出量子 Hall 电导率 σ_H 与 Berry 相因数之间的关系而引入的, 实际上却不是必要的, 只要引入一个螺线管 α , 并规定 Hall 电压方向为 x 方向, Hall 电流方向为 y 方向即可. 由 (29b) 式: $u(\dots; x_i, y_i + L_2; \dots) = \exp(-i\alpha_2) u(\dots; x_i, y_i; \dots)$ 知, 仅当 $\alpha_2 = n \cdot 2\pi$ (n 为整数) 时, u 才满足同样的广义周期性边界条件 (18b) 式.

同样讨论两种情况:

(1) 基态非简并情形 当 $\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 + 2\pi$ 时, 系统回到初始态, Laughlin 指出其总的效果是将 N 个电子从 $x=0$ 的一端移到 $x=L_1$ 的一端. 这样, 系统能量增加了 $\Delta U = NeV_H$, 其中 V_H 为 Hall 电压. 而 Hall 电流 I_H 是系统能量关于 $\phi_2 = \alpha_2 \hbar / e$ 的绝热导数

$$I_H = \frac{\partial U}{\partial \phi_1} = \frac{\Delta U}{2\pi \frac{\hbar}{e}} = N \frac{e^2}{h} V_H.$$

故得

$$\sigma_H = N \frac{e^2}{h}.$$

(2) 基态简并情形 假定当 $\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 + 2\pi q$ 时系统回到初态,总的物理效果是将 p 个电子从 $x=0$ 的一端移到 $x=L_1$ 的一端,故 $\Delta U = peV_H$, 因此

$$I_H = \frac{\partial U}{\partial \phi_1} = \frac{peV_H}{2\pi \frac{\hbar}{e} q} = \frac{p}{q} \frac{e^2}{h} V_H.$$

所以

$$\sigma_H = \frac{p}{q} \frac{e^2}{h}.$$

通过采用 Laughlin 的方法可以不难得出 σ_H 的表达式,而且还能得出这样的结论:非简并的基态只能产生整数量子 Hall 效应,而产生分数量子 Hall 效应的基态一定是简并的。但是这种方法却不能给出 N, p, q 与简并度,填充因数 ν 之间的关系。

这里不加证明地指出^[1]:这里的 N 和 p/q 正是前面所说的填充因数,而当 $\sigma_H = \frac{p}{q} \frac{e^2}{h}$ 时,基态的简并度正好为 q 。

- [1] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.*, **115**(1959), 485.
- [2] Y. Aharonov and L. Susskind, *Phys. Rev.*, **159** (1967), 1237.
- [3] G. Delacretaz *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 1986, 937.
- [4] A. Tomito and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.*, **57** (1986), 937.
- [5] R. Y. Chiao and Y. S. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 933.
- [6] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A392** (1984), 45.
- [7] R. B. Laughlin, *Phys. Rev.*, **B23** (1981), 5632.
- [8] R. Tao and F. D. M. Haldane, *Phys. Rev.*, **B33** (1986), 3844.

QUANTUM HALL EFFECT AND BERRY PHASE FACTOR

CHEN CHENG-MING ZHANG QUAN

Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou, 310027

(Received 14 May 1990)

ABSTRACT

The concept of Berry's phase factor in adiabatic process is generalized to degenerate systems, the relation between the quantum Hall effect and Berry's phase factor is studied. It is shown that the quantum Hall conductance σ_H is really a special Berry's phase factor, and thus has the same geometrical properties.

PACC: 0210; 0370