

立体欠缺角和排斥力

史 新 李 新 洲

华东理论物理研究所, 上海, 200237

1990 年 5 月 17 日收到

本文指出整体磁单极引力效应是立体欠缺角加上一个排斥力, 而不是新近文献中讨论的立体欠缺角加上一个吸引力. 并讨论了整体磁单极的引力透镜性质和磁单极反磁单极对的湮没机制.

PACC: 0420; 1110; 0340K

一、引 言

从 1931 年 Dirac^[1] 首次提出磁单极的概念以来, 人们已进行了极其广泛的研究. 't Hooft 和 Polyakov 讨论了非阿贝耳磁单极^[2], Dokos 和 Tomaras 首先讨论了 $SU(5)$ 大统一理论中的磁单极^[3], 我们也讨论了 $SO(10)$ 大统一理论中的磁单极^[4]. 近几年来, 我们还对高维理论中的磁单极进行了相当广泛的研究^[5]. 磁单极与费密子相互作用也有着十分令人感兴趣的性质^[6]. 新近, Barriola 和 Vilenkin^[7] 研究了整体磁单极的爱因斯坦方程, Hiscock^[8] 进一步讨论了整体磁单极在宇宙中的上限. 他们发现整体磁单极的引力效应是立体欠缺角加上一个由有效磁单极核质量产生的吸引性的引力场. 由于在他们的研究中, 一开始就采用 $f = 1$ 近似, 所以他们并不能正确估计有效核质量的值.

在本文中找到一个整体磁单极的精确解. 导出了整体磁单极的引力场方程解的一般形式. 发现有效核质量的值是负的, 它就是说, 整体磁单极的引力效应是立体欠缺角加上一个排斥性的引力场. 同时, 还研究了在整体磁单极引力场中的测地线, 它的引力透镜性质和磁单极反磁单极对的湮没机制. 指出, 在孤子星尺度上^[9], 偏转角公式中的碰撞参数是不能忽略的.

二、整体磁单极解

考虑如下具有 $O(3) \rightarrow U(1)$ 自发破缺对称性的拉格朗日量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{1}{4} \lambda (\phi^a \phi^a - \eta^2)^2, \quad (1)$$

式中 ϕ^a 是 $O(3)$ 群的矢量表示. 这一体系具有如下形式的磁单极解的 Ansatz,

$$\phi^a = \eta f(r) \frac{x^a}{r}. \quad (2)$$

在上述 Ansatz 下, ϕ^a 场方程约化成单一的方程,

$$f'' + \frac{2}{r} f' - \frac{2}{r^2} \frac{f(f^2 - 1)}{\delta^2} = 0, \quad (3)$$

式中 $\delta = (\eta\sqrt{\lambda})^{-1}$ 是磁单极核的半径. Barriola 和 Vilenkin^[7] 在核外取 $f = 1$ 近似解.

另一方面, 汪克林等人^[10] 已经利用双曲函数级数方法求解了类冰结构的非线性方程. 本文采用相同的方法来解决(3)式. 设 $x = r/\delta$, 可将(3)式化简为

$$x^2 f'' + 2x f' - x^2 f^3 + (x^2 - 2)f = 0. \quad (4)$$

上述方程具有自然边界条件 $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$. 设方程的形式解为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tan h^{2n+1} \frac{x}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

零点边界条件自动满足, 无穷远处边界条件约化成

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1. \quad (6)$$

经过较冗长的运算, 可得系数的递推关系为

$$\begin{aligned} n(2n+3)c_n = & \sum_{l+k=n-1} \left[\frac{2(2k+1)}{(2l+1)(2l+3)} + 4k(k+1)d_l \right. \\ & \left. - (2k+1)kd_{l+1} - (k+1)(2k+1)d_{l-1} \right] c_k \\ & + \sum_{l+l+k=n-2} d_l c_l c_k, \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$d_l = \begin{cases} 0 & l = -1, \\ \frac{1}{l+1} \sum_{i=0}^l \frac{1}{2i+1} & l = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (8)$$

数值计算表明, 上述级数解收敛得很快, 当所取项数大于 10 时, 相对误差小于 0.5%. 当项数增加时, 相对误差将减少. 所以, (5)–(7)式表述方程的一个解.

三、立体欠缺角与排斥力

具有球对称性的最普遍的静态度规为

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (9)$$

利用上节的讨论, 磁单极的能量动量张量可以表示成如下形式:

$$T^t_t = \frac{\eta^2 f'^2}{2A} + \frac{\eta^2 f^2}{r^2} + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (f^2 - 1)^2, \quad (10)$$

$$T^r_r = -\frac{\eta^2 f'^2}{2A} + \frac{\eta^2 f^2}{r^2} + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (f^2 - 1)^2, \quad (11)$$

$$T^{\theta}_{\theta} = T^{\varphi}_{\varphi} = \frac{\eta^2 f'^2}{2A} + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (f^2 - 1)^2. \quad (12)$$

爱因斯坦方程可以写为

$$\frac{1}{A} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi G T^t_t, \quad (13)$$

$$\frac{1}{A} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi G T^r_r. \quad (14)$$

方程组(13)和(14)的一般形式解为

$$A^{-1} = 1 - \frac{8\pi G}{r} \int_0^r T^t_t r^2 dr, \quad (15)$$

$$B(r) = \left(1 - \frac{8\pi G}{r} \int_0^r T^t_t r^2 dr \right) \cdot \exp \left[-8\mu \int_0^r f^2 r dr \right]. \quad (16)$$

将 $f(r)$ 的解代入上两式, 得到 $A(r)$ 和 $B(r)$ 的表达式. 如在线性近似下, 这些普遍表达式约化成

$$A(r) = 1 + 8\mu + \frac{Gm}{r}, \quad (17)$$

$$B(r) = 1 - 8(1 + \beta)\mu - \frac{Gm}{r}, \quad (18)$$

式中 $\mu \equiv \pi G \eta^2$, 而

$$m = 8\pi \eta^2 \int_0^\infty \left[f'^2 + \frac{f^2 - 1}{r^2} + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 (f^2 - 1)^2 \right] r^2 dr, \quad (19)$$

$$\beta = \int_0^\infty f'^2 r dr. \quad (20)$$

利用文献[7]和[8]中相同的假设: 在 $\eta \ll m_P$ 时 (m_P 是普朗克质量), 人们认为引力本质上不改变磁单极结构, 所以在平坦空间中的整体磁单极解适用于 $A(r)$ 和 $B(r)$ 的线性近似表达式. 将(5)–(8)式代入(19)式, 并进行数值计算得

$$m = -46.99 \eta^2 \delta. \quad (21)$$

一个接近于磁单极核的自由粒子, 具有一个向外的排斥力

$$\vec{r} = -\frac{Gm}{r^2} = \frac{G|m|}{r}. \quad (22)$$

由于 $|m| \sim 10 \eta^2 \delta$, 质量项 $\sim 10 \mu \delta / r$. 当 $r \gg \delta$ 时, 质量项可以被忽略, 重新标度 r 和 t 变量, 度规能写为

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - (1 - 8\mu) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (23)$$

度规(23)式描述了一个具有立体欠缺角的空间. 在这一空间中, 半径为 r 的球面积不是 $4\pi r^2$, 而是 $4\pi(1 - 8\pi G \eta^2) r^2$. 在全空间, 度规(9)式应写为

$$ds^2 = \left[1 - 8(1 + \beta)\mu - \frac{Gm}{r} \right] dt^2 - \left(1 + 8\mu + \frac{Gm}{r} \right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (24)$$

度规(24)式表明整体磁单极的引力效应是立体欠缺角加上一个排斥性的引力场。

四、整体磁单极的偏转角

球对称度规的测地线方程为

$$A(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 = \frac{1}{B(r)} - \frac{J^2}{r^2} - E, \quad (25)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dp} = J, \quad (26)$$

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B(r)}, \quad (27)$$

式中积分常数 J 表示轨迹的角动量, 而 $E^{\frac{1}{2}}$ 是沿着轨迹的世界时和仿射参数 p 的比, 即 $ds^2 = -E dp^2$ 。从测地线方程可以决定路径的形状, 有

$$\left| \frac{d\varphi}{dr} \right| = \frac{1}{r^2} A^{\frac{1}{2}}(r) \left[\frac{1}{JB(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (28)$$

用最接近磁单极核的点 r_0 作为参数来代替 J , 从

$$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r_0} = 0, \quad (29)$$

有

$$J = r_0 \left(\frac{1}{B(r_0)} - E \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (30)$$

那么(28)式可约化成

$$\left| \frac{d\varphi}{dr} \right| = \frac{r_0}{r} A^{\frac{1}{2}}(r) \left[\frac{B(r_0)}{B(r)} \frac{1 - EB(r)}{1 - EB(r_0)} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

如果始点的距离 $L \gg r_0$, 且轨迹运动的速度 $v^2 \gg \mu$, 那么偏转角度主要发生在 $r \approx r_0$ 区域。准确到 μ 和 μ/v^2 的阶, 偏转角公式为

$$\varepsilon = \pi - 2 \int_{r_0}^{\infty} \Delta(r) dr, \quad (32)$$

式中

$$\Delta(r) \approx \frac{r_0}{r} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \left[1 + 4\mu + \frac{Gm}{2r} - \frac{Gm}{4v^2} \frac{1}{r_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{r} \right)} \right]. \quad (33)$$

如果只考虑 $r \approx r_0$ 处的主要贡献,

$$\varepsilon = -4\pi\mu - \left(1 - \frac{1}{2v^2} \right) \frac{Gm}{r_0}. \quad (34)$$

在上述近似中, r_0 与碰撞参数相一致。回想一下规范弦情形^[11], $\varepsilon = -4\pi\mu$, 这里的 μ 表示单位长度的弦能量。两者有本质的差异, 规范弦的偏转角不依赖于碰撞参数, 而整体磁单极依赖于碰撞参数和轨迹的运动速度。

在极端相对论性粒子 ($v \approx 1$) 的情形, 偏转角是

$$\varepsilon = -4\pi\mu \left[1 + \frac{Gm}{8\mu\delta} \frac{\delta}{r_0} \right], \quad (35)$$

式中 $Gm/8\mu\delta = O(1)$ 。由此可知, 光线的偏转角是依赖于碰撞参数 r_0 。如果 r_0 是星系的尺度, δ 是大统一理论的标度, 那么(35)式等号右边第二项是可以忽略不计的。如果 r_0 是孤子星的尺度, 那么(35)式等号右边第二项有重要的贡献。整体磁单极被孤子星吞食后的稳定性证明是容易得到的。

整体磁单极的引力场是作为一个发散透镜还是一个收敛透镜, 与入射粒子的速度有关。由(34)式, 解

$$\varepsilon = 0 \quad (36)$$

这一方程, 可以决定临界速度 v_0 ,

$$v_0^2 = \frac{1}{2 \left[1 + \frac{4\pi\mu\delta}{Gm} \frac{r_0}{\delta} \right]}. \quad (37)$$

如果 r_0 和 δ 是孤子星的尺度, 那么 v_0 大约是光速的 $1/2$ 。当一个粒子以 v_0 的速度运动时, 不会发生任何偏转。

五、整体磁单极对的湮没机制

下面讨论现时宇宙中整体磁单极问题, Barriola 和 Vilenkin^[7] 提出了一个有效压低磁单极浓度的机制, 即整体磁单极和反磁单极湮没机制。我们指出, 尽管整体磁单极引力效应是立体欠缺角加上一个排斥力, 但由于立体欠缺角的作用, 湮没机制在本质上不会发生变化。

事实上, 磁单极和反磁单极对 ($M\bar{M}$) 的能量 $E \approx \eta^2 R$, 这里 R 是 $M\bar{M}$ 之间的距离。 M 和 $\bar{M}$ 之间的吸引力 (这是由立体欠缺角所产生) 是 $F = \frac{\partial E}{\partial R} \approx \eta^2$, 它不依赖于距离 R 。

磁单极和反磁单极之间的排斥力与距离相关, 在 $R \approx \delta$ 时达到最大值, 这时

$$F_{\text{排斥力}} \approx \frac{Gm^2}{8^2} \approx 10^5 \mu \eta^2. \quad (38)$$

在典型的大统一标度 10^{16}GeV , $\mu \approx 10^{-6}$, 所以排斥力与立体欠缺角所产生的吸引力相比可以忽略。整体磁单极对 ($M\bar{M}$) 在宇宙早期存在着较强的吸引力, 这一吸引力有效地压低了磁单极密度。这与现时宇宙所观测到的整体磁单极密度上限值是一致的。

- [1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, **A133** (1931), 60.
- [2] A. M. Polyakov, *JETP Lett.*, **20**(1974), 194; G't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B79**(1974), 276.
- [3] C. Dokos and T. Tomaras, *Phys. Rev.*, **D21** (1980), 2940.
- [4] Li Xinzhou, Yu Feng and Zhang Jianzu, *Phys. Rev.*, **D34** (1986), 1124;
Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Phys. Lett.*, **B140** (1984), 209.
- [5] Li Xinzhou, *Phys. Lett.*, **B205** (1988), 451; Li Xinzhou *et al.*, *Phys. Lett.*, **B207** (1988), 391; Li Xin-

- zhou *et al.*, *Phys. Rev.*, **D40**(1989), 1101.
- [6] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Phys. Lett.*, **B149** (1984), 89;
Li Xinzhou and Zhang Jianzu, *Phys. Rev.*, **D33**(1986), 562;
Li Xinzhou *et al.*, *Phys. Rev.*, **D34** (1986), 2523.
- [7] M. Barriola and A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989), 341.
- [8] W. Hiscock, *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990), 344.
- [9] T. D. Lee, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 3637.
- [10] Wang Kelin *et al.*, *Phys. Lett.*, **A139** (1989), 61.

SOLID ANGULAR DEFICIT AND REPULSIVE GRAVITATIONAL FIELD

SHI XIN LI XIN-ZHOU

East China Institute for Theoretical Physics, Shanghai. 200237

(Received 17 May 1990)

ABSTRACT

A global monopole produces a repulsive gravitational field outside the core in addition to a solid angular deficit, rather than an attractive gravitational field suggested in previous literatures. The global monopole-antimonopole annihilation mechanism and the geodesics are also studied.

PACC: 0420; 1110; 0340K