

耦合标量场论中的新孤子解*

王 心 宜 赵 南

苏州大学物理系, 非线性科学中心, 苏州, 215006

1990年4月28日收到

本文提供一个简捷的方法求解相对论性的耦合标量场中的精确孤子解. 所得结果扩充了以前的有关结果. 并指出所提供的方法可以求解其它类型的非线性耦合方程及类似的非线性微分方程.

PACC: 1110

一、引 言

物理学中若干重要的非线性动力学耦合系统, 如耦合标量场论中拓扑和非拓扑性孤子^[1], DNA 双螺旋结构中的非线性激发^[2], 氢键网络系统中的质子输运^[3]以及等离子体中不稳定性的演化^[4], 均是由相应的非线性耦合方程所描绘的. 这些耦合的非线性系统往往呈现出孤子行为和特征, 这种行为和特征表征了物理系统在时空演化过程中所形成的一种高度相干的稳定结构. 显然相应的非线性微分方程系统的精确孤子解对于理解和研究物理系统中的这类基本现象具有特别重要的意义. 在非线性的研究中, 寻找有效的方法发现这类方程的精确解乃是当前重要的课题^[5].

在量子场论中, Rajaraman 考虑了如下的耦合场方程:

$$\sigma_{xx} = -\sigma + \sigma^3 + d\rho^2\sigma, \quad (1a)$$

$$\rho_{xx} = f\rho + \lambda\rho^3 + d\rho(\sigma^2 - 1). \quad (1b)$$

该方程来源于基本粒子理论中量子化荷电孤子的研究. 这里 σ 和 ρ 表示标量场; d, f 和 λ 是有关参数. 方程(1)的研究也联系着凝聚态物理中某些相对应的问题的探讨. Bishop 等人讨论了如下的方程:

$$\sigma_{tt} - c^2\sigma_{xx} - a\sigma + b\sigma(\sigma^2 + \rho^2) = 0, \quad (2a)$$

$$\rho_{tt} - c^2\rho_{xx} - (a - 4e)\rho + b\rho(\sigma^2 + \rho^2) = 0. \quad (2b)$$

该方程起源于导电聚合物中弱钉扎电荷密度波的研究^[6]. 这里 a, b, c 和 e 均是参数. 方程(2)的孤子解对于讨论聚合物中的非线性荷电激发具有重要的意义. 显然, 方程(2)的孤子解的研究在稳态情形可以归结为方程(1)的研究. Rajaraman 通过构造所谓“轨道函数”(orbit function)并考虑一个微分积分方程的特征, 在某些简单的情形下, 他求得了耦合方程(1)的孤子解. Bishop 等人亦在特殊的情形下求得了方程(2)的解. 这里实质

* 国家自然科学基金资助的课题.

性的困难在于,在现有的数学文献中,我们找不到一个系统的方法去求解耦合的非线性微分方程;只能根据具体物理问题的特点及方程组的特殊数学结构来寻找有效的求解方法.在文献[6]中,作者之一用简单的方法求解了广义 Fisher 方程的精确孤子解^[7],本文旨在扩展这一方法用来求解耦合的非线性微分方程(1).这里给出的方法简捷而有效,并避免了考虑复杂的数学结构和微分积分方程.本文得到的精确解析结果是新的,它扩充了以前的讨论和结果.

二、耦合场方程的孤波解

合适的非线性变换对于寻找非线性微分方程的精确解是十分强有力的.这里,试图找出非线性耦合场方程(1)的非线性变换以简化问题.根据观察,对方程(1)做如下的变换:

$$\sigma_x = A\sigma\rho, \quad (3a)$$

$$\rho_x = B + C\rho^2 + D\sigma^2. \quad (3b)$$

这里 A, B, C, D 是未定参数.注意到,变换(3)式是关于场变量 σ 和 ρ 的一阶非线性方程组.方程(3)对自变量的微分给出

$$\sigma_{xx} = A\sigma_x\rho + A\sigma\rho_x = AB\sigma + AD\sigma^3 + (A^2 + AC)\sigma\rho^2, \quad (4a)$$

$$\rho_{xx} = 2C\rho\rho_x + 2D\sigma\sigma_x = 2CB\rho + 2C^2\rho^3 + 2(CD + AD)\rho\sigma^2. \quad (4b)$$

注意上面的方程(4)和(1)具有完全相同的数学结构.因此,如果方程(3)是对于方程(1)的一个正确的非线性变换,则方程(4)和(1)应完全恒等.这样相应系数的比较将给出

$$\begin{aligned} AB = -1, \quad AD = 1, \quad A^2 + AC = d, \\ 2CB = f - d, \quad 2C^2 = \lambda, \quad 2CD + 2AD = d. \end{aligned} \quad (5)$$

从(5)式,参数 A, B, C, D, f 和 λ 可以表示为

$$\begin{aligned} A = \sqrt{2\lambda}/(f-d), \quad B = (d-f)/\sqrt{2\lambda}, \quad C = -\sqrt{2\lambda}/2, \\ D = (f-d)/\sqrt{2\lambda}, \quad \lambda = (f-d)^2, \quad f = 2 \end{aligned} \quad (6a)$$

或

$$\begin{aligned} A = -\sqrt{2\lambda}/(f-d), \quad B = (f-d)/\sqrt{2\lambda}, \quad C = \sqrt{2\lambda}/2, \\ D = (d-f)/\sqrt{2\lambda}, \quad \lambda = (f-d)^2, \quad f = 2. \end{aligned} \quad (6b)$$

可以注意到,当方程(3)中的系数取上式中的相应数值时,方程(3)可以在某种意义上看成是原方程(1)的一次积分.进一步可以注意到方程(3a)可以写成如下的形式:

$$\rho = \frac{1}{A} \frac{\sigma_x}{\sigma} = \frac{1}{A} (\log \sigma)_x. \quad (7)$$

非常有趣的是,(7)式事实上是著名的 Cope-Hopf 变换.该变换在 Burgers 方程的线性化中起着关键的作用,在其它非线性问题中它亦具有启发意义.进一步把(7)式代入方程(3a),可得到如下关于场变量 σ 的方程:

$$\sigma_{xx} - \frac{d}{2} \frac{\sigma_x^2}{\sigma} = -\sigma + \sigma^3. \quad (8)$$

上面方程中的非线性项 $-\frac{d}{2} \frac{\sigma_x^2}{\sigma}$ 可以经过如下的幂变换消去:

$$\sigma = y^m. \quad (9)$$

这里幂指数 m 是一待定参数, 它可以通过把(9)式代入方程(8)而予以决定. 有

$$\begin{aligned} & m y^{m-1} y_{xx} + m(m-1) y^{m-2} y_x^2 - \frac{d}{2} \frac{m^2 y^{2m-2}}{y^m} y_x^2 \\ &= -y^m + y^{im}, \end{aligned} \quad (10)$$

亦即

$$y_{xx} + \left(m-1 - \frac{dm}{2} \right) \frac{y_x}{y} = -y/m + y^{2m+1}/m, \quad (10')$$

取

$$m = \frac{2}{2-d} \equiv m^*, \quad (11)$$

方程(10')将呈现如下简化的形式:

$$y_{xx} = -y/m^* + y^{2m^*+1}/m^*. \quad (12)$$

方程(12)可以用标准的方法得到其解析解

$$\int \frac{dy}{\sqrt{-\frac{y^2}{m^*} + \frac{1}{m^*(m^*+1)} y^{2m^*+2} + c_1}} = \pm x + c_2, \quad (13)$$

c_1 和 c_2 是积分常数. 如果 $m^* < 0$, 令 $c_1 = 0$. 则方程(13)的积分可用如下的显式表示:

$$\sigma^2 = y^{2m^*} = (1 + m^*) \operatorname{sech}^2(\sqrt{-m^*} x + c_0). \quad (14)$$

这样, 就得到耦合场方程(1)的如下精确解:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \pm \sqrt{1 + \frac{2}{2-d}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{2}{d-2}} x + c_0\right), \\ \rho(x) = \frac{\sigma_x(x)}{A\sigma} &= \pm \frac{1}{\sqrt{d-2}} \tanh\left(\sqrt{\frac{2}{d-2}} x + c_0\right) \quad d > 4. \end{aligned} \quad (15)$$

可以看到, 解(15)式是原场方程的一组新的定态孤子解. 以上求解的过程是很简洁的.

进一步的观察表明, 原方程(1)关于场变量 σ 和 ρ 呈现了某种结构上的对称性. 这就有力地提示我们, 尚可对方程(1)做出如下的变换

$$\sigma_x = \bar{A} + \bar{B}\sigma^2 + \bar{C}\rho^2, \quad (16a)$$

$$\rho_x = \bar{D}\sigma\rho. \quad (16b)$$

上述变换相对于变换(3)式而言具有置换对称性. 根据相同的处理方案, 定出

$$\begin{aligned} 2\bar{A}\bar{B} &= -1, \quad 2\bar{B}^2 = 1, \quad 2\bar{B}\bar{C} + 2\bar{C}\bar{D} = d, \\ \bar{D}\bar{A} &= f - d, \quad \bar{D}\bar{C} = \lambda, \quad \bar{D}\bar{B} + \bar{D}^2 = d. \end{aligned} \quad (17)$$

从而

$$\bar{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \bar{B} = -\sqrt{2}/2, \quad \bar{C} = \pm \sqrt{f}/2,$$

$$\bar{D} = \pm \sqrt{f}, \quad d = f \pm \sqrt{2f}/2, \quad \lambda = f/2 \quad (18a)$$

或

$$\begin{aligned} \bar{A} &= -\sqrt{2}/2, \quad \bar{B} = \sqrt{2}/2, \quad \bar{C} = \pm \sqrt{f}/2, \\ \bar{D} &= \pm \sqrt{f}, \quad d = f \pm \sqrt{2f}/2, \quad \lambda = f/2. \end{aligned} \quad (18b)$$

类似的解析运算给出方程(1)如下的静态孤子解:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \tanh[\sqrt{f}(x + c_0)], \\ \rho(x) &= \pm \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{f}}} \operatorname{sech}[\sqrt{f}(x + c_0)]. \end{aligned} \quad (19)$$

可以注意到,此解其实就是 Rajaramon 在文献[1]中用相规道方法求得的结果。显然,这里所用的方法更为简捷明瞭。

对耦合方程(1)的对称性结构的进一步分析,可以再次找到方程的另一组非线性变换

$$\sigma_x = \rho \sqrt{A\rho^2 + B\sigma^2 + C}, \quad (20a)$$

$$\rho_x = D\sigma \sqrt{A\rho^2 + B\sigma^2 + C}, \quad (20b)$$

式中 A, B, C, D 仍是待定参数。根据同样的处理方案,取上式的微分得到

$$\sigma_{xx} = DC\sigma + DB\sigma^3 + (2AD + B)\rho^2\sigma, \quad (21a)$$

$$\rho_{xx} = DC\rho + DA\rho^3 + (2DB + AD^2)\sigma^2\rho. \quad (21b)$$

上面方程组和原方程组的比较再次给出

$$\begin{aligned} DC &= -1, \quad BD = 1, \quad 2AD + B = d, \\ DC &= f - d, \quad AD = \lambda, \quad 2BD + AD^2 = d. \end{aligned} \quad (22)$$

从而定出如下的参数值:

$$\begin{aligned} A &= \lambda^2/(d-2), \quad B = d-2\lambda, \quad C = (2-d)/\lambda^2, \\ D &= 2-3/d, \quad f = d-1, \quad \lambda = d(d-2)/(2d-3). \end{aligned} \quad (23)$$

方程(20)给出

$$\sigma_x/\rho_x = \rho/D\sigma, \quad (24)$$

$$\rho^2 = D\sigma^2 + \sigma_0, \quad (25)$$

σ_0 是积分常数。把(25)式代入(20a)式得到

$$\sigma_x = \pm \sqrt{AD+B} \sigma \sqrt{D\sigma^2 + \frac{-C}{A}} \quad (26)$$

或

$$\sigma_x = \pm \sqrt{1-d} \sigma \sqrt{-\sigma^2 + \frac{(3-2d)^3}{d^3(2-d)^2}} \quad (27)$$

这里已取积分常数 $\sigma_0 = -C/A = (d-2)^2/\lambda^4$ 。这样得到方程(1)的如下孤子解:

$$\sigma(x) = \pm \sqrt{\frac{(3-2d)^3}{d^3(2-d)^2}} \operatorname{sech} \left\{ \sqrt{\frac{(3-2d)^3(1-d)}{d^3(2-d)^2}} x + x_0 \right\}, \quad (28a)$$

$$\rho(x) = \pm \frac{(3-2d)^2}{d^2(2-d)} \tanh \left\{ \sqrt{\frac{(3-2d)^3(1-d)}{d^3(2-d)^2}} x + x_0 \right\} \quad d \in (0, 1). \quad (28b)$$

如果取积分常数 $\sigma_0 = 0$, 则有

$$\sigma_x = \pm \sigma \sqrt{(AD^2 + BD)\sigma^2 + C}, \quad (29)$$

亦即

$$\sigma_x = \pm \sigma \sqrt{(d-1)\sigma^2 + \frac{(2d-3)^2}{d^2(2-d)}}. \quad (30)$$

则可得如下孤子解:

$$\sigma(x) = \pm \frac{(2d-3)\sqrt{(1-d)(2-d)}}{d(1-d)(2-d)} \operatorname{sech}\left(\frac{2d-3}{d\sqrt{2-d}}x + x_0\right), \quad (31a)$$

$$\rho(x) = \pm \left(\frac{2d-3}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(1-d)(2-d)}}{(1-d)(2-d)} \operatorname{sech}\left(\frac{2d-3}{d\sqrt{2-d}}x + x_0\right) \quad (d < 0). \quad (31b)$$

值得注意的是, 解(31)式是一组非拓扑性的孤子解. 它们在基本粒子理论中有特殊的重要性.

三、讨 论

上面求得了非线性耦合方程(1)的几组静态孤子解. 解法的关键步骤在于寻找和发现合适的非线性变换. 这样的变换一旦找到, 非线性问题的求解就变得相当容易. 在若干物理背景比较清楚和对称性较为明显的情形, 非线性问题本身往往暗示出变换所应采取的适合形式. 显然, 对物理问题的分析和模型的深入细致的观察是重要的.

本文的变换解法实质上是文献[7]中所用方法在处理耦合非线性系统问题中的推广. 本解法表明, 该方法对于象 Fisher 方程这类非线性扩散系统及耦合的微分方程系统均是有效的. 其实, 这种变换解法亦可用于探求下面一般的具有耗散的非线性耦合方程组的孤波解:

$$\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1(u, v), \quad (32a)$$

$$\gamma_2 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f_2(u, v). \quad (32b)$$

这里 γ_1, γ_2 是耗散系数. $f_1(u, v), f_2(u, v)$ 是 u 和 v 的解析函数. 在孤波情形 $u = u(x - ct), v = v(x - ct)$, 方程组变为

$$-c\gamma_1 \frac{du}{d\xi} + c^2 \frac{d^2 u}{d\xi^2} - \frac{d^2 u}{d\xi^2} = f_1(u, v), \quad (33a)$$

$$-c\gamma_2 \frac{dv}{d\xi} + c^2 \frac{d^2 v}{d\xi^2} - \frac{d^2 v}{d\xi^2} = f_2(u, v) \quad \xi \equiv x - ct. \quad (33b)$$

若令

$$\frac{du}{d\xi} = P_1(u, v), \quad \frac{dv}{d\xi} = P_2(u, v), \quad (34)$$

则方程(33)成为

$$-c\gamma_1 P_1 + (c^2 - 1) \left(\frac{\partial P_1}{\partial u} P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial v} P_2 \right) = f_1(u, v), \quad (35a)$$

$$-c\gamma_2 P_2 + (c^2 - 1) \left(\frac{\partial P_2}{\partial u} P_1 + \frac{\partial P_2}{\partial v} P_2 \right) = f_2(u, v). \quad (35b)$$

若能找到合适的非线性函数 $P_1(u, v)$ 和 $P_2(u, v)$, 则方程(35)是一恒等式。由此判定所选定的函数的自治性, 再积分方程(34)则可以得到原方程(33)的解。已用上述方法求得等离子体中非线性波演化问题的孤波解。

最后必须指出, 本文未考虑所得场方程孤子解的稳定性。这类孤子解的稳定性问题在相应的基本粒子理论中是甚为重要的^[8]。

- [1] R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 200.
- [2] T. Kawasaki, *Prog. Theor. Phys.*, **78** (1987), 316.
- [3] St. Pnevmatikos, *Phys. Rev. Lett.*, **60** (1988), 1534.
- [4] R. Varma and N. Rao, *Phys. Lett.*, **79A** (1980), 311; N. Rao, *J. Phys. A*, **22** (1989), 4813.
- [5] see, for example, *Topics in Soliton Theory and Exactly Solvable Nonlinear Equations*, ed. M. Ablowitz, B. Fuchssteiner and M. Kruskal World Scientific, (1986).
- [6] S. Sarker, S. Trulinger and A. Bishop, *Phys. Lett.*, **59A** (1976), 255.
- [7] X. Y. Wang, *Phys. Lett.*, **131A** (1988), 277.
- [8] L. Boya and J. Casahorran, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 4298.

NEW SOLITONS IN COUPLED SCALAR FIELD THEORY

WANG XIN-YI ZHAO NAN

Department of Physics, Center for Nonlinear Science, Suzhou University, Suzhou, 215006

(Received 28 April 1990)

ABSTRACT

This work presents a simple and effective method for obtaining the exact soliton solutions of the coupled relativistic scalar field theory. The exact solutions obtained are new and important. The method suggested here can be applied to other coupled nonlinear systems as well.

PACC: 1110