

奇偶相干态的高阶压缩及其 准概率分布函数

夏云杰 李洪珍

曲阜师范大学物理系, 曲阜, 273165

郭光灿

中国科学技术大学物理系, 合肥, 230026

1990 年 3 月 23 日收到

本文研究了奇偶相干态的高阶压缩和它们的各种准概率分布函数。结果表明, 这两个态的高阶压缩性质是相互排斥的, 特征函数和 Wigner 函数都不是高斯型, 而且 Wigner 函数也不恒为正定。准概率密度(QPD)图形既不是椭圆, 也不是月牙状, 而是两叶花瓣状, 显示出态的 QPD 图形不能说明态的压缩类型。

PACC: 4250;0530

一、引 言

奇偶相干态是湮没算符平方 a^2 的两个相互正交的本征态

$$|\alpha\rangle_e = (\text{ch}|\alpha|^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle, \quad (1)$$

$$|\alpha\rangle_o = (\text{sh}|\alpha|^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle. \quad (2)$$

在这两个态中, 光场振幅平方的实部与虚部的起伏相等且满足最小测不准关系^[1], 我们已对它们的压缩、反聚束^[2]与振幅平方压缩^[3]进行了研究。偶相干态总可以存在压缩, 不会有反聚束, 而奇相干态正与之相反, 它总存在反聚束, 却没有压缩。若这两个态被平移算符作用后, 它们通常的压缩性质均不改变, 但反聚束效应却发生了变化, 尤其是, 平移后的偶相干态呈现出振幅平方压缩特性^[4]。由于奇偶相干态是相互正交的, 它们各自表现出的光场非经典效应又是截然相反的, 可以期望它们也许在非线性光学统计中有较为重要的应用。最近文献[3]对湮没算符更高次幂的本征态进行了研究, 虽然这些态也表现出非经典效应, 却没有奇偶相干态性质这样独特, 所以深入研究这两个态的性质是有价值的。

高阶压缩最近已被证明是独立于通常二阶压缩的又一光场非经典效应^[4,5], 本文讨论了奇偶相干态的高阶压缩, 发现它们在这种量子效应上的表现又是相互排斥的, 这两个态

1) 夏云杰、郭光灿, 量子电子学, 5(1988), 301.

不能同时具有同一级高阶压缩。众所周知, 具有光场非经典效应的态不存在正定的非奇异 Glauber P 表示, 处理这些态的产生或与物质的相互作用问题不能采用经典光场的办法, 而通常利用态的特征函数, Wigner 分布函数^[6,7]和正 P 表示^[8,9]等方法。本文求出了奇偶相干态的特征函数和 Wigner 分布函数, 结果表明, 奇偶相干态的这两类函数与常见光场(热光场, 相干光场, 压缩光场等)不同, 不是简单的高斯型函数。特别是 Wigner 函数不能保证恒为正定, 这就使得处理这两个态的有关过程中不能采用 Wigner 函数。

压缩光场态的 QPD 近来有不少研究^[10,11], 发现各类压缩光场的 QPD 图形是不相同的, 通常二阶压缩的 QPD 是椭圆形的, 振幅压缩态的 QPD 是月牙状的, 故这两类压缩又分别被称为“椭圆形压缩”和“月牙形压缩”^[12], 但是, 本文的结果表明, 这两个态的 QPD 既不是椭圆形, 也不是月牙形, 而是两叶花瓣状, 显示出 QPD 的形状还不能完全代表光场态的压缩类型。

二、奇偶相干态的高阶压缩

定义光场振幅的两个正交分量为

$$E_1 = (a + a^+)/2, \quad (3)$$

$$E_2 = (a - a^+)/2i, \quad (4)$$

式中 a, a^+ 分别为光子湮没和产生算符。如果其中某一分量的方差小于 1/4,

$$\langle \Delta E_{1,2} \rangle < 1/4, \quad (5)$$

则称这个场为二阶压缩光场。Hong 和 Mandel 把这类压缩的定义推广到 $2N$ 阶, 他们证明, 存在 $2N$ 阶压缩的光场必须满足^[13]

$$\langle (\Delta E_{1,2})^{2N} \rangle < (2N - 1)!! / 2^{2N}. \quad (6)$$

上式小于(<)号的左边可以表示成下面的偶阶矩:

$$\langle (\Delta E_{1,2})^{2N} \rangle = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{2N}{(2N - 2r)!} \frac{1}{2^{2r}} \langle : (\Delta E_{1,2})^{2N-2r} : \rangle + \frac{(2N - 1)!!}{2^{2N}}. \quad (7)$$

显然, 若(6)式满足, 高阶压缩一定是非经典的。之后, 不少文献对高阶压缩进行了深入的研究^[4,5,14,15], 其中文献[4,5]揭示了高阶压缩是独立于二阶压缩的又一光场非经典性质, 鉴于以前对奇偶相干态性质的认识, 有必要对它们的高阶压缩也进行研究, 期望揭示出奇偶相干态另一方面的特点。

引入高阶压缩度并利用(7)式得

$$\begin{aligned} q_{2N} &= \left[\frac{(2N - 1)!!}{2^{2N}} - \langle (\Delta E_{1,2})^{2N} \rangle \right] / \frac{(2N - 1)!!}{2^{2N}} \\ &= \frac{2^{2N}}{(2N - 1)!!} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(-)(2N)!}{(2N - 2r)!} \frac{1}{2^{2r}} \langle : (\Delta E_{1,2})^{2N-2r} : \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

它的取值范围为 $-\infty < q_{2N} \leq 1$, $2N$ 阶压缩对应 $q_{2N} > 0$ 。

对奇或偶相干态均有

$$\langle E_{1,2} \rangle_{c,0} = 0, \quad (9)$$

所以它们的高阶压缩度可表为

$$q_{2N} = \frac{2^{2N}}{(2N-1)!!} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(-1)^r (2N)!}{(2N-2r)! 2^{2N+r}} \langle : (a + a^+)^{2N-2r} : \rangle_{e,0,0} \quad (10)$$

我们曾得到奇偶相干态的 Glauber 相干态展开式¹⁾

$$|\alpha\rangle_e = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2} |\alpha|^2\right) (\operatorname{ch} |\alpha|^2)^{-\frac{1}{2}} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle), \quad (11)$$

$$|\alpha\rangle_o = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2} |\alpha|^2\right) (\operatorname{sh} |\alpha|^2)^{-\frac{1}{2}} (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle). \quad (12)$$

利用这两个展开式和下式:

$$\langle \alpha | : f(a, a^+) : | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle f(\beta, \alpha^*), \quad (13)$$

容易得到

$$\begin{aligned} \langle : (a + a^+)^{2N-2r} : \rangle_e &= \frac{1}{2} \exp(|\alpha|^2) \operatorname{arc ch} |\alpha|^2 [(2x)^{2N-2r} \\ &\quad + (-1)^{N-r} (2y)^{2N-2r} \exp(-2|\alpha|^2)], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \langle : (a + a^+)^{2N-2r} : \rangle_o &= \frac{1}{2} \exp(|\alpha|^2) \operatorname{arc sh} |\alpha|^2 [(2x)^{2N-2r} \\ &\quad - (-1)^{N-r} (2y)^{2N-2r} e^{-2|\alpha|^2}], \end{aligned} \quad (15)$$

式中 x, y 分别为复变量 α 的实部与虚部, 即 $\alpha = x + iy$.

把(14),(15)式代入(10)式得

$$\begin{aligned} q_{2N}^{(e)} &= (-1)^N \frac{1}{2} e^{|\alpha|^2} \operatorname{arc ch} |\alpha|^2 \frac{2^{2N}}{(2N-1)!!} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(2N)!}{(2N-2r)! 2^{2r}} \\ &\quad \times (x^{2N-2r} + (-1)^{N-r} y^{2N-2r} e^{-2|\alpha|^2}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} q_{2N}^{(o)} &= -\frac{1}{2} e^{|\alpha|^2} \operatorname{arc sh} |\alpha|^2 \frac{2^{2N}}{(2N-1)!!} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(2N)!}{(2N-2r)! 2^{2r}} \\ &\quad \times (x^{2N-2r} - (-1)^{N-r} y^{2N-2r} e^{-2|\alpha|^2}). \end{aligned} \quad (17)$$

由于 q_{2N} 越大, 高阶压缩越强, 很明显, 奇偶相干态的高阶压缩在 $x = 0$ 时较大, 为了研究方便, 先讨论这种情况, 即

$$\begin{aligned} q_{2N}^{(e)} &= -\frac{1}{2} \exp(-y^2) \operatorname{arc ch} y^2 \frac{2^{2N}}{(2N-1)!!} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(2N)!}{(2N-2r)! 2^{2r}} \\ &\quad \times (-1)^{N-r} y^{2N-2r}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} q_{2N}^{(o)} &= \frac{1}{2} \exp(-y^2) \operatorname{arc sh} y^2 \frac{2^{2N}}{(2N-1)!!} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(2N)!}{(2N-2r)! 2^{2r}} \\ &\quad \times (-1)^{N-r} y^{2N-2r}. \end{aligned} \quad (19)$$

对 $N = 2$, 即 4 阶压缩有

$$q_4^{(e)} = \frac{8}{3} y^2 e^{-y^2} \operatorname{arc ch} y^2 \left(\frac{3}{2} - y^2 \right), \quad (20)$$

$$q_4^{(o)} = \frac{8}{3} y^2 e^{-y^2} \operatorname{arc sh} y^2 \left(y^2 - \frac{3}{2} \right). \quad (21)$$

1) 夏云杰、郭光灿, 量子电子学, 5(1988), 301.

显然,偶相干态在 $y^2 < 3/2$ 时有 4 阶压缩,而奇相干态有 4 阶压缩的条件为 $y^2 > 3/2$,即当一个存在 4 阶压缩时,另一个一定不存在。

在(18),(19)式中令 $N = 3$, 得到 6 阶压缩度为

$$q_6^{(e)} = \frac{32}{15} y^2 e^{-y^2} \operatorname{arc ch} y^2 \left(y^4 - \frac{15}{4} y^2 + \frac{45}{8} \right), \quad (22)$$

$$q_6^{(o)} = \frac{32}{15} y^2 e^{-y^2} \operatorname{arc sh} y^2 \left(-y^4 + \frac{15}{4} y^2 - \frac{45}{8} \right). \quad (23)$$

到此,已注意到 6 阶压缩的情况与 4 阶压缩完全类似。对更高阶的压缩也有相同的结论,这一点从(18)和(19)两式看是很明显的,在那里,当 $q_4^{(e)}$ 小于零时, $q_4^{(o)}$ 一定大于零,反之亦然。即奇相干态与偶相干态的各级高阶压缩存在的区域都不能重合,这是 $x = 0$ 时的情形。

对于 $x \neq 0$ 时这种普遍情况,奇偶相干态的 4 阶压缩度为

$$q_4^{(e)} = -\frac{8}{3} e^{|\alpha|^2} \operatorname{arc ch} |\alpha|^2 \left[\left(\frac{3}{2} + x^2 \right) x^2 + y^2 e^{-2|\alpha|^2} \left(y^2 - \frac{3}{2} \right) \right], \quad (18')$$

$$q_4^{(o)} = -\frac{8}{3} e^{|\alpha|^2} \operatorname{arc sh} |\alpha|^2 \left[\left(\frac{3}{2} + x^2 \right) x^2 - y^2 e^{-2|\alpha|^2} \left(y^2 - \frac{3}{2} \right) \right], \quad (19')$$

那么这时奇偶相干态存在 4 阶压缩的条件变为

$$\left(\frac{3}{2} + x^2 \right) x^2 < y^2 e^{-2|\alpha|^2} \left(\frac{3}{2} - y^2 \right) \quad (\text{偶相干态}),$$

$$\left(\frac{3}{2} + x^2 \right) x^2 < y^2 e^{-2|\alpha|^2} \left(y^2 - \frac{3}{2} \right) \quad (\text{奇偶相干态}).$$

由于不等式小于号左边大于零,偶相干态存在 4 阶压缩时必须要求 $y^2 < 3/2$,而奇相干态要求 $y^2 > 3/2$,即这一点与 $x = 0$ 相同,即高阶压缩存在的区域不相重合,相互排斥。但是由于上面不等式的限制, $x \neq 0$ 时的 4 阶压缩要比 $x = 0$ 时小。同样,对 6 阶压缩也可作类似分析,并有相同的结论,限于篇幅,不再赘述。

奇偶相干态存在高阶压缩本身又一次证明了高阶压缩的独立性,因为奇相干态是绝对不存在二阶压缩的。另外,奇偶相干态在高阶压缩行为上表现为严格的相互排斥,这一点与其在二阶压缩和反聚束效应上的表现是类似的。

三、奇偶相干态的准概率分布函数

一个态的准概率分布函数反映了这个态的很多特征,由这些准概率分布函数可以方便地讨论态的各种量子统计性质,由于具有非经典特性的态都不存在正定的和非奇异的 Glauber P 表示,态的特征函数, Wigner 函数及其准概率密度受到了人们的重视^[16],已对很多光量子态的这些函数进行了研究^[16,17],期望得到表征纯量子态的方便表示。奇相干态与偶相干态在光场的各种量子性质上的表现是极其独特的,现在来研究这两个态的准概率分布函数与其它熟知量子态的异同。

按照特征函数的定义^[17]

$$\chi(\eta) = \operatorname{Tr}(\rho e^{\eta a^\dagger} e^{-\eta^* a}) \quad (24)$$

和 Wigner 算符的正规乘积表示^[18]

$$\Delta(p, q) = \frac{1}{\pi} e^{-2(a^* + r^*)(a - r)}, \quad (25)$$

不难得到奇偶相干态的特征函数和 Wigner 分布函数分别为

$$\begin{aligned} \chi_e(\eta) = \frac{1}{4} \exp |\alpha|^2 \operatorname{arccch} |\alpha|^2 [e^{\eta \alpha^* - \eta^* \alpha} + e^{\eta \alpha^* + \eta^* \alpha - 2|\alpha|^2} \\ + e^{-\eta \alpha^* - \eta^* \alpha - 2|\alpha|^2} + e^{-\eta \alpha^* + \eta^* \alpha}], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \chi_o(\eta) = \frac{1}{4} \exp |\alpha|^2 \operatorname{arcsch} |\alpha|^2 [e^{\eta \alpha^* - \eta^* \alpha} - e^{\eta \alpha^* + \eta^* \alpha - 2|\alpha|^2} \\ - e^{-\eta \alpha^* - \eta^* \alpha - 2|\alpha|^2} + e^{-\eta \alpha^* + \eta^* \alpha}] \end{aligned} \quad (27)$$

和

$$\begin{aligned} W_e = {}_e\langle \alpha | \Delta(p, q) | \alpha \rangle_e = \frac{1}{2\pi} e^{R^2 \operatorname{arccch} R^2} e^{-(q^2 + p^2)} \\ \times [e^{-2R^2} \operatorname{ch}(2\sqrt{2} R(q \cos \phi + p \sin \phi)) \\ + \cos(2\sqrt{2} R(q \sin \phi - p \cos \phi))], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} W_o = {}_o\langle \alpha | \Delta(p, q) | \alpha \rangle_o = \frac{1}{2\pi} e^{R^2 \operatorname{arcsch} R^2} e^{-(q^2 + p^2)} \\ \times [e^{-2R^2} \operatorname{ch}(2\sqrt{2} R(q \cos \phi + p \sin \phi)) \\ - \cos(2\sqrt{2} R(q \sin \phi - p \cos \phi))], \end{aligned} \quad (29)$$

式中 p, q 满足

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip), \quad (30)$$

R, ϕ 分别为复数 α 的模和辐角。常见光场态(热光场、相干光和压缩光)的这些函数都是高斯型的^[16,17],但是,奇、偶相干态的这些函数却不是,它们表现出更为复杂的形式。特别是, (28), (29)式所表示的两个态的 Wigner 函数在适当选择 R, ϕ, p 和 q 后,它们可取负值,例如

(1) $\phi = \pi/4, p = -q, 2Rq = \pi$, 则

$$W_e = \frac{1}{2\pi} e^{R^2 \operatorname{arccch} R^2} e^{-2q^2} (e^{-2R^2} - 1) < 0,$$

$$W_o = \frac{1}{2\pi} e^{R^2 \operatorname{arcsch} R^2} e^{-2q^2} (e^{-2R^2} + 1) > 0;$$

(2) $\phi = -\pi/4, p = -q$, 则

$$W_e = \frac{1}{2\pi} e^{R^2 \operatorname{arccch} R^2} e^{-2q^2} (e^{-2R^2} + 1) > 0,$$

$$W_o = \frac{1}{2\pi} e^{R^2 \operatorname{arcsch} R^2} e^{-2q^2} (e^{2R^2} - 1) < 0.$$

这只是两个显而易见的情况,事实上,奇、偶相干态的 Wigner 函数取负值的情形是很多的,就是满足上面两种情况的相空间点也有无穷多个。另外,又注意到,奇、偶相干态

的 Wigner 分布函数表达式中,方括号里面的两项是完全相同的,只不过偶相干态为这两项之和,而奇相干态为这两项之差,由于第一项恒正,第二项可正也可负,两个态的 Wigner 函数不可能同时取负值,上面的两个例子也说明了这一点.非经典光场态具有负 Wigner 函数,目前还未见到这一结论的报道,这种负 Wigner 函数的非经典光场究竟与具有正定的 Wigner 函数的非经典光场有什么本质的差异,是一个很值得探讨的问题,对此,我们正进行深入的研究.

压缩态的 Wigner 分布函数总是正定的^[19],已用这类函数去处理压缩态的产生及其与物质的相互作用问题^[6,7],显而易见,奇、偶相干态的产生及其与原子的相互作用问题必须寻求另外的办法.

现在考查奇、偶相干态的 QPD 的 $\langle z | \rho_{e,o} | z \rangle$, 其中

$$\rho_e = |\alpha\rangle_e \langle \alpha|, \quad \rho_o = |\alpha\rangle_o \langle \alpha|, \quad (31)$$

$|z\rangle$ 为某一相干态. 由(11)和(12)两式可以求得

$$Q_e = \langle z | \rho_e | z \rangle = \frac{1}{2} \exp(-x^2 - y^2) [\operatorname{ch}(2R(x \cos \phi + y \sin \phi)) + \cos(2R(x \sin \phi - y \cos \phi))]; \quad (32)$$

$$Q_o = \langle z | \rho_o | z \rangle = \frac{1}{2} \exp(-x^2 - y^2) [\operatorname{ch}(2R(x \cos \phi + y \sin \phi)) - \cos(2R(x \sin \phi - y \cos \phi))], \quad (33)$$

式中 $z = x + iy$, $\alpha = R e^{i\phi}$. 图 1 是依据上两式作出的偶相干态和奇相干态的 QPD 图,图 2 是图 1 在靠近原点附近放大后的精细图,由这两个图显示出这两个态的 QPD 都是较复杂的闭曲线,在原点附近并以原点为中心的小椭圆表明奇、偶相干态的 QPD 图形若作成三维立体图,则是一个横断面象两叶花瓣状的山丘,顶部中间有一很细的井.

压缩态的 QPD 是椭圆形,振幅压缩态的 QPD 是月牙形,由此,一些文献认为椭圆形和月牙形分别是通常二阶压缩与振幅压缩的特征,称之为椭圆形压缩态和月牙形压缩

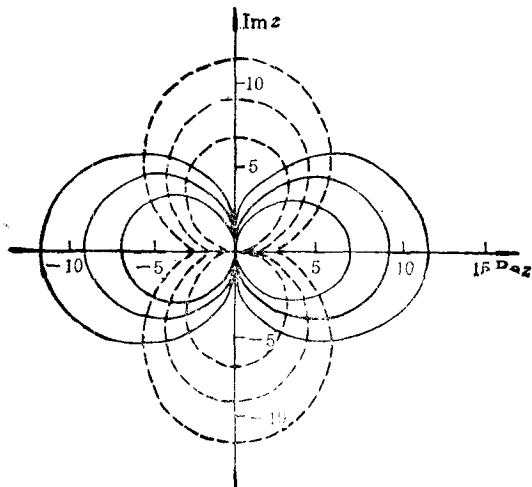


图 1 奇、偶相干态的准概率密度
 Q_e (—)和 Q_o (---)各曲线分别对应其最大值的 0.95, 0.05 和 0.001 倍

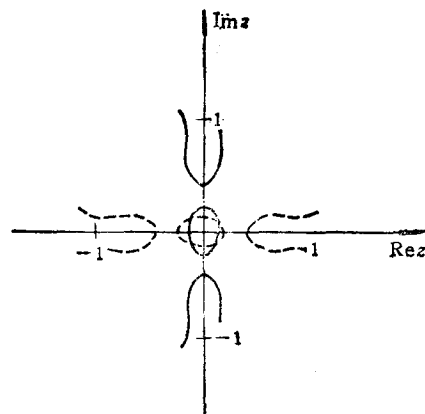


图 2 奇、偶相干态的准概率密度
 Q_e (—)和 Q_o (---)在原点附近放大后的精细图曲线对应其最大值的 0.7 倍

态^[12],从对奇、偶相干态的 QPD 性质的研究,可以认为,至少奇、偶相干态的 QPD 形状表现不出它们的压缩性质,因为只有偶相干态有二阶压缩,奇或偶相干态均可有更高阶压缩,这两个态的 QPD 既不是椭圆型的,也不是月牙型的,而是双叶花瓣状,也许这种特殊性正反映了奇偶相干态的奇特性质。

- [1] M. Hillery, *Phys. Rev.*, **A36** (1987), 3796.
- [2] Yunjie Xia and Guongcan Guo, *Phys. Lett.*, **A136** (1989), 281.
- [3] 彭石安、郭光灿,物理学报, **39**(1990), 51.
- [4] Yunjie Xia and Guongcan Guo, *J. Opt. Soc. Am.*, **B7** (1990), to be published.
- [5] 夏云杰、郭光灿,物理学报, **39**(1990), 1070.
- [6] N. Klenner, M. Douche and J. We's, *J. Phys. A*, **19** (1986), 3831.
- [7] 林仁明、黄思先、张林,物理学报, **37**(1988), 573.
- [8] F. D. Drummond, C. W. Gardiner, *J. Phys. A*, **13** (1980), 353.
- [9] 谭维翰、张卫平,物理学报, **37**(1988), 1767.
- [10] S. L. Brauntin and R. I. Melachlan, *Phys. Rev.*, **A35** (1987), 1659.
- [11] Y. Yamamoto, N. Tmoto and S. Machida, *Phys. Rev.*, **A33** (1986), 3245.
- [12] M. Kitagawa and Y. Yamamoto, *Phys. Rev.*, **A34** (1986), 3974.
- [13] C. K. Hong and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 323.
- [14] C. Gerry and S. Rodrigues, *Phys. Rev.*, **A34** (1987), 4440.
- [15] M. Kozierowski, *Phys. Rev.*, **A344** (1986), 3474.
- [16] J. Janszky and Y. Yushin, *Phys. Lett.*, **A137** (1989), 451.
- [17] G. S. Agarwal and G. Adam, *Phys. Rev.*, **A39** (1989), 6259.
- [18] 范洪义、阮图南,中国科学, **A1**(1984), 61.
- [19] 范洪义、郭光灿,光学学报, **5**(1985), 804.

HIGHER-ORDER SQUEEZING AND QUASIPROBABILITY DISTRIBUTION FUNCTIONS OF EVEN AND ODD COHERENT STATES

XIA YUN-JIE LI HONG-ZHEN

Department of Physics, Quju Normal University, Quju, 273165

GUO GUANG-CAN

Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei, 230026

(Received 23 March 1990)

ABSTRACT

The higher-order squeezing and quasiprobability distribution function of even and odd coherent states are studied in this paper. The results show that the properties of higher-order squeezing of the two states exclude each other, and characteristic functions and Wigner functions are all not gaussian. Particularly, Wigner functions can not be perseved positive definite. Quasiprobability density (QPD) of the two states are neither "elliptic" nor "crescent", but are two-petal-like shape, which shows that squeezing type can not be represented by the QPD figure of a state.

PACC: 4250; 0530