

# 双光子 Jaynes-Cummings 模型中 光子统计分布的演化特性\*

何 林 生      江 海 河

中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥, 230031

1990 年 5 月 28 日收到

推导了双光子 Jaynes-Cummings 模型中光子统计分布函数的一般表示式, 该式适用于任何初始光场和任何初始原子状态. 详细研究了严格双光子共振情况下, 初始为相干态和压缩态的光场在该模型中光子分布曲线的演化特征. 两者呈现很大的差异.

PACC: 4250; 3280K

## 一、引 言

自 Jaynes-Cummings 首先用 Jaynes-Cummings 模型<sup>[1]</sup> (简称 JCM) 研究光和原子相互作用以来, 许多作者已用这个模型研究了各类问题<sup>[2,3]</sup>, 如共振荧光、光子反聚束效应和压缩态光场的产生、原子反转 Rabi 振荡的周期崩溃和再生现象<sup>[2,4]</sup>. 它不但是一个严格可解的很简单的模型, 模型中蕴含着异常丰富的内容, 而且是研究激光物理和微观微波激射的理论基础. 特别是现在已实现里德伯原子微观微波激射<sup>[5]</sup>和单原子微波激射中原子 Rabi 振荡的崩溃和再生现象的观察<sup>[6]</sup>, 更进一步激发人们对研究 JCM 特性的兴趣.

在光子统计方面, 以往的研究多着重光场统计量的宏观特性, 即统计平均量的变化, 尚未有人详细研究光子统计分布的演化特性. 另一方面, 我们曾指出光场统计平均量只能反映光场的宏观特性<sup>[7]</sup>, 不能完全反映光场的微观统计特性; 相反, 光场的光子统计分布特性一旦被确定, 则它的宏观特性也就被确定. 因此研究 JCM 表现为非经典效应的崩溃和再生过程中光子统计分布的演化是非常有意义的. 本文以双光子 JCM<sup>[2]</sup> 为例, 研究了原子 Rabi 振荡的崩溃和再生现象中各典型时刻的光子统计分布曲线的特性. 结果表明, 对于初始相干态和压缩态光场情况, 光子统计分布演化特性有着明显的差异.

## 二、双光子 Jaynes-Cummings 模型与光子统计分布函数

考虑一个由单模量子化光场和单个二能级原子组成的系统, 该系统通过双光子跃迁过程耦合在一起. 在旋波近似和偶极矩近似下, 系统的哈密顿量为<sup>[2]</sup>

\* 国家自然科学基金资助的课题.

1) 何林生、柳尚青, 量子电子学, 6(1989), 299.

$$H = \hbar(\Omega R_3 + \omega a^\dagger a + g^* R_+ a^2 + g R_- a^{\dagger 2}), \quad (1)$$

式中  $\Omega$  是原子跃迁频率,  $\omega$  是光频,  $R_3$  是原子反转算符,  $R_+(R_-)$  是原子升(降)算符,  $a^\dagger(a)$  是光子产生(湮没)算符,  $g$  是双光子耦合常数. 这个模型是严格可解的, 称为双光子 Jaynes-Cummings 模型(双光子 JCM).

设系统初始态密度算符为  $\rho_T(0) = \rho^a(0) \otimes \rho(0)$ ,  $\rho^a(0)$  为原子初始态密度算符,  $\rho(0)$  为光场初始态密度算符. 在上述哈密顿量作用下, 系统态密度算符  $\rho_T(t)$  演化为

$$\rho_T(t) = U(t) \rho_T(0) U^\dagger(t), \quad (2)$$

演化算符  $U(t)$  满足薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) = H U(t). \quad (3)$$

为了求光子统计分布函数, 将(2)式先对原子求迹, 然后求在光子数态表象中的矩阵元

$$\begin{aligned} \rho_{m,n}(t) &= \langle m | \rho(t) | n \rangle = \langle m | \text{Tr}_a \rho_T(t) | n \rangle \\ &= \sum_{i_a=1}^2 \langle m | \langle i_a | U \rho^a(0) \rho(0) U^\dagger | i_a \rangle | n \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $|n\rangle$  表示光子数态,  $|i_a\rangle$  表示原子态. 利用完备性, 在(4)式等号右边插入

$$\sum_{j_a=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} |j_a\rangle \langle k| \langle k| \langle j_a| = 1 \quad \text{和} \quad \sum_{\lambda_a=1}^2 \sum_{l=0}^{\infty} |\lambda_a\rangle \langle l| \langle l| \langle \lambda_a| = 1,$$

则得

$$\begin{aligned} \rho_{m,n}(t) &= \sum_{i_a=1}^2 \sum_{j_a=1}^2 \sum_{\lambda_a=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \langle m | \langle i_a | U | j_a \rangle \langle k | \langle k | \langle j_a | \rho^a(0) \rho(0) | \lambda_a \rangle \langle l | \langle l | \langle \lambda_a | U^\dagger | i_a \rangle | n \rangle \\ &= \sum_{i_a=1}^2 \sum_{j_a=1}^2 \sum_{\lambda_a=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} U_{m,i_a;k,j_a} \rho_{j_a \lambda_a}^a(0) \rho_{k l}(0) U_{l, \lambda_a; n, i_a}^\dagger. \end{aligned} \quad (5)$$

由此可见, 只要知道初态矩阵元  $\rho_{i_a \lambda_a}^a(0)$ ,  $\rho_{k l}(0)$  和演化矩阵元  $U_{m, i_a; k, j_a}(U_{l, \lambda_a; n, i_a}^\dagger)$  即可求得  $\rho_{m,n}(t)$ . 由(3)式, 并注意  $[H, U] = 0$ , 得  $U_{m, i_a; k, j_a}$  的运动方程

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U_{m, i_a; k, j_a} &= \langle m, i_a | UH | n, j_a \rangle \\ &= \left[ m\omega + (-1)^{i_a} \frac{\Omega}{2} \right] U_{m, i_a; n, j_a} \\ &\quad + g \delta_{j_a, 2} [(n+1)(n+2)]^{\frac{1}{2}} U_{m, i_a; n+2, 1} \\ &\quad + g^* \delta_{j_a, 1} [n(n-1)]^{\frac{1}{2}} U_{m, i_a; n-2, 2}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中已用  $\hbar = 1$  单位. 易见, 只能存在四类不为零的演化矩阵元  $u_{m,n} = U_{m, 1; n, 1}$ ,  $v_{m,n} = U_{m, 2; n, 2}$ ,  $s_{m,n} = U_{m, 1; n, 2}$ ,  $w_{m,n} = U_{m, 2; n, 1}$ . 按(6)式写出上面四类矩阵元之方程后, 利用初始条件  $U(0) = 1$ , 解出

$$u_{m,n} = \exp[i(m-1)\omega t] \left[ \cos \sigma_m t - \frac{i\Delta}{\sigma_m} \sin \sigma_m t \right];$$

$$\begin{aligned}
 s_{m,m-2} &= -i\eta_m \exp[-i(m-1)\omega t] \sin \sigma_m t; \\
 w_{m,m+2} &= -i\eta_{m+2} \exp[-i(m+1)\omega t] \sin \beta_m t; \\
 v_{m,m} &= \exp[-i(m+1)\omega t] \left[ \cos \beta_m t + \frac{i\Delta}{\beta_m} \sin \beta_m t \right],
 \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned}
 \sigma_m &= [|g|^2 m(m-1) + \Delta^2]^{\frac{1}{2}}; \quad \beta_m = [|g|^2 (m+2)(m+1) + \Delta^2]^{\frac{1}{2}}; \\
 \eta_m &= g[m(m-1)]^{\frac{1}{2}}/\sigma_m; \quad 2\Delta = 2\omega - Q,
 \end{aligned} \quad (8)$$

$\sigma_m$  和  $\beta_m$  是量子 Rabi 频率,  $2\Delta$  是双光子失谐量. 而其它的矩阵元  $u_{m,n}$ ,  $v_{m,n}$ ,  $s_{m,n}$  和  $w_{m,n}$  均为零. 因此将(7)式代入(5)式后有

$$\begin{aligned}
 \rho_{m,n}(t) &= u_{m,m} \rho_{1,1}^A(0) \rho_{m,n}(0) u_{n,n}^* + u_{m,m} \rho_{1,2}^A(0) \rho_{m,m-2}(0) s_{n,n-2}^* \\
 &\quad + s_{m,m-2} \rho_{2,1}^A(0) \rho_{n-2,n}(0) u_{n,n}^* + s_{m,m-2} \rho_{2,2}^A(0) \rho_{m-2,n-2}(0) s_{n,n-2}^* \\
 &\quad + w_{m,m+2} \rho_{1,1}^A(0) \rho_{m+2,n+2}(0) w_{n,n+2}^* + w_{m,m+2} \rho_{1,2}^A(0) \rho_{m+2,n} v_{n,n}^* \\
 &\quad + v_{m,m} \rho_{2,1}^A(0) \rho_{m,n+2} w_{n,n+2}^* + v_{m,m} \rho_{2,2}^A(0) \rho_{m,n}(0) v_{n,n}^*.
 \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式是光场密度矩阵元的一般表示式,适用于任何原子初态和任何光场初态情况,并适用于有光频失谐量的情况.

### 三、光子统计分布演化特性

作为例子,考虑初始相干态光场情况

$$\rho_{m,n}(0) = \langle m|\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle = e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^{*n} \alpha^m}{\sqrt{m!n!}} \quad (10)$$

和初始压缩态光场情况<sup>[2]</sup>

$$\rho_{m,n}(0) = \frac{\exp\left[-\xi - \frac{i}{2}(n-m)\phi\right]}{\sqrt{m!n!} \cosh r} \left(\frac{\tanh r}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}} H_m(y) H_n(y^*), \quad (11)$$

式中

$$\xi = |\alpha|^2 [1 + \tanh r \cdot \cos(2\theta - \phi)], \quad y = \frac{\alpha + \alpha^* \tanh r \cdot \exp(i\phi)}{[2 \exp(i\phi) \tanh r]^{1/2}}$$

$H_m(y)$  是厄密多项式,  $\alpha$  和  $\theta$  是光场相干幅及其幅角,  $r$  和  $\phi$  是光场的压缩因数及压缩角.

为了对照文献[2]中原子反转  $R_3$  的演化曲线,并抽出光子分布曲线演变的主要特性,这里也相应地设初始原子在基态  $\rho_{1,1}^A(0) = 1$ ,  $\rho_{i,j}^A(0) = 0$  ( $i \neq 1$  或  $j \neq 1$ ), 并且双光子共振  $\Delta = 0$ . 则(9)式变为

$$\rho_{m,n}(t) = \exp[i(n-m)\omega t] [\cos \sigma_m t \cos \sigma_n t \rho_{nn}(0) + \eta_{m+2} \eta_{n+2} \sin \beta_m t \sin \beta_n t]. \quad (12)$$

选取原子反转  $R_3$  崩溃过程中若干典型时刻  $a, b, c, \dots, i, j$  (见图 1 和图 2. 图 1 和图 2 是按文献[2]中  $R_3$  的表示式重新计算绘制的), 分别计算初始相干态和压缩态光场的光子统计分布曲线(如图 3, 图 4, 图 5). 图 1 和图 2 中的  $a, b, c, \dots, i, j$  顺序分别与图 3—图 5 中  $t = 0, 0.03, 0.06, \dots, 0.495, 0.875$  s 相对应.

发现光子分布曲线有如下特性:

### 1. 相干态初场情况(图 1, 图 3)

1) 除了初始时刻和原子反转  $R_3$  的 Rabi 振荡完全崩溃的时刻(图 1 中  $a, j$  两点 和

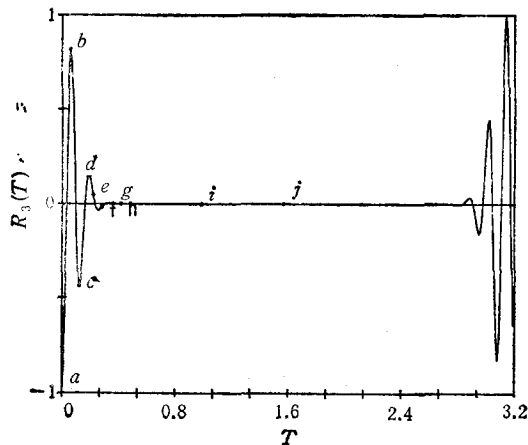


图 1 相干态光场中原子反转  $R_3$  随无量纲时间  $T$  的变化 若干典型点  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$  所对应的时刻分别为  $t = 0, 0.03, 0.06, 0.09, 0.11, 0.14, 0.18, 0.21, 0.495$  和  $0.785$ s;  $T = |g|t$ ;  $|g| = 2$ ;  $|\alpha| = 5$ ;  $\theta = 0$

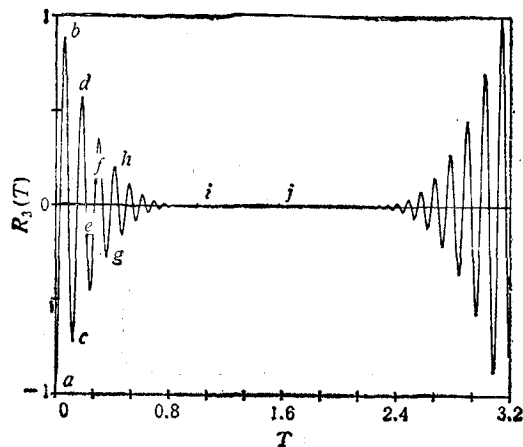


图 2 压缩态光场中原子反转  $R_3$  随  $T$  的变化  $|\alpha| = 5$ ;  $\theta = 0$ ;  $r = 1.25$ ;  $\phi = 0$ ; 其余图注同图 1

图 3 中  $t = 0$  和  $t = 0.785$ s), 光子分布曲线为光滑曲线外, 其余时刻均呈现振荡分布特征。

2) 光子分布曲线主峰位置和峰高在演化中几乎没有变化, 但分布曲线宽度  $\Delta n$  均有所加宽(除了  $t = 0$  和  $t = 0.785$ s 时刻), 好像在“不变”的光滑曲线上加了一些锯齿。

3) 振荡分布于主峰两侧, 这不同于相干压缩态——在那里振荡仅出现于主峰右侧(高  $n$  端)<sup>[7,11]</sup>。

1) 何林生、柳尚青, 量子电子学, 6(1989), 299.

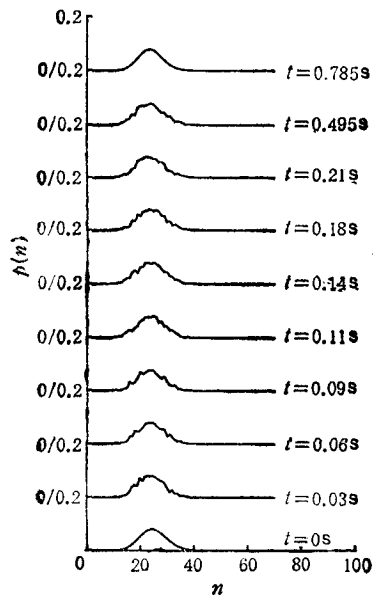


图3 相干态光场光子统计分布的演化  
 $|\alpha| = 5; \theta = 0$

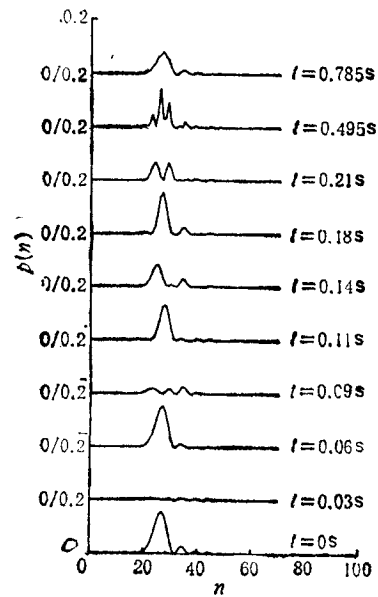


图4 压缩态光场光子统计分布的演化  
 $|\alpha| = 5; \theta = 0; r = 1.25; \phi = 0$

上面相干态光场光子分布曲线的这些演化特性表明,在演化中光场必然呈现压缩效应,这与文献[2]的结果一致。而由  $t = 0$  和  $t = 0.785s$  的光滑分布曲线可知,在这两个时刻,光场将不呈现压缩特性,这也与文献[2]中图8的结果相符合。

## 2. 压缩态初场情况 (图2, 图4, 图5)

1) 当原子反转  $R_3 < 0$  时,光子分布曲线呈现明显的主峰,振荡呈现在主峰右侧。这表明光场基本上仍呈现(相干)压缩态光场特性。

2) 但当  $R_3 > 0$  时,光子分布曲线呈现几乎无规的多峰振荡,没有明显的主峰。

3)  $R_3$  越大,光子分布曲线幅度越低,振荡分散得越厉害。

4) 光子分布曲线振荡的相对振幅要比相干态情况大得多,特别是在  $i$  时刻 ( $t = 0.495s$ )。

上述结果表明,不同种光场和原子相互作用是不同的,在相干态情况原子几乎从各光子数态“均匀分布”地吸收光子;而在压缩态情况原子几乎是有选择地吸收光子,即主要从主峰附近的光子数态吸收光子,使得当原子反转  $R_3$  很大时 ( $b$  点),光子分布曲线几乎被“拉成”仅有一点微弯的直线(相对而言)。这表明,压缩态光场与原子双光子相互作用比相干态情况中更有效,或者说耦合更紧密,因而使原子受到光场作用后产生 Rabi 振荡更持久,和相干态场情况相比较不易崩溃(见图1和图2)。

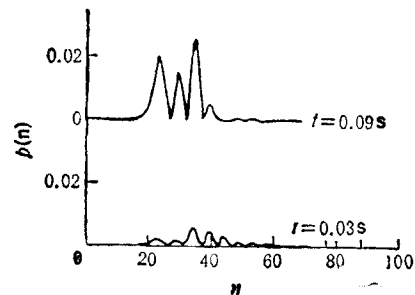


图5 压缩态光场光子统计分布曲线 为图4中  
 $t = 0.03$  和  $0.09s$  时刻的曲线放大10倍

还注意到,演化中光子统计分布曲线的振荡特性不同于一般相干压缩态光场的光子分布曲线的振荡特性,后者振荡分布在主峰右侧(高  $n$  端)<sup>[7,1)</sup>。一方面这反映了原子 Rabi 振荡对光场的反作用,另一方面这也可能表明演化中光场隐含着迄今尚未阐明的量子特性,如光子间的某种相关特性<sup>[8]</sup>。

- [1] E. J. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51** (1963), 89.  
F. W. Cummings: *Phys. Rev.* **A104** (1965), 1051.
- [2] Lin-Sheng He, *J. Opt. Soc. Am.*, **B6** (1989), 1915 and there references.
- [3] S. M. Barnett, P. Filipowicz, J. Javanainen and P. L. Knight, in *Frontier in Quantum Optics*, Eds. by E. P. Pike and S. Sakar, Hilger, Bristol (1986), p. 485.
- [4] J. H. Eberly, N. B. Narozhny and J. J. Sanchez-mondragon, *Phys. Rev. Lett.*, **44**(1981), 1323.
- [5] D. Meschede, H. Walther and G. Muller, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 551.
- [6] G. Rempe, H. Walther and N. Klein, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 353.
- [7] 何林生、柳尚青, *中国激光*, **18**(1990), 待发表.
- [8] V. V. Dodonov, A. B. Klimov and V. I. Minko, *Phys. Lett.*, **A134** (1989), 211.

## FEATURES OF EVOLUTION FOR STATISTICAL DISTRIBUTION OF PHOTON IN TWO-PHOTON JAYNES-CUMMINGS MODEL

HE LIN-SHENG    JIANG HAI-HE

*Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Hefei, 230031*

(Received 28 May 1990)

### ABSTRACT

The general expression of the statistical distribution function of photons in two-photon Jaynes-Cummings model (JCM) is derived. The expression can be applied to the cases of any initial light field and any initial atomic state. Under exact two-photon resonance, the features of evolution for the statistical distribution of photons in JCM with the initial coherent state field and the initial squeeze state field are studied in detail. These two cases show striking difference.

**PACC:** 4250; 3280K

---

1) 何林生、柳尚青, *量子电子学*, **6**(1989), 299.