

KdV 方程与高阶 KdV 方程行波解 之间的形变理论*

陈 德 芳 楼 森 岳

宁波师范学院物理系, 宁波, 315211

1990 年 7 月 2 日收到

从具有较多参数的复杂非线性方程的解出发, 取某些参数的极限, 这些解就退化到具有较少参数的简单方程的解. 本文以 KdV 方程的行波解为例说明对于某些特解, 上述极限过程的逆过程, 即将简单方程的解形变到复杂方程的解是可能的, 但一般来说并不一定具有唯一性.

PACC: 0290; 0340

一、引 言

众所周知, 将一个复杂理论退化成一个简单理论是一件非常容易的事情. 例如: 简单的极限过程 ($\hbar$ 为普朗克常数, c 为光速)

$$\hbar \rightarrow 0, c \rightarrow \infty, \quad (1)$$

就将一个相对论的量子理论退化到一个相应的经典理论. 然而, 其逆过程即将一个简单理论形变 (deformation) 到一个复杂理论且绝非易事. 幸运的是, 对于某些特殊情况, 逆过程是可以完成的. 如: 经典 Yang-Baxter 方程可以演化到量子的 Yang-Baxter 方程; 某些由共形场论描述的零质量系统的临界现象理论可以形变到一个非零质量系统的情况^[1].

同样, 在非线性方程理论中也存在类似的情况. 将一个具有较多参数的复杂方程的解退化到具有较少参数的简单方程的解是非常简单的, 只要取某些参数的某种极限过程即可. 然而要将简单方程的解形变到复杂方程的解却是相当困难的. 同样幸运的是对于某些方程的特解, 这样的逆问题是可以得到解决的. 如当双 sine-Gordon 方程^[2]

$$\begin{aligned} \square \Phi &\equiv \left(\sum_{i=1}^D \partial_i^2 - \partial_t^2 \right) \Phi \\ &= \frac{2\alpha_0}{|1 + 4\eta|g} \left[2\eta \sin g\Phi - \sin \frac{1}{2} g\Phi \right] \end{aligned} \quad (2)$$

的解当 $\eta \rightarrow \infty$ (或 $\eta \rightarrow 0$) 时就退化为单 sine-Gordon 方程

* 国家自然科学基金资助的课题.

$$\square\phi = -\frac{M}{g_1} \sin g_1\phi \quad (3)$$

的解,其中当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, $M = -\alpha_0 \text{sign}\eta$, $g_1 = g$; 当 $\eta \rightarrow 0$ 时, $M = \alpha_0$, $g_1 = \frac{1}{2}g$.

一般来说,我们要从单 sine-Gordon 方程的解得到双 sine-Gordon 方程的解是很困难的. 然而对于某些特解,这样的逆运算却可以很方便地由一些纯粹的代数公式或解一个常微分方程来完成^[3]. 又如: 高维 $\lambda\phi^4 + \xi\phi^6$ 标量场^[4]和高维 $\lambda\phi^4 + \nu\phi^3$ 标量场^[5]场方程的某些特解也可以纯代数地由形变 $\lambda\phi^4$ 场方程 ($\xi = 0$ 或 $\nu = 0$) 的解来得到^[6], 并可以将这种方法进一步推广到其它具有 Lorentz 不变性的非线性 Klein-Gordon 场方程^[7,8].

本文要处理的问题是: (1) 具有非 Lorentz 不变性的非线性方程 (如 KdV 方程和高阶 KdV 方程) 之间是否可以建立一定的形变关系, 由简单方程 (KdV 方程) 的解得到复杂方程 (高阶 KdV 方程) 的解? (2) 这样的逆过程是否具有唯一性? 以 KdV 方程和高阶 KdV 方程的行波解为例, 我们指出一般地由简单方程的解得到复杂方程解的形变关系不具有唯一性. 本文建立了 KdV 方程和一般化的 5 阶 KdV 方程的行波解之间的纯代数的形变关系. 并给出了一些对非线性方程具有特殊意义的明显的 Jacobi 椭圆函数解^[7,9]. 还进一步建立了 KdV 方程和一般化的 7 阶 KdV 方程的行波解之间的形变关系.

二、KdV 方程和五阶 KdV 方程的行波解之间的形变关系

从 KdV 方程 $(U_{xx} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} U)$

$$U_t - mUU_x + U_{3x} = 0 \quad (4)$$

的高阶守恒量出发, Lax^[10] 找到了第一族高阶 KdV 方程. 其 5 阶 KdV 方程为

$$u_t + (10uu_{2x} + 5u_x^2 + 10u^3 + u_{4x})_x = 0. \quad (5)$$

更进一步, 从方程 (5) 的守恒量出发, Sawada 和 Kotera^[11] 以及 Candrey, Dodd 和 Gibbon^[12] 得到了第二族高阶 KdV 方程 (或称作 Sawada-Kotera 方程), 其 5 阶方程为

$$u_t + (15uu_{2x} + 15u^3 + u_{4x})_x = 0. \quad (6)$$

Ito^[13] 给出了另一个 5 阶 KdV 方程:

$$u_t + (18uu_{2x} + 9u_x^2 + 18u^3 + u_{4x})_x = 0. \quad (7)$$

方程 (2)–(4) 不可能由于 x, t, u 的标度变换而互相转换. 实际上, 更一般的完全可积的 5 阶 KdV 方程应将方程 (4) 和 (5) (或方程 (4) 和 (6)) 合并^[14]. 如 (a, b 为任意常数):

$$u_t + a(u_{3x} - muu_x) + b[30u^2u_x + 10(2u_xu_{2x} + uu_{3x}) + u_{5x}] = 0. \quad (8)$$

由于我们仅限制于处理行波解, 可将 (5) 式进一步一般化为

$$u_t + (\mu u^2 + \nu u_{2x} + \alpha uu_{2x} + \beta u_x^2 + \gamma u^3 + \delta u_{4x})_x = 0, \quad (9)$$

其中 $\mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma$ 和 δ 为任意常数. (4)–(8) 式均为 (9) 式的特殊情况. 对于实际的物理问题, 作 (9) 式这样的推广是有意义的, 如, 当流体的无维度的表面张力趋近于 1/3 时, 水

波方程应由 $\alpha = \beta = \gamma = 0$ 的 5 阶 KdV 方程(9)而不是 KdV 方程(4)描述^[15],即

$$u_t + 2\mu uu_x + \nu u_{3x} + \delta u_{5x} = 0. \quad (10)$$

对于 KdV 方程(4)的行波解,有

$$-vU_\xi - mUU_\xi + U_{\xi\xi} = 0, \quad (11)$$

其中

$$\xi = x - vt. \quad (12)$$

将方程(11)关于 ξ 积分二次,得

$$U_{\xi\xi}(\xi) = C_1 + vU(\xi) + \frac{m}{2}U^2(\xi) \quad (13)$$

及

$$U_\xi^2(\xi) = C_2 + 2C_1U(\xi) + vU^2(\xi) + \frac{m}{3}U^3(\xi), \quad (14)$$

其中 C_1 和 C_2 为积分常数.

为了将 KdV 方程的行波解形变成 5 阶 KdV 方程(9)的解,我们首先将空间和时间作如下的形变(k 和 ω 为待定的时空膨胀因子):

$$\eta = kx - \omega t - \eta_0 \quad (15)$$

使 $U(\eta)$ 满足

$$U_{\eta\eta}(\eta) = C_1 + vU(\eta) + \frac{m}{2}U^2(\eta). \quad (16)$$

在方程(13)中参数 v 和 ξ 通过(12)式相关,然而在(16)式中, v 和 η 应当看作是独立的. 对于 5 阶 KdV 方程的行波解,可以将(9)式重写为

$$-\omega u_\eta + k(\mu u^2 + \nu k^2 u_{2\eta} + \alpha k^2 u u_{2\eta} + k^2 \beta u_\eta^2 + \gamma u^3 + \delta k^4 u_{4\eta})_\eta = 0. \quad (17)$$

进一步不难证明在 $u(\eta)$ 和 $U(\eta)$ 之间的形变关系为

$$u(\eta) = AU(\eta) + C_0, \quad (18)$$

其中

$$A = -\frac{C_\pm}{v} \frac{(2\mu + 6\gamma C_0)C_\pm + m(v + \alpha C_0)}{2(\alpha + \beta)C_\pm + 5m\delta} \equiv \frac{A_0}{v}, \quad (19)$$

$$k^2 = A/C_\pm, \quad (20)$$

$$\omega = k[2\mu C_0 + \nu k^2 v + (\alpha + 2\beta)A k^2 C_1 + \alpha k^2 C_0 v + 3\gamma C_0^2 + k^4 \delta (3m C_1 + v^2)] \quad (21)$$

及

$$C_\pm = \begin{cases} \frac{m}{12\gamma}[-3\alpha - 2\beta \pm \sqrt{(3\alpha + 2\beta)^2 - 120\gamma\delta}] & (\gamma \neq 0) \\ -\frac{5m\delta k^2}{3\alpha + 2\beta} & (\gamma = 0, 3\alpha + 2\beta \neq 0), \end{cases} \quad (22a) \quad (22b)$$

(18)–(22)式中, C_1, C_0, m, v , 和 η_0 为任意参数,利用形变关系(17)–(22)式,除了 $\gamma = 0, 3\alpha + 2\beta = 0$ 这种特殊情况外,一旦得到了 KdV 方程的一个行波解,就可立即得到 5 阶 KdV 方程的相应行波解. 从(22a)式看到,如果

$$(3\alpha + 2\beta)^2 - 120\gamma\delta \approx 0, \gamma \approx 0, \quad (23)$$

则 KdV 方程的一个行波解通过同一个形变关系 (18) 式形变成 5 阶 KdV 方程 (9) 的两个行波解。如果要求 (9) 式的解是实的, 则可采用形变 (18) 式的条件为: (1) 使用 KdV 方程的实解; (2) 方程 (9) 中的参数要求满足实解条件

$$(3\alpha + 2\beta)^2 - 120\gamma\delta \geq 0 \quad (\gamma \approx 0) \quad (24)$$

或

$$\gamma = 0, 3\alpha + 2\beta \approx 0. \quad (25)$$

而另一个实解条件 $k^2 > 0$ 总可由选择 ν 的值和符号得到满足。

作为应用的例子, 我们将 KdV 方程的一些熟知的解形变到 5 阶 KdV 方程 (9) 的解。

1. KdV 方程的单孤子解为^[15] ($C_1 = C_2 = 0, m = 6$)

$$U(\xi) = C'_0 - \frac{1}{2}(\nu + 6C'_0)\text{sech}^2\left[\frac{1}{2}(\nu + 6C'_0)^{\frac{1}{2}}\xi\right]. \quad (26)$$

根据形变关系 (18) 式, 立即得到一般化的 5 阶 KdV 方程 (9) 的单孤子解为

$$U(\eta) = a - \frac{b^2}{2\nu'}\text{sech}^2\frac{1}{2}b(kx - \omega t + \eta_0), \quad (27)$$

其中 $a = C_0 + C'_0 A$, $b = (\nu + 6C'_0)^{\frac{1}{2}}$, $\nu' = \nu/A_0$ 和 η_0 均为任意常数, k 和 ω 与这些常数的关系由 (20) 和 (21) 式决定。而 (24) 和 (25) 式正是 (9) 式具有 (27) 式形式的单孤子解存在条件。

2. KdV 方程的更一般的行波解可以被表示为各种类型的 Jacobi 椭圆函数解, 例如 ($m = 6$)^[15,7]

$$1) U^{(1)}(\xi) = C'_0 - \frac{2k^2(\nu + 6C'_0)}{4(1 + k^2)}\text{sn}^2\left\{\frac{[-(\nu + 6C'_0)]^{\frac{1}{2}}}{2(1 + k^2)^{\frac{1}{2}}}\xi\right\}. \quad (28)$$

$$C_1^{(1)} = -(\nu + 6C'_0)C'_0 + \frac{1}{4}k^2(1 + k^2)^{-2}(\nu + 6C'_0) + 3C'_0. \quad (29)$$

$$2) U^{(2)}(\xi) = C'_0 + \frac{1}{4}k'^2(1 + k^2)^{-1}(\nu + 6C'_0) \\ \times \phi_1^2[(\nu + 6C'_0)^{\frac{1}{2}}(2 + 2k^2)^{-\frac{1}{2}}\xi]. \quad (30)$$

$$\phi_2(x) = \frac{\text{cn}x}{1 + \text{sn}x}. \quad (31)$$

$$C_1^{(2)} = -(\nu + 6C'_0)C'_0 + 3C'_0 + \frac{1}{16}(1 - k^2)^2(1 + k^2)^{-2}(\nu + 6C'_0). \quad (32)$$

$$3) U^{(3)}(\xi) = C'_0 - \frac{1}{4}(1 - k)^2(\nu + 6C'_0)(1 + 6k + k^2)^{-1} \\ \times \phi_3^2[(2\nu + 12C'_0)^{\frac{1}{2}}(1 + 6k + k^2)^{-\frac{1}{2}}\xi]. \quad (33)$$

$$\phi_3(x) = (1 - k)^{\frac{1}{2}}\text{dn}x / \{(1 + k)^{1/2} \cdot (1 + k\text{sn}x) \\ + [2k(1 + k\text{sn}x)(1 + \text{sn}x)]^{1/2}\}. \quad (34)$$

$$C_1^{(3)} = -(\nu + 6C'_0)C'_0 + 3C'_0 + \frac{1}{16}(1 - k)^4(\nu + 6C'_0)(1 + 6k + k^2)^{-2}. \quad (35)$$

$$4) U^{(4)}(\xi) = C'_0 - \frac{1}{4}(1+k')^2(\nu+6C'_0)(1+6k'+k'^2)^{-1} \\ \times \phi_4^2 \left[(\nu+6C'_0)^{\frac{1}{2}}(1+6k'+k'^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\xi}{2} \right]. \quad (36)$$

$$\phi_4(x) = 2k'^{\frac{1}{2}} \operatorname{dn} x / (k' + \operatorname{dn}^2 x). \quad (37)$$

$$C_1^{(4)} = -(\nu+6C'_0)C'_0 + 3C'_0 + k'(1+k')^2(\nu+6C'_0)(1+k'^2+6k')^{-2}. \quad (38)$$

将 $U^{(i)}(\xi)$ ($i=1,2,3,4$) 中的 ξ 换成 η 然后代入形变关系(18)式,立即得到一般化的 5 阶 KdV 方程(9)的椭圆函数解:

$$u^{(i)}(\eta) = C_0 + AU^{(i)}(\eta). \quad (39)$$

显然,要用其它方法如直接积分法得到这些复杂的椭圆函数解是相当困难的.前面已经讨论过由形变关系(18)式得到的结果由于(22a)式的多值性不一定是唯一的.实际上对于某些特殊情况,我们还可以给出与(18)式不同的形变关系.例如:如果方程(9)的模型参数 α, β, γ 同时满足关系:

$$\gamma = 0, 5\alpha + 4\beta = 0, \quad (40)$$

则 KdV 方程和 5 阶 KdV 方程间的行波解还允许如下的形变关系:

$$u(\eta) = B_0 + B_1 U(\eta) + B_2 U^2(\eta), \quad (41)$$

其中常数 $B_0, B_1, B_2, k, \omega, \nu, C_1$ 和 C_2 只需满足 3 个纯代数的限制条件,即

$$6\mu B_1 B_2 + 5\nu k^2 m B_2 + \alpha k^2 \left(5m B_0 B_2 + \frac{1}{4} B_1^2 m - 3B_1^2 C_1 \right) \\ + k^4 \left(\frac{5}{2} m B_1 + 18m\nu B_2 \right) \delta = 0. \quad (42)$$

$$-\frac{\omega B_1}{k} + 2\mu B_0 B_1 + \nu k^2 (B_1 \nu + 6B_2 C_1) - \frac{1}{2} \mu k^2 (3B_1 C_1 + 6B_2 C_2) \\ + \alpha k^2 B_0 (B_1 \nu + 6B_2 C_1) + k^4 [12B_2 C_1 \nu + (3m C_1 + \nu^2) B_1 \\ + 10B_2 m C_2] \delta = 0 \quad (43)$$

及

$$\frac{-2\omega B_2}{k} + 2\mu (B_1^2 + 2B_0 B_2) + \nu k^2 (B_1 m + 8B_2 \nu) \\ + \alpha k^2 \left(B_0 B_1 m + 8B_0 B_2 \nu - \frac{1}{2} B_1^2 \nu - 6B_1 B_2 C_1 - 6B_2^2 C_2 \right) \\ + k^4 (5B_1 m \nu + 38m B_2 C_1 + 14B_2 \nu^2) \delta = 0, \quad (44)$$

特别地当 $\alpha = \beta = 0$, 并取 $U(\xi)$ 为 KdV 方程的孤子解(26)式,则形变关系(41)式就立即给出了方程(10)的孤子解,这正是用别的方法得到的结果的一般化^[16].这里再次看到虽然从复杂方程(高阶 KdV 方程)的解退化到简单方程(KdV 方程)的解是唯一的,然而从简单方程的解形变到复杂方程的解不一定是唯一的.如 KdV 方程的每一个解可以两种方式((18)式或(41)式)形变成 $\gamma = 0, 5\alpha = -4\beta \neq 0$ 的 5 阶 KdV 方程的解.

三、KdV 方程和 7 阶 KdV 方程行波解的形变关系

本节将上一节的方法进一步推广应用到 7 阶 KdV 方程的行波解。类似于上一节，我们首先将 7 阶 KdV 方程写成具有更一般系数的形式：

$$u_t + (\alpha_0 u_{xx} + \alpha_1 u^2 + \beta_0 u_{4x} + \beta_1 u u_{2x} + \beta_2 u_x^2 + \beta_3 u^3 + \gamma_0 u_{6x} + \gamma_1 u u_{4x} + \gamma_2 u_x u_{3x} + \gamma_3 u_{2x}^2 + \gamma_4 u^2 u_{2x} + \gamma_5 u u_x^2 + \gamma_6 u^4)_x = 0, \quad (45)$$

通常的 7 阶 KdV 方程, 7 阶 Sawada-Kotera 方程, 上节给出的 5 阶 KdV 方程和 KdV 方程均为该方程的特例。对于一般的 7 阶 KdV 方程(45)的行波解, 我们可以完全平行于 5 阶 KdV 方程的讨论, 得到 KdV 方程和方程(45)的行波解之间的形变关系:

$$u(\eta) = AU(\eta) + u_0, \quad (46)$$

其中

$$A = C'_i k^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), \quad (47)$$

$$k^i = \{[21m\gamma_0 + 2C'_i(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)]D_i^2 + [5m\beta_0 + 2C'_i(\beta_1 + \beta_2)]D_i + 5m\gamma_1 u_0 D_i + 2C'_i(2\gamma_4 + \gamma_5)u_0 D_i + (m\beta_1 + 6C'_i\beta_3)u_0 + (m\gamma_4 + 12C'_i\gamma_6)u_0^3 + (m\alpha_0 + 2\alpha_1 C'_i)\} \times [28m^2 C_1 \gamma_0 + 6m C_1 C'_i \gamma_1 + 4m C_1 C'_i \gamma_2 + 2m C_1 C'_i \gamma_3 + 2C_i'^2 C_1(\gamma_4 + 2\gamma_5)]^{-1}, \quad (48)$$

$$v = D_i k^{-2}, \quad (49)$$

$$\omega = k^7 \gamma_0 v^3 + k^5 (\beta_0 + \gamma_1 u_0) v^2 + \{k^3 (\alpha_0 + \beta_1 u_0) + [18m k^7 C_1 \gamma_0 + k^5 A C_1 (\gamma_1 + \gamma_2) + k^5 A C_1 (\gamma_2 + 2\gamma_3) + k^3 \gamma_4 u_0^2]\} v + 4k \gamma_6 u_0^3 + 3k \beta_3 u_0^2 + [2k \alpha_1 + 3m k^5 C_1 \gamma_1 + 2k^3 A C_1 (\gamma_4 + \gamma_5)] u_0 + [3m k^5 C_1 \beta_0 + k^3 A C_1 (\beta_1 + 2\beta_2) + 5m^2 k^7 C_2 \gamma_0 + m k^5 A C_2 (\gamma_1 + \gamma_2) + k^3 A^2 C_2 \gamma_3], \quad (50)$$

$$D_i = \left\{ \left[\frac{5}{2} m^2 \gamma_1 + 3C'_i m \gamma_4 + m C'_i \gamma_5 + 12\gamma_6 C_i'^2 \right] u_0 + \left[\frac{5}{2} m^2 \beta_0 + \frac{3}{2} m C'_i \beta_1 + m C'_i \beta_2 + 3C_i'^2 \beta_3 \right] \right\} \times \left[35m^2 \gamma_0 + \left(\frac{15}{2} \gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_3 \right) m C'_i + 3(\gamma_4 + \gamma_5) C_i'^2 \right]^{-1}, \quad (51)$$

而

$C'_i (i = 1, 2, 3)$ 为下列三次方程的根(且 $\gamma_6 \neq 0$):

$$4\gamma_6 C'^3 + 2m \left(\gamma_4 + \frac{2}{3} \gamma_5 \right) C'^2 + \frac{m^2}{3} (10\gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_3) C' + \frac{35}{3} m^3 \gamma_0 = 0, \quad (52)$$

$$C'_{4,5} = -\frac{m}{4(3\gamma_4 + 2\gamma_5)} [(10\gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_3) \pm \sqrt{(10\gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_3)^2 - 280(3\gamma_4 + 2\gamma_5)\gamma_0}] \quad (\gamma_6 = 0, 3\gamma_4 + 2\gamma_5 \neq 0), \quad (53)$$

$$C'_6 = -\frac{35m\gamma_0}{10\gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_3} \quad (\gamma_6 = 3\gamma_4 + 2\gamma_5 = 0, 10\gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_3 \neq 0), \quad (54)$$

$$C_i \text{ 任意} \quad (\gamma_6 = 3\gamma_4 + 2\gamma_5 = 10\gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \gamma_0 = 0). \quad (55)$$

利用上述形变关系,将上节给出的 KdV 方程的单孤子解(26)式或周期解 $U^{(i)}(i=1, 2, 3, 4)$ (28)–(38)式代入(46)–(55)式,即得到 7 阶 KdV 方程的单孤子解或周期解. 与 5 阶 KdV 的情况不同的是 (1) 对于方程中的任何 $\gamma_6 \neq 0$ 的参数至少存在一个实数解,即实解的形变关系总是存在的. (2) 对于某些参数(52)式有三个实根,即 KdV 方程的一个孤子有可能形变成(45)式的三个孤子解. 对于 $\gamma_6 = 0, 3\gamma_4 + 2\gamma_5 \neq 0$, 在

$$(10\gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_3)^2 - 280(3\gamma_4 + 2\gamma_5)\gamma_0 \geq 0 \quad (56)$$

时有实数解,按(53)式相应有两个或一个孤子解. 类似 5 阶 KdV 方程,当 $\gamma_6 = 0$, 还允许与(46)式不同的形变形式.

$$1. \text{ 若 } \gamma_6 = 0, \gamma_5 = -\frac{5}{4}\gamma_4, \quad (57)$$

则 KdV 方程的行波解可按下述方式形变成 7 阶 KdV 方程的解:

$$u = u_0 + A_1 U(\eta) + A_2 U^2(\eta), \quad (58)$$

其中常数 $\omega, k, v, C_1, C_2, u_0, A_1, A_2$ 之间应满足 6 个纯代数的限制条件. 由于这些方程过于冗长,不在此处给出其详细形式.

$$2. \text{ 若 } \gamma_6 = 0, 7\gamma_4 + 6\gamma_5 = 0, \quad (59)$$

则 KdV 方程的行波解还可以以另一种方式形变成 7 阶 KdV 方程的解:

$$u = u_0 + A_1 U(\eta) + A_2 U^2(\eta) + A_3 U^3(\eta), \quad (60)$$

同样,常数 $u_0, A_1, A_2, A_3, k, \omega, v, m, C_1, C_2$ 等所有常数还需满足 9 个纯代数的限制方程. 由于上述同样原因而不在此处列出这些方程. 对于

$$\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0 \quad (61)$$

的特殊情况,文献[17]用 sech 函数级数展开的单孤子解

$$u = a_0 + a_1 \text{sech}^2 \eta + a_2 \text{sech}^4 \eta + a_3 \text{sech}^6 \eta, \quad (62)$$

正是这里给出的形变关系(60)式中 $U(\xi)$ 取(26)式的特殊例子.

四、结果与讨论

本文以具有伽利略不变性的 KdV 方程和一般化的高阶 KdV 方程的行波解为例讨论了将简单方程的解形变成复杂方程的解的可能性,其主要结果为:

1. 高阶 KdV 方程的某些参数的极限过程可唯一地退化到 KdV 方程的解,而从 KdV 方程的某些特解(行波解)也可以通过纯代数的方式形变到一般化的高阶 KdV 方程的解. 然而,一般地说这样的逆过程不是唯一的. 这样的不唯一性表现在两个方面: (1) KdV 方程的一个解可由同一个形变关系给出高阶 KdV 方程的多个不同解; (2) KdV 方程的一个解可由数个不同的形变关系给出高阶 KdV 方程的多个解.

2. 对于 5 阶 KdV 方程,对于某些参数(满足条件(23)式),KdV 方程的一个行波解可以以同一个形变关系(18)式形变成 5 阶 KdV 方程的两个解,对于另一些参数(满足条件 $\gamma = 0, 5\gamma_4 = -4\gamma_5 \neq 0$),KdV 方程的一个行波解可以由两种不同的形变关系(18)和(41)式形变成 5 阶 KdV 方程的解. 然而对于满足条件 $(3\alpha + 2\beta)^2 - 120\gamma\delta <$

0, ($\gamma \neq 0$) 的方程我们还能将 KdV 方程的实行波解形变成这样方程的实解。而对于 $\gamma = 0$, $3\alpha = -2\beta \neq 0$ 这种特殊情况, 还尚未找到合适的形变关系。

3. 对于 7 阶 KdV 方程, 除了(55)式条件中前三个等式成立, 而 $\gamma_0 \neq 0$ 之外, 总可以由 KdV 方程的一个实解, 得到其一个或数个解, 其中除了 $\gamma_6 = 0$, $3\gamma_4 + 2\gamma_5 \neq 0$, 且不满足(56)式之外, 都有实数解。对于不同的参数已找到三种不同的形变关系。对于某个形变关系可以给出三个甚至更多的行波解(实或复)。

总之, 将简单方程的解形变成复杂方程的解可能是由某些很简单的方法得到的。一般来说, 这样的形变关系并不唯一。尽管如此, 讨论这样的形变关系是颇有意义的。对于某些很难由其它方法得到的复杂解, 利用形变关系却可以很方便地得到(如本文第二节给出的复杂的椭圆函数解)。通过这些形变关系, 只需求解较为简单的方程即可同时解决复杂方程的求解问题。

利用形变理论来求解复杂方程, 这里还仅仅是一个开头, 还需要解决大量的问题。如在这里提出的例子中对于某些参数的 5 阶 KdV 方程的实行波解和 KdV 方程以及高阶 KdV 方程的非行波解之间是否存在合适的形变关系, 对于行波解除了这里给出的形变条件外是否存在更复杂的其他形变关系等等, 还有待于进一步的研究。

作者之一(楼森岳)对与复旦大学倪光炯教授和黄国翔博士的有益讨论表示感谢。

- [1] B. M. McCoy and J. H. H. Perk, Relation of conformal field theory and deformation theory for the Ising model, ITP-SB-86-88.
- [2] D. K. Campbell, M. Peyrard and P. Sodano, *Physica*, **D19** (1986), 165;
C. R. Wills, M. El-Batanouny, S. Burdick, R. Boesch and P. Sodano, *Phys. Rev.*, **B35** (1987), 3486;
G-j Ni and S-y Lou, *Acta Math. Sci.*, **9**(1939), 131.
- [3] S-y Lou and G-j Ni, *Phys. Lett.*, **140A** (1989), 33.
- [4] P. M. Stevenson and I. Roditi, *Phys. Rev.*, **D33**(1986), 2305;
R-K Su and T. Chen, *J. Phys. A*, **20** (1987), 5939.
- [5] R. Friedberg and T. D. Lee, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 1694; *ibid.*, **16**(1978), 1096;
J. Geicke, *J. Phys.* **A21** (1988), 391.
- [6] S-y Lou, G-x Huang and G-j Ni, *Phys. Lett.*, **146A**(1990), 45; 楼森岳、黄国翔、倪光炯, 物理学报, **39** (1990), 1363.
- [7] S-y Lou and G-j Ni, *J. Math. Phys.*, **30**(1989), 1614.
- [8] 楼森岳、倪光炯, 复旦学报(自然科学版), (1990), 349.
- [9] J. M. Cervero and P. G. Estevez, *Phys. Lett.*, **114A**(1986), 435;
J. M. Cervero, *J. Math. Phys.*, **23**(1982), 1466.
- [10] P. D. Lax, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **21**(1968), 467.
- [11] K. Sawada and T. Kotera, *Prog. Theor. Phys.* **51**(1974), 1355.
- [12] P. J. Candrey, R. K. Dodd and J. D. Gibbon, *Proc. Roy. Soc. London*, **A351**(1976), 407.
- [13] M. Ito, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **49** (1980), 771.
- [14] B. E. 扎哈罗夫等, 孤子理论, 彭启才译, 科学出版社, (1985), 48页.
- [15] S-y Lou and G-j Ni, *Sing. J. Phys.*, **7**(1990), 47.
- [16] G-x Huang, S-y Lou and X-x Dai, *Phys. Lett.*, **139A**(1989), 373;
J. K. Hunter and J. M. Vanden Broeck, *J. Fluid Mech.*, **134**(1983), 205;
J. A. Ju firia, *J. Fluid Mech.*, **184**(1987), 183.
- [17] 兰慧彬、汪克林, 中国科技大学学报, **20**(1990), 15.

DEFORMATION THEORY AMONG TRAVELLING WAVE SOLUTIONS OF KdV EQUATION AND HIGH ORDER KdV EQUATIONS

CHEN DE-FANG LOU SEN-YUE

Department of Physics, Ningbo Normal College, Ningbo, 315211

(Received 2 July 1990)

ABSTRACT

By means of some limiting procedures, the solutions of a complex nonlinear equation with many parameters could degenerate into the solutions of a simple equation with less parameters. In this paper, taking KdV equation and high order KdV equations as example, we analyse the possibility of the inverse procedure of the limiting process mentioned above. The results show that deforming a solution of a simple equation into that of the complex equations is possible. However, this inverse procedure is not unique in general.

PACC: 0290; 0340