

双光子吸收过程中光场振幅平方压缩*

何 林 生

中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥, 230031

1990年9月4日收到

本文由双光子过程主方程运用生成函数法, 求得双光子吸收过程光场振幅平方压缩的表示式, 讨论振幅平方压缩随无量纲时间 τ , 入射光场相位角 θ 及平均光子数 $|\alpha|^2$ 的变化情况. 双光子吸收过程是产生振幅平方压缩效应的有效途径. 最后论证振幅平方压缩效应的独立性.

PACC: 4250; 3280K

一、引 言

近年来非经典光场受到人们极大的注意, 其中压缩态光场尤其受到重视. 除了通常的(二阶)压缩效应外, Hong 和 Mandel 提出了高阶压缩效应的概念^[1], 扩大了光场压缩的含义. 最近 Hillery 提出了另一类高阶压缩效应的概念——光场振幅平方压缩^[2], 它不等价于 Mandel 定义的高阶压缩效应. 振幅平方压缩效应和通常的压缩效应也是相互独立的^[3]. 不同类型的高阶压缩效应都是非经典效应^[3].

现已发现能够呈现振幅平方压缩效应的过程有二次谐波发生^[2,3], 四波混频, 四次谐波发生^[3], 非简谐振子^[4], K 光子非简谐振子^[5], Jaynes-Cummings 模型^[6]和多光子 Jaynes-Cummings 模型^[7].

双光子吸收过程是产生非经典场的有效途径. 通过这种过程可以产生光子反聚束效应和光子亚泊松分布^[8,9], 压缩态^[10,11]. 本文由双光子过程主方程运用生成函数法, 讨论双光子吸收过程中产生振幅平方压缩的情况, 计算结果表明, 双光子吸收过程是产生振幅平方压缩的有效途径. 最后论证振幅平方压缩效应的独立性.

二、光场振幅平方压缩

Hillery 首先提出光场振幅平方压缩的概念^[2]. 设光场振幅平方算符为

$$A = a^2, \quad A^+ = a^{+2}, \quad (1)$$

a 为光子湮没算符, A 的实部和虚部分别为

$$A_1 = \frac{A + A^+}{2}, \quad A_2 = \frac{A - A^+}{2i}. \quad (2)$$

* 国家自然科学基金资助的课题.

A_1 和 A_2 满足对易式

$$[A_1, A_2] = i(2N + 1) \quad (3)$$

式中 $N = a^+a$, A_1 和 A_2 的方差为

$$\begin{aligned} \langle(\Delta A_1)^2\rangle &= \frac{1}{4} [(A + A^+)^2 - (\langle A \rangle + \langle A^+ \rangle)^2] \\ &= \frac{1}{2} [\text{Re}\langle a^4 \rangle + \langle N^{[2]} \rangle + 2\langle N \rangle + 1 - 2(\text{Re}\langle a^2 \rangle)^2] \end{aligned} \quad (4)$$

和

$$\begin{aligned} \langle(\Delta A_2)^2\rangle &= -\frac{1}{4} [(A - A^+)^2 - (\langle A \rangle - \langle A^+ \rangle)^2] \\ &= \frac{1}{2} [\langle N^{[2]} \rangle + 2\langle N \rangle + 1 - \text{Re}\langle a^4 \rangle - 2(\text{Im}\langle a^2 \rangle)^2], \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\langle N^{[2]} \rangle = \langle N(N-1) \rangle$. 对于相干态光场有

$$\langle(\Delta A_1)^2\rangle = \langle(\Delta A_2)^2\rangle = \langle N \rangle + \frac{1}{2}, \quad (6)$$

则有一个分量的

$$\langle(\Delta A_i)^2\rangle < \langle N \rangle + \frac{1}{2} \quad (i = 1 \text{ 或 } 2) \quad (7)$$

的光场为振幅平方压缩的光场. 这个定义有一个缺点, 即振幅平方压缩的定义还要依赖于光场的平均光子数. 为了克服这个缺点, 可用方差的正序排列形式定义之,

$$\langle:(\Delta A_1)^2: \rangle = \frac{1}{2} [\langle N^{[2]} \rangle + \text{Re}\langle a^4 \rangle - 2(\text{Re}\langle a^2 \rangle)^2], \quad (8)$$

$$\langle:(\Delta A_2)^2: \rangle = \frac{1}{2} [\langle N^{[2]} \rangle - \text{Re}\langle a^4 \rangle - 2(\text{Im}\langle a^2 \rangle)^2], \quad (9)$$

式中“:”表示正序排列. 对于相干态光场有

$$\langle:(\Delta A_1)^2: \rangle = \langle:(\Delta A_2)^2: \rangle = 0, \quad (10)$$

则某一分量的

$$\langle:(\Delta A_i)^2: \rangle < 0 \quad (i = 1 \text{ 或 } 2) \quad (11)$$

的光场为振幅平方压缩的光场. 这种定义完全与光场的平均光子数无关, 因而反映场的属性, 用作判据特别方便.

为了表征光场振幅平方的压缩程度, 定义振幅平方压缩度为

$$S_i = -\frac{\langle:(\Delta A_i)^2: \rangle}{\langle N \rangle + \frac{1}{2}}. \quad (12)$$

(12)式等号右边取负号是因为 $\langle:(\Delta A_i)^2: \rangle$ 的负值表示振幅平方压缩量.

三、双光子吸收过程中光场物理量统计平均的解析解

设单模光束通过二能级原子体系组成的介质, 发生未饱和双光子共振吸收. 在旋波近似, 玻恩近似和马尔可夫近似条件下, 双光子过程中光子密度算符 ρ 的主方程为^[8,11]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & K\{\rho_i^A(0)([a^{+2}\rho, a^2] + [a^{+2}, \rho a^2]) \\ & + \rho_i^A(0)([a^2\rho, a^{+2}] + [a^2, \rho a^{+2}])\}, \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$K = 2\pi g(Q)|\varepsilon^{(2)}|^2 \left(\frac{1}{2}\hbar\omega\right)^2 \int_V d^3r N(r) \prod_{j=1}^2 |u(r_j)|^2, \quad (14)$$

$g(Q)$ 为原子的线型函数, $N(r)$ 为原子粒子数密度, $\varepsilon^{(2)}$ 为双光子跃迁矩阵元, $u(r_j)$ 为光场在 r_j 处的空间波函数, $\rho_i^A(0)$ 为原子在 i 态的初始态密度.

设介质中原子初始均在基态, $\rho_i^A(0) = 1$, 令 $\tau = 2Kt$ 和 $\rho_{n,n+\mu} = \langle n|\rho|n+\mu\rangle$, 则光子密度矩阵元运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{n,n+\mu}}{dt} = & 2[(n+1)(n+2)(n+\mu+1)(n+\mu+2)]^{\frac{1}{2}}\rho_{n+2,n+\mu+2} \\ & - [(n+2)(n+1) + (\mu+n+1)(n+\mu+2)]\rho_{n,n+\mu}. \end{aligned} \quad (15)$$

为求解方程(15), 并计算第二节中有关物理量, 引入生成函数 $G(x, \mu, \tau)$ 和 $F(x, \tau)$.

$$G(x, \mu, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[\frac{(n+\mu)!}{n!} \right]^{\frac{1}{2}} \rho_{n,n+\mu}, \quad (16)$$

$$F(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \rho_{n,n}. \quad (17)$$

G 和 F 分别满足偏微分方程

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = (1-x^2) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \mu x \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{2} \mu(\mu-1)G, \quad (18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = (1-x^2) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (19)$$

遵循文献[13]的方法, 用分离变量法解上述方程, 可得

1. 当 $\mu = 2$ 时, 生成函数 $G(x, 2, \tau)$ 为

$$G(x, 2, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\frac{1}{2}} P_k(x) e^{-[k(k+1)+1]\tau}, \quad (20)$$

式中 $P_k(x)$ 为勒让德多项式,

$$a_k^{\frac{1}{2}} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n+2}(0) \frac{\sqrt{n!(n+2)!}}{(n+k+1)!!(n-k)!!} [1 + (-1)^{n-k}]. \quad (21)$$

2. 当 $\mu = 1$ 时, 生成函数 $G(x, 1, \tau)$ 为

$$G(x, 1, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^0 T_k(x) e^{-k^2\tau}, \quad (22)$$

式中 $T_k(x)$ 为切比谢夫多项式,

$$a_k^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n+1}(0) \frac{n!\sqrt{n+1}[1 + (-1)^{n-k}]}{2(n+k)!!(n-k)!!}. \quad (23)$$

3. 当 $\mu = 4$ 时, 生成函数 $G(x, 4, \tau)$ 为

$$G(x, 4, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\frac{3}{2}} C_k^{\frac{3}{2}}(x) e^{-[k(k+3)+6]\tau}, \quad (24)$$

式中 $C_k^{\frac{3}{2}}(x)$ 为盖根堡多项式,

$$a_k^{\frac{3}{2}} = \left(k + \frac{3}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n, n+4}(0) [1 + (-1)^{n-k}] \frac{\sqrt{n!(n+4)!}}{(n+k+3)!!(n-k)!!}, \quad (25)$$

4. 生成函数 $F(x, \tau)$ 为

$$F(x, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{\frac{1}{2}} P_m(x) e^{-m(m+1)\tau}, \quad (26)$$

式中 $P_m(x)$ 为勒让德多项式,

$$b_m^{\frac{1}{2}} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n, n} [1 + (-1)^{n-m-1}] \frac{n!}{(n+m)!!(n-m-1)!!}. \quad (27)$$

上述各式中 $\rho_{n, n+\mu}(0)$ 为初始光子密度矩阵元.

设初始光场为相干态, 则有

$$\begin{aligned} \rho_{n, n+\mu}(0) &= e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^{*n+\mu} \alpha^n}{\sqrt{n!(n+\mu)!}} \\ &= e^{-|\alpha|^2} e^{-i\mu\theta} \frac{|\alpha|^{2n+\mu}}{\sqrt{n!(n+\mu)!}}. \end{aligned} \quad (28)$$

这里已令光场相干振幅 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$. 将(28)式代入(21), (23)和(25)式后可得 $a_k^{\frac{1}{2}} = e^{-2i\theta} |a_k^{\frac{1}{2}}|$, $a_k^0 = e^{-i\theta} |a_k^0|$ 和 $a_k^{\frac{3}{2}} = e^{-4i\theta} |a_k^{\frac{3}{2}}|$. 再由生成函数 G 和 F 的定义, 可得平均光子数 $\langle N \rangle$

$$\langle N \rangle = F(x, \tau)|_{x=1} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{\frac{1}{2}} e^{-m(m+1)\tau}, \quad (29)$$

光子数二阶乘矩 $\langle N^{(2)} \rangle$

$$\langle N^{(2)} \rangle = \frac{\partial}{\partial x} F(x, \tau)|_{x=1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2} m(m+1) b_m^{\frac{1}{2}} e^{-m(m+1)\tau}, \quad (30)$$

光场振幅 $\langle a \rangle$

$$\langle a \rangle = G^*(1, 1, \tau) = e^{i\theta} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k^0| e^{-k^2\tau}, \quad (31)$$

光场振幅二阶矩 $\langle a^2 \rangle$

$$\langle a^2 \rangle = G^*(1, 2, \tau) = e^{2i\theta} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{\frac{1}{2}}| e^{-[k(k+1)+1]\tau} \quad (32)$$

和光场振幅四阶矩 $\langle a^4 \rangle$

$$\langle a^4 \rangle = G^*(1, 4, \tau) = e^{4i\theta} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{\frac{3}{2}}| \frac{(k+1)(k+2)}{2} e^{-[k(k+3)+6]\tau}. \quad (33)$$

四、双光子吸收过程中光场振幅平方压缩

利用上节光场物理量的表示式计算光场振幅平方实部和虚部的正序方差。注意到(32)和(33)式中 $\langle a^2 \rangle$ 和 $\langle a'^2 \rangle$ 对入射光场相位角 θ 的依赖关系, 可以将(8)和(9)式改写为下列二式:

$$\langle :(\Delta A_1)^2: \rangle = \frac{1}{2} [\langle N^{[2]} \rangle + |\langle a'^2 \rangle| \cos 4\theta - 2|\langle a^2 \rangle|^2 \cos^2 2\theta], \quad (34)$$

$$\langle :(\Delta A_2)^2: \rangle = \frac{1}{2} [\langle N^{[2]} \rangle - |\langle a'^2 \rangle| \cos 4\theta - 2|\langle a^2 \rangle|^2 \sin^2 2\theta]. \quad (35)$$

由(34)和(35)式可见, $\langle :(\Delta A_1)^2: \rangle$ 和 $\langle :(\Delta A_2)^2: \rangle$ 依赖于入射光场相位角 θ , 随 θ 周期变化, 变化周期为 $\pi/2$, 而且下列关系式成立:

$$\langle :(\Delta A_2)^2: \rangle \left(\theta \pm \frac{\pi}{4}, \tau \right) = \langle :(\Delta A_1)^2: \rangle (\theta, \tau). \quad (36)$$

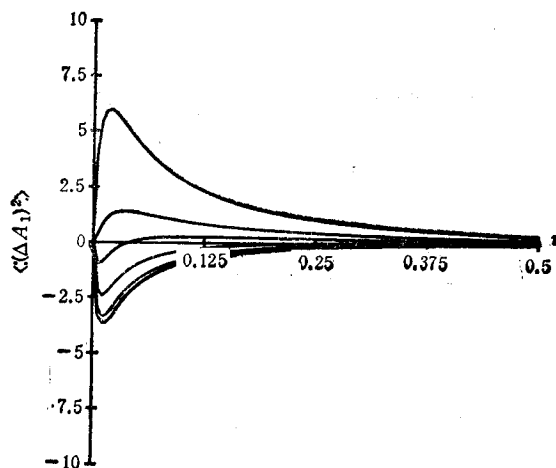


图1 $\langle :(\Delta A_1)^2: \rangle$ 随相位角 θ 和无量纲时间 τ 的变化 $|\alpha| = 5$, 从下至上各曲线分别对应于 $\theta = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \pi/8$ 和 $\pi/4$

图1为 $\langle :(\Delta A_1)^2: \rangle$ 随入射光场相位角 θ 和无量纲时间 τ 的变化。光场初值 $|\alpha| = 5$, 从下至上各曲线分别对应于 $\theta = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \pi/8$ 和 $\pi/4$ 。以 $\theta = 0$ 曲线为例, 说明 $\langle :(\Delta A_1)^2: \rangle$ 随 τ 变化的特点, 在 $0 - \tau_1$ 时区内光场呈现振幅平方压缩效应, 在 $\tau = \tau_1$ 处压缩效应最强; 在 $\tau = \tau_1$ 时刻之后, $\langle :(\Delta A_1)^2: \rangle \geq 0$, 振幅平方压缩效应消失。图1表明, 入射光场的相位角 θ 对光场呈现振幅平方压缩的影响很大。对于 $|\alpha| = 5$ 的情况, 当 $\theta = 0$, A_1 可获得最强的振幅平方压缩, 随着 θ 由 0 向 $\pi/8$ 增大, 该压缩效应减弱, 且 $\langle :(\Delta A_1)^2: \rangle - \tau$ 曲线的负峰向小 τ 方向移动, 压缩效应消失的时刻 τ_1 逐渐提前。当 $\theta = \pi/8$, $\langle :(\Delta A_1)^2: \rangle$ 始终为大于零的正值。当 $\theta = \pi/4$, $\langle :(\Delta A_1)^2: \rangle$ 的数值更大。这两种情况表明 A_1 不被压缩。但 $\theta = \pi/4$ 时, 分量 A_2 却是最强的振幅平方压缩 (见(36)式), 即压缩方向相对于 A_1 旋转 90° 。由此可见, 仅在 $\theta = \pi/8$ 附近, 分量 A_1 和分量 A_2 都不被压缩, 光场是非振幅平方压缩的。由图2可见, 对于初相位角 $\theta = 0$ 的光

场, 平均光子数 $|\alpha|^2$ 越大, $\langle:(\Delta A_1)^2:\rangle$ 可达到的值越小(即压缩效应越强), 达到极小值所需的时间 τ_p 越短. 而不同的 $|\alpha|^2$ 所对应的 $\langle:(\Delta A_1)^2:\rangle-\tau$ 曲线的尾部(长 τ 端)几乎重叠. 这表明长 τ 时, 对不同 $|\alpha|^2$ 的情况得到几乎相同的绝对压缩量.

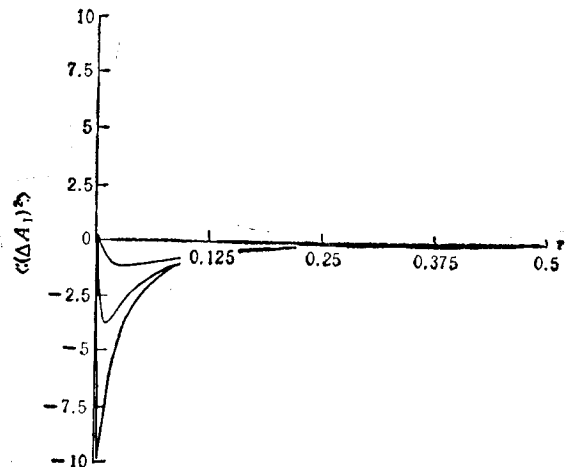


图2 $\langle:(\Delta A_1)^2:\rangle$ 随初始平均光子数 $|\alpha|^2$ 和无量纲时间 τ 的变化 $\theta = 0$, 从上至下各曲线分别对应于 $|\alpha|^2 = 9, 25$ 和 64

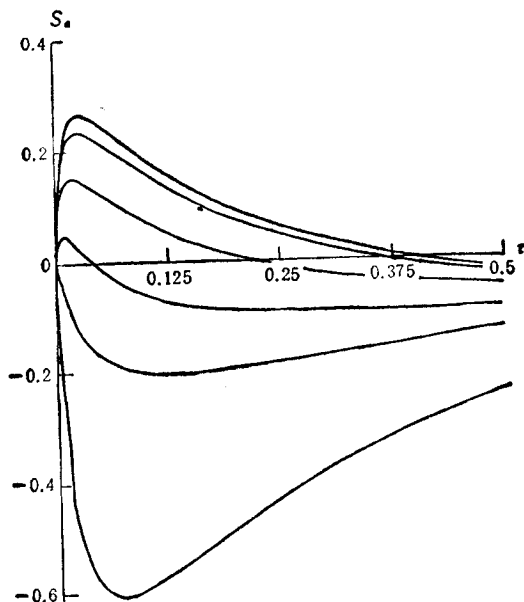


图3 压缩度 S_s 随相位角 θ 和无量纲时间 τ 的变化 $|\alpha| = 5$, 从上至下各曲线分别对应于 $\theta = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \pi/8$ 和 $\pi/4$

为了更好地研究光场的相对压缩量或压缩程度, 按(12)式计算了压缩度 S_s (即 S_1) 随时间 τ , 入射光场相位角 θ 及平均光子数 $|\alpha|^2$ 的变化, 如图3和图4所示. 由图3可见, 光场振幅平方压缩度受入射光场相位角 θ 的影响很明显. 对 $|\alpha|$ 值相同的光场, $\theta =$

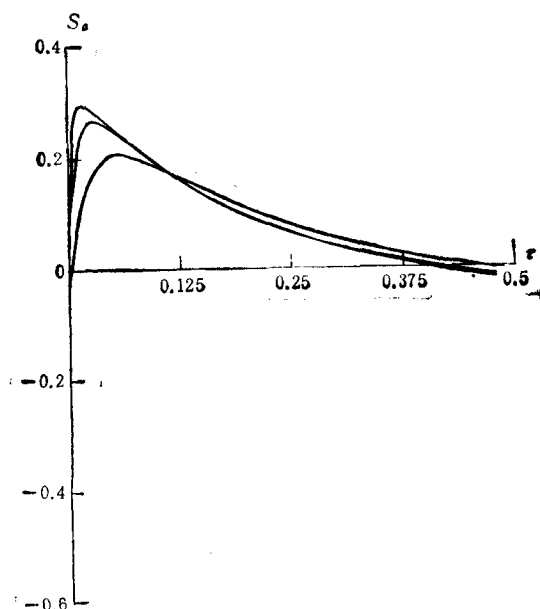


图4 压缩度 S_a 随平均光子数 $|\alpha|^2$ 和无量纲时间 τ 的变化 相位角 $\theta = 0$, 从下至上各曲线分别对应于 $|\alpha|^2 = 9, 25$ 和 64

0 时可获得最大峰值压缩度, 随着 θ 增加(到 0.3), 压缩度曲线 $S_a - \tau$ 的峰高逐渐减小, 而且峰向短 τ 方向移动. 当 $\theta = \pi/8$ 和 $\pi/4$, $S_a < 0$, 光场 A_1 分量不压缩. 这与图 1 的结果是一致的. 与图 1 相比, 图 3 有两个明显的优点: 1) 对不同光场相位 θ , 实分量 A_1 的压缩开始消失的时刻 τ_1 (即 S_a 经过零值的时刻) 被更加清晰地分离开. 随着 θ 增大, 各对应的 τ_1 值变小. 2) 在较长的 τ 时刻, 不同 θ 情况的 $S_a - \tau$ 曲线被完全分离开. 这清楚地反映出长 τ 时 θ 的影响. 图 4 表明, 入射光场平均光子数 $|\alpha|^2$ 越大, 可获得的压缩度 S_a 越大, 而达到最大压缩度 S_a 所需的时间 τ_p 越短(注意 $\tau_p \neq \tau'_p$, 一般 $\tau_p > \tau'_p$). 当 $|\alpha|^2 = 64$ 时, S_a 可达 30%. 还注意到, 约在 $\tau = 0.125$ 之后, $|\alpha|^2$ 越大相对的压缩度 S_a 反而下降得越多. 这与图 2 中反映的特征不同.

由上述讨论可以得出结论, 使用较强的相干态光场通过双光子吸收介质, 适当调整入射光场相位角 θ , 使 $\theta = \frac{n}{2}\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 则可在适当短的时间内(或介质长度 L 内)获得较大的振幅平方压缩度 S_a . 双光子吸收过程是产生振幅平方压缩效应的有效途径.

最后要指出, 振幅平方压缩与通常的二阶压缩效应是两种相互独立的非经典效应. 虽然在许多情况中, 两者同时存在, 但在某些特定条件下, 却仅呈现振幅平方压缩效应, 不出现通常的二阶压缩效应, 或反之. 例如, 当初光场为相干态光场, 表征光场起伏的物理量 $\langle :(\Delta a_1)^2: \rangle$ 和 $\langle :(\Delta a_2)^2: \rangle$ (由文献[12]的(39)和(40)式)变为

$$\langle :(\Delta a_1)^2: \rangle = \frac{1}{2} [\langle N \rangle + |\langle a^2 \rangle| \cos 2\theta - 2|\langle a \rangle|^2 \cos^2 \theta], \quad (37)$$

$$\langle :(\Delta a_2)^2: \rangle = \frac{1}{2} [\langle N \rangle - |\langle a^2 \rangle| \cos 2\theta - 2|\langle a \rangle|^2 \sin^2 \theta]. \quad (38)$$

显然当 $\theta = \pi/4$ 时上二式变为

$$\langle :(\Delta a_1)^2: \rangle = \langle :(\Delta a_2)^2: \rangle = \frac{1}{2} [\langle N \rangle - |\langle a \rangle|^2] \geq 0. \quad (39)$$

通常的二阶压缩效应消失;但此时 $\langle :(\Delta A_2)^2: \rangle(\theta = \pi/4) = \langle :(\Delta A_1)^2: \rangle(\theta = 0) < 0$, 振幅平方压缩效应却是最强。而当 $\theta = \pi/8$ 时, 利用本文中有关公式计算 $\langle a \rangle$, $\langle a^2 \rangle$ 和 $\langle N \rangle$ 后代入(37)和(38)式, 数值结果表明, 在 $0 < \tau < 0.8$ 时区内, $\langle :(\Delta a_1)^2: \rangle < 0$, 即呈现通常的二阶压缩效应, 但 $\langle :(\Delta A_1)^2: \rangle = \langle :(\Delta A_2)^2: \rangle > 0$, 振幅平方压缩效应完全消失。由此可见, 振幅平方压缩与通常的二阶压缩效应是相互独立的, 它们有着各自产生压缩的不同的物理原因, 值得进一步分析。

- [1] C. K. Hong and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 323.
C. K. Hong and L. Mandel, *Phys. Rev.*, **A32**(1985), 974.
- [2] M. Hillery, *Opt. Commun.*, **62**(1987), 135.
- [3] M. Hillery, *Phys. Rev.*, **A36**(1987), 3796.
- [4] C. C. Gerry and E. R. Vrscaj, *Phys. Rev.*, **A37**(1988), 1779.
- [5] Xiaoping Yang and Xiping Zheng, *J. Mod. Opt.*, **36**(1989), 607.
- [6] M. H. Mahran and A.-s. F. Obada, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 4476.
- [7] X. Yang and X. Zheng, *Phys. Lett.*, **A133**(1989), 409.
- [8] 何林生, 光学学报, **5**(1985), 735.
- [9] N. Chandra and G. Prakash, *Phys. Rev.*, **A1**(1970), 1696.
- [10] G. S. Agarwal and G. P. Hildred, *Opt. Commun.*, **58**(1986), 287.
- [11] G. S. Agarwal, *Opt. Commun.*, **62**(1987), 190.
- [12] 何林生、江海河、柳尚青、麦宇兴, 物理学报, **40**(1991), 718.

SQUEEZING OF THE SQUARE OF THE FIELD AMPLITUDE IN TWO-PHOTON ABSORPTION PROCESS

HE LIN-SHENG

Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Hebei, 230031

(Received 4 September 1990)

ABSTRACT

From the master equation of the field density for the two-photon process, with the help of the generation function method, the expressions of the squeezing of the square of the field amplitude generated in two-photon absorption process are derived. The variations of the square of the field amplitude with the dimensionless time τ , the phase θ and the average number of photons of the incident field are discussed. It is shown that the two-photon absorption process is an effective way generating the squeezing effect of the square amplitude of the field. Finally, the independence of the amplitude-squared squeezing effect is demonstrated.

PACC: 4250, 3280K