

Kerr-NUT 黑洞的表面几何

张 稳 朝

西安冶金建筑学院基础课部, 西安 710055

1991 年 7 月 8 日收到

本文给出了 Kerr-NUT 黑洞视界高斯曲率的解析表达式, 分析了 NUT 参数对视界的赤道周长和极向周长的影响, 研究了将其视界嵌入欧几里得空间的问题。结果表明这种黑洞的视界具有其它黑洞所没有的几何性质。

PACC: 0420;0490;0290

一、引 言

黑洞表面几何性质的研究一直引起人们的兴趣。文献[1]研究了处在外磁场中的 Schwarzschild 黑洞的表面几何。文献[2]和[3]讨论了处在外磁场中的 Kerr 黑洞的表面几何。文献[4]—[6]分别讨论了带电的 Kerr 黑洞 (Kerr-Newman 黑洞) 视界和静界的几何以及它处在外磁场中的表面几何。这些研究表明各种实际条件, 如磁场、旋转、带电对黑洞的表面几何性质有直接影响, 这是这些条件引起时空弯曲的一种表现。

Schwarzschild, Kerr 和 Kerr-Newman 黑洞代表了 Einstein 场方程或 Einstein-Maxwell 方程的三个基本解。然而 Einstein-Maxwell 方程还有其它的解, 其中一个重要的解就是 Kerr-NUT 解^[7,8]。与 Kerr-Newman 解一样, 这也是一个三参数解, 它描述质量为 m , 角动量为 ma 和质量的磁单极为 l 的粒子所产生的引力场^[9], 其中 l 也叫 NUT 参数。当 $l = 0$ 时这个解就化为 Kerr 解。本文作者曾研究了用 Weyl 坐标描述 Kerr-NUT 度规^[10], 结果表明这种度规有不同于 Kerr 度规或 Kerr-Newman 度规的奇特的时空性质。本文将研究这种时空视界的几何性质。正如下边将要指出的, 尽管 Kerr-NUT 解也是一个三参数解, NUT 参数 l 对视界几何的影响却不同于角动量参数 a 和电参数 e 对视界几何的影响。

二、二 维 线 元

文献 [10] 给出了 Kerr-NUT 度规在 Weyl 坐标中的线元, 其视界坐标为

$$\rho^b = 0, |z| \leq k, \quad (1)$$

其中

$$k = \sqrt{m^2 + l^2 - a^2}. \quad (2)$$

根据(1)式和文献[10]中的(5)式, 不难得到视界的二维线元

$$ds_{\tau h}^2 = E^2(x)dz^2 + G^2(x)d\varphi^2. \quad (3)$$

为了计算方便, (3)式中已将原度规的号差由-2改为+2, 且

$$E(x) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{k^2(m+k)^2 + (az+lk)^2}{k^2 - z^2}}, \quad (4)$$

$$G(x) = 2(m^2 + l^2 + mk) \sqrt{\frac{k^2 - z^2}{k^2(m+k)^2 + (az+lk)^2}} = \frac{2(m^2 + l^2 + mk)}{kE(x)}. \quad (5)$$

值得注意的是

$$E(x)G(x) = \frac{2}{k}(m^2 + l^2 + mk) = \text{const.} \quad (6)$$

本文将用 Weyl 坐标进行计算。当然同样的计算也可用这一度规的 Boyer-Linquist 形式进行, 因此必要时本文也将间或采用后一度规形式或将结果化为用后一坐标表示。

三、高 斯 曲 率

线元为(3)式的二维曲面的高斯曲率为^[11]

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{2E(x)G(x)} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{E(x)G(x)} \frac{d}{dz} G^2(x) \right] \\ &= -\frac{1}{2[E(x)G(x)]^2} \frac{d^2}{dz^2} G^2(x). \end{aligned} \quad (7)$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} G^2(x) &= -16k(m^2 + l^2 + mk)^2 \\ &\quad \times \{ [k(m^2 + l^2 + mk) + alz][k^2(m+k)^2 + (az+lk)^2] - 2a(az \\ &\quad + lk)[2kz(m^2 + l^2 + mk) + al(k^2 + z^2)] \} / \{ [k^2(m+k)^2 + (az \\ &\quad + lk)^2]^3 \}, \end{aligned} \quad (8)$$

因此高斯曲率为

$$\begin{aligned} R &= 2k^3 \cdot \{ [k(m^2 + l^2 + mk) + alz][k^2(m+k)^2 + (az+lk)^2] - 2a(az \\ &\quad + lk)[2kz(m^2 + l^2 + mk) + a(k^2 + z^2)] \} / \{ [k^2(m+k)^2 + (az \\ &\quad + lk)^2]^3 \}. \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式的形式比较复杂, 为了看清R的性质, 可先讨论一些特殊情况。

(a) $l = a = 0, k = m.$

$$R = \frac{1}{(2m)^2}. \quad (10)$$

这是 Schwarzschild 黑洞的视界曲率。

(b) $l = 0, a \neq 0, k = \sqrt{m^2 - a^2}.$ 在文献[4]中令 $e = 0,$ 就得到这种情况。这时不难求得

$$R = 2mk^4(m+k) \cdot \frac{k^2(m+k)^2 - 3a^2z^2}{k^2(m+k)^2 + a^2z^2}. \quad (11)$$

用 Weyl 坐标与 Boyer-Lindquist 坐标之间的变换关系^[10]不难求得在 Boyer-Lindquist 坐标系中

$$R = (r_{\pm}^2 + a^2)(r_{\pm}^2 - 3a^2 \cos^2 \theta)(r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{-3}, \quad (11a)$$

$$\text{其中} \quad r_{\pm}^2 = m + k. \quad (11b)$$

这与文献[4]中的(23)式完全一致。由于文献[4]对这种情况已有详细研究, 此处不再讨论。

(c) $a = 0, l \neq 0, k = \sqrt{m^2 + l^2}$. 这时 Kerr-NUT 度规成为 NUT-Taub 度规^[8],

$$R = \frac{1}{2k(m+k)} = \frac{1}{2kr_{\pm}^2}, \quad (12)$$

其中 r_{\pm}^2 同(11b)式。(12)式说明 NUT-Taub 黑洞视界的高斯曲率与 Weyl 坐标的 z 或 Boyer-Lindquist 坐标的 θ 无关。

(d) $l \neq 0, a \neq 0, k = \sqrt{m^2 + l^2 - a^2}$. 这是一般的, 即 Kerr-NUT 的情况。这时不难求得

$$R(z = k) = \frac{2(m^2 + l^2 + mk + al)[(m+k)^2 - 4a^2 + (l-a)^2]}{[(m+k)^2 + (a+l)^2]^3}, \quad (13)$$

$$R(z = -k) = \frac{2(m^2 + l^2 + mk - al)[(m+k)^2 - 4a^2 + (l+a)^2]}{[(m+k)^2 + (l-a)^2]^3}. \quad (14)$$

可以看出这时(13)与(14)式并不相等, 因此可以得出结论, Kerr-NUT 黑洞视界的高斯曲率关于赤道平面 ($z = 0$ 或 $\theta = \pi/2$) 并不对称。这与 Kerr-Newman 黑洞视界高斯曲率的性质不同。在那种情况, 从文献[4]的(23)式知, R 关于赤道平面对称的。值得注意的是, 将(13)式中 a, l 中的任一个(不是两个)变号, 就得(14)式。这可以这样解释: 当磁单极的磁力线的方向在一个极(如 $z = k$) 和黑洞的角速度矢量 ω 同方向时, 则在另一个极(如 $z = -k$) 磁力线的方向必和 ω 的方向相反。因为 ω 在两极方向相同, 而磁单极产生的磁力线在两极的方向必定相反。但是, 对于 Kerr-Newman 黑洞, 电力线的方向在两极与 ω 的方向的关系与 Kerr-NUT 黑洞的情况类似, R 关于赤道平面却是对称的。其所以这样, 是因为在 Kerr-NUT 度规中有 a 与 l 的交叉项^[9-10], 即角动量参数与 NUT 参数通过耦合相互作用, 而在 Kerr-Newman 度规中却没有 a 与 e 的交叉项^[12]。

在赤道平面上, 显然

$$R = \frac{2\{(m^2 + l^2 + mk)[(m+k)^2 + l^2] - 2a^2 l^2\}}{[(m+k)^2 + l^2]^3} \quad (15)$$

与 a, l 的正负无关。

还需要指出的是, 由于上边已提到的原因, 对于一般情况, 尽管 R 关于 $z = 0$ 的平面对称, 但是 R 对于 a, l, z 中的任两个却有很好的对称性质, 即

$$\begin{aligned} R(l, a, z) &= R(l, -a, -z), \\ R(l, a, z) &= R(-l, a, -z), \\ R(l, a, z) &= R(-l, -a, z). \end{aligned} \quad (16)$$

表 1 高斯曲率 R 与 a, l, z 的关系, $z = k$

$R \backslash a$	l	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0	0.20	0.40	0.60	0.80
-1.00		-0.02	0.09	0.20	0.30	0.40	0.48	0.55	0.59	0.58
-0.80		-0.06	0.08	0.21	0.33	0.43	0.51	0.56	0.56	0.49
-0.60		-0.11	0.07	0.22	0.35	0.45	0.52	0.54	0.50	0.34
-0.40		-0.17	0.07	0.25	0.38	0.48	0.52	0.50	0.39	0.14
-0.20		-0.21	0.09	0.29	0.42	0.49	0.50	0.43	0.26	-0.06
0		-0.19	0.15	0.35	0.46	0.50	0.46	0.35	0.15	-0.19
0.20		-0.06	0.26	0.43	0.50	0.49	0.42	0.29	0.09	-0.21
0.40		0.14	0.39	0.49	0.52	0.48	0.38	0.25	0.07	-0.17
0.60		0.34	0.49	0.54	0.52	0.45	0.35	0.22	0.07	-0.11
0.80		0.49	0.56	0.56	0.51	0.43	0.33	0.21	0.08	-0.06
1.00		0.58	0.59	0.55	0.48	0.40	0.30	0.20	0.09	-0.02

注: 表 1 至表 3 中以 m 为单位, 即令 $m = 1$.表 2 高斯曲率 R 与 a, l, z 的关系, $z = k \cos(\pi/4)$

$R \backslash a$	l	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0	0.20	0.40	0.60	0.80
-1.00		0.08	0.18	0.26	0.33	0.40	0.46	0.52	0.58	0.65
-0.80		0.06	0.18	0.28	0.36	0.43	0.49	0.55	0.60	0.66
-0.60		0.04	0.19	0.30	0.39	0.45	0.51	0.55	0.59	0.62
-0.40		0.03	0.22	0.34	0.42	0.48	0.52	0.54	0.54	0.52
-0.20		0.06	0.27	0.38	0.45	0.49	0.51	0.50	0.46	0.35
0		0.18	0.36	0.44	0.48	0.50	0.48	0.44	0.36	0.18
0.20		0.35	0.46	0.50	0.51	0.49	0.45	0.38	0.27	0.06
0.40		0.52	0.54	0.54	0.52	0.48	0.42	0.34	0.22	0.03
0.60		0.62	0.59	0.55	0.51	0.45	0.39	0.30	0.19	0.04
0.80		0.66	0.60	0.55	0.49	0.43	0.36	0.28	0.18	0.06
1.00		0.65	0.58	0.52	0.46	0.40	0.33	0.26	0.18	0.08

表 3 高斯曲率 R 与 a, l, z 的关系, $z = 0$

$R \backslash a$	l	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0	0.20	0.40	0.60	0.80
-1.00		0.43	0.42	0.41	0.40	0.40	0.40	0.41	0.42	0.43
-0.80		0.49	0.46	0.44	0.43	0.43	0.43	0.44	0.46	0.49
-0.60		0.57	0.51	0.48	0.46	0.45	0.46	0.48	0.51	0.57
-0.40		0.68	0.56	0.51	0.48	0.48	0.48	0.51	0.56	0.68
-0.20		0.81	0.61	0.53	0.50	0.49	0.50	0.53	0.61	0.81
0		0.88	0.63	0.54	0.51	0.50	0.51	0.54	0.63	0.88
0.20		0.81	0.61	0.53	0.50	0.49	0.50	0.53	0.61	0.81
0.40		0.68	0.56	0.51	0.48	0.48	0.48	0.51	0.56	0.68
0.60		0.57	0.51	0.48	0.46	0.45	0.46	0.48	0.51	0.57
0.80		0.49	0.46	0.44	0.43	0.43	0.43	0.44	0.46	0.49
1.00		0.43	0.42	0.41	0.40	0.40	0.40	0.41	0.42	0.43

表 1 至表 3 给出对于一些不同的 a, l, z 的 R 值.

利用高斯曲率 R 还可以检查黑洞视界的拓扑. 易求出欧拉示性数^[11]

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-k}^{+k} R(z) E(z) G(z) dz \\ &= -\frac{1}{2E(z)G(z)} \int_{-k}^{+k} d \left[\frac{d}{dz} G^2(z) \right] = \frac{2(m^2 + l^2 + mk)^2}{(m^2 + l^2 + mk)^2 - a^2 l^2} \end{aligned} \quad (17)$$

显然 a, l 中至少有一个为零时 $\chi = 2$, 即 Schwarzschild, Kerr 和 NUT-Taub 黑洞的视界从拓扑上看是二维球面, 但当 a 和 l 均不为零时 $\chi > 2$, 即 Kerr-NUT 黑洞的视界不具有二维球的拓扑, 而 Kerr-Newman 黑洞的视界却具有二维球的拓扑^[6].

顺便给出 Kerr-NUT 黑洞视界的面积

$$A = 8\pi(m^2 + l^2 + mk). \quad (18)$$

显然 NUT 参数使视界面积增加.

四、周 长

除了高斯曲率之外, 赤道周长 C_e 和极向周长 C_p 的变化也反映视界的变形. 根据 (3) 式可得 Kerr-NUT 黑洞视界的赤道周长:

$$C_e = \int_0^{2\pi} G(z=0) d\phi = \frac{4\pi(m^2 + l^2 + mk)}{\sqrt{(m+k)^2 + l^2}}. \quad (19)$$

不难证明:

$$C_e \geq 4\pi m = C_{sch}, \quad (20)$$

式中 C_{sch} 为孤立 Schwarzschild 黑洞的周长. 另外

$$C_e(l=0, a \neq 0) = 4\pi m. \quad (21)$$

在文献[4]的(18)式中令电荷 $e = 0$, 并经过简单的计算, 也可得到上式. 这说明 Kerr 黑洞视界的赤道周长与 Schwarzschild 黑洞的周长相同, 即旋转对赤道周长无影响, 而(20)式说明 NUT 参数使视界的赤道周长增大.

极向周长

$$\begin{aligned} C_p &= 2 \int_{-k}^{+k} E(z) dz = \frac{2}{k} \int_{-k}^{+k} \sqrt{\frac{k^2(m+k)^2 + (az + lk)^2}{k^2 - z^2}} dz \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [\sqrt{(m+k)^2 + (l+ax)^2} + \sqrt{(m+k)^2 + (l-ax)^2}] dx. \end{aligned} \quad (22)$$

当 a, l 不同时为零时, C_p 没有解析表达式也不能表示成椭圆积分. 当 a, l 中至少有一个为零时, 可以求得

$$C_p = 4\pi m, \quad a = l = 0, \quad (23)$$

$$C_p = 4 \sqrt{(m+k)^2 + a^2} E \left(\frac{a}{\sqrt{(m+k)^2 + a^2}} \right), \quad a \neq 0, l = 0, \quad (24)$$

$$C_p = 2\pi \sqrt{2k(m+k)}, \quad a = 0, l \neq 0. \quad (25)$$

(24)式中 E 为第二类完全椭圆积分^[13]。容易验证,在文献[4]的(19)式中令 $e = 0$ 所得结果与本文(24)式完全相同。另外从该文(19)式可知,当 $a = 0$ 时 $C_e = C_p$, 这与(12)式也一致。

对于一般情况,从(19)和(22)式容易看出, C_e, C_p 与 a 和 l 的正负无关。在附录A中我们证明了 C_e 和 C_p 都是 l 的增函数。图1给出对于一定的 a , C_e 和 C_p 随 l 的变化情况。尽管对于 Kerr-NUT 黑洞, C_e 和 C_p 都随 l 的增大而增大,但仍然可以定义参数

$$\delta = \frac{C_e - C_p}{C_e}, \quad (26)$$

用以度量视界偏离球面的程度。图2给出 δ 随 l 的变化情况。值得注意的是 C_e 和 C_p 随 l 的增大是无界的,但 $C_e \geq C_p$, 即 $\delta \geq 0$ 却恒成立(证明见附录B)。对于有限的 a 和很大的 l , 易得

$$C_e \approx C_p \approx 2\sqrt{2\pi}l, \quad (27)$$

$$\delta \approx 0. \quad (28)$$

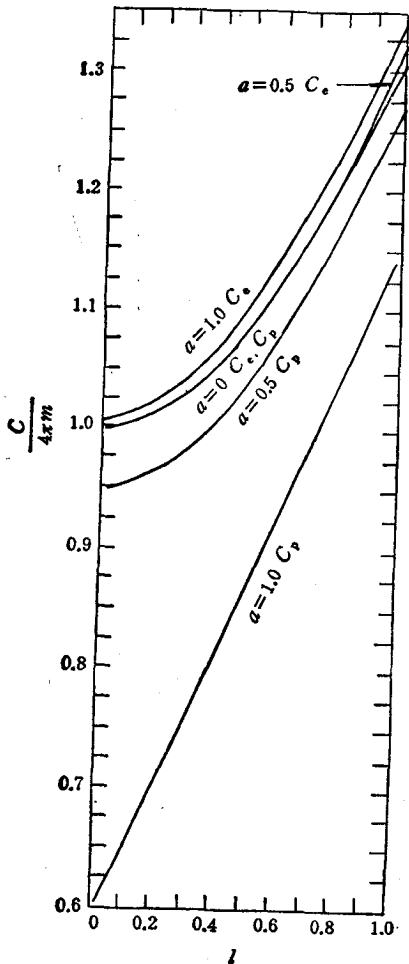


图1 赤道周长 C_e 和极向周长 C_p 随 l 的变化曲线 $a = 0$ 时, $C_e = C_p$

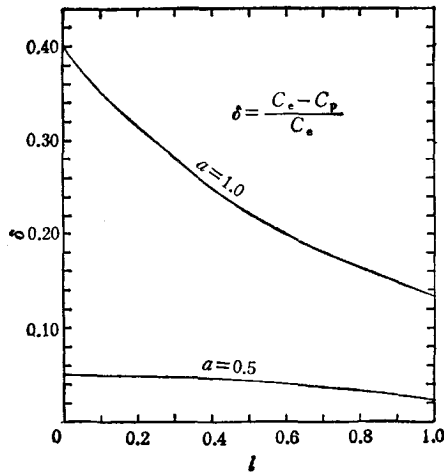


图2 $\delta = \frac{C_e - C_p}{C_e}$ 度量黑洞视界偏离球对称的情况 对一定的 a , 增大 l 将减小这种偏离, $l \rightarrow \infty$ 时, $\delta \rightarrow 0$

五、嵌 入

在广义相对论中,人们经常用嵌入图来揭示时空的内部结构,特别是时空偏离平直时空的情况。在研究黑洞的表面几何时,这种方法也常被采用。文献[14]指出,对于线元为

$$ds^2 = E(b)db^2 + J(b)d\varphi^2 \quad (29)$$

的二维曲面,可以把它等距离地嵌入平直的三维欧几里得空间 E^3 或伪欧几里得空间 PE^3 。其中当

$$E \geq (J')^2/(4J) \quad (30)$$

(“” = d/db) 时,可嵌入度规为 $ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$ 的 E^3 ,反之只能嵌入度规为 $ds^2 = dX^2 + dY^2 - dZ^2$ 的 PE^3 。

(29)式所代表的二维曲面的高斯曲率为

$$R = -(J'/H)/(2H), H^2 = EJ. \quad (31)$$

由于(30)式仅含 J 对坐标 b 的一阶导数,而(31)式含有 J 对 b 的二阶导数,因此(30)式成立的条件与 $R > 0$ 的条件通常不一定一致,即二维球面上能嵌入 E^3 的区域不一定是 R 为正的,反之亦然。但是对于 Kerr 黑洞和带电 Kerr 黑洞的视界,(30)式成立的条件恰与 $R > 0$ 的条件一致。下边将会看到,本文的情况正好是(30)式成立的条件与 $R > 0$ 成立的条件不一致的一个例子。令

$$X = F(z) \cos \phi, Y = F(z) \sin \phi, Z = Z(z), \quad (32)$$

且

$$ds_{2h}^2 = E^2(z)dz^2 + G^2(z)d\phi^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2, \quad (33)$$

则不难得到

$$F(z) = G(z), \quad (34)$$

$$Z(z) = \int_0^z \{E^2(z) - [(G^2(z))']^2/[4G^2(z)]\}^{1/2} dz. \quad (35)$$

显然对于本文的情况,条件(30)式成为

$$E^2(z) \geq \frac{[(G^2(z))']^2}{4G^2(z)}. \quad (36)$$

当上式不成立时, Z 将成为虚的,这时 Kerr-NUT 黑洞视界上使(36)式不成立的区域只能嵌入 PE^3 。

根据(4),(5)式,可得

$$E^2(z) = \frac{[(G^2(z))']^2}{4G^2(z)} = \frac{1}{k^2 - z^2} \left\{ \frac{k^2(m+k)^2 + (az + lk)^2}{k^2} - \frac{4k^2(m^2 + l^2 + mk)^2 [2kz(m^2 + l^2 + mk) + al(k^2 + z^2)]^2}{[k^2(m+k)^2 + (az + lk)^2]^3} \right\} \quad (37)$$

从(37)式可以看出,要得到 $Z(z)$ 的解析表达式相当困难,因为文献[14]对 Kerr 黑洞视界的嵌入问题已作了详细讨论,所以我们可以先讨论 $a = 0$ 而 $l \neq 0$, 即 NUT-Taub 黑洞视界的嵌入问题。这时从(5),(34)式,易得

$$F(z) = \frac{1}{k} \sqrt{2(m^2 + l^2 + mk)(k^2 - z^2)}, \quad (38)$$

而(37),(35)式成为

$$E^2(z) = \frac{[(G^2(z))']^2}{4G^2(z)} = \frac{2(m^2 + l^2 + mk)}{k^2} > 0, \quad (39)$$

$$Z(z) = \frac{z}{k} \sqrt{2(m^2 + l^2 + mk)}. \quad (40)$$

从(39)式可以看出 NUT-Taub 黑洞视界可整体嵌入 E^3 。从(32),(38)和(40)式,得

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = F^2(z) + Z^2(z) = 2k(m+k) = 2kr_+, \quad (41)$$

即 NUT-Taub 黑洞视界的嵌入图是半径为 $\sqrt{2k(m+k)}$ 的球面。这与(12)式以及 NUT-Taub 黑洞视界的 $C_\infty = C_p$ 相符。

当 a, l 不全为零时,积分(35)式是相当复杂和困难的。要得到一般情况下的嵌入图必须进行数值积分。图 3 为对一些典型的 a, l 值,根据(34),(35)式的数值计算结果绘成的时空图。从图 3 中可以看出,嵌入图关于赤道平面 ($z=0$) 不对称是这种时空的一个重要特点,其原因和高斯曲率关于赤道平面对称的原因相同。另外,数值计算结果还表明把一组 (m, a, l) 所对应的嵌入图绕坐标原点旋转 180° ,就得到 $(m, -a, l)$ 或 $(m, a, -l)$ 所对应的时空图,这是因为从(5),(34),(35)式和(37)式可以证明 $F(z)$ 和 $Z(z)$ 有如下的对称性质:

$$F(a, l, -z) = F(-a, l, z) = F(a, -l, z), \quad (42)$$

$$Z(a, l, -z) = Z(-a, l, z) = Z(a, -l, z). \quad (43)$$

现在讨论 Kerr-NUT 时空的视界能否整体嵌入 E^3 的问题。用(5)式可以将条件(36)

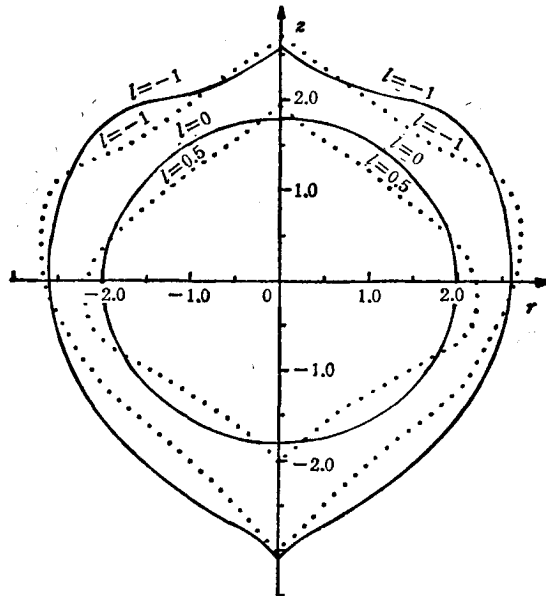


图 3 视界的嵌入图 以 m 为单位(即令 $m=1$); $r = (X^2 + Y^2)^{1/2}$; 实线对应 $a=0.5$; 虚线对应 $a=1.0$

式写成

$$|(G^2(z))'| \leq \frac{4(m^2 + l^2 + mk)}{k}, \quad (44)$$

或者根据(37)式直接写成

$$\frac{2k^2(m^2 + l^2 + mk)}{[k^2(m+k)^2 + (az + lk)^2]} \cdot |2kz(m^2 + l^2 + mk) + al(k^2 + z^2)| \leq 1. \quad (45)$$

根据(44)式,当 $l = 0$ 时,容易得到文献[14]的结论,即当 Kerr 黑洞的视界可整体嵌入 E^3 时,必有 $a^2 \leq \frac{3}{4} m^2$, 否则只能嵌入到 PE^3 .

当 a, l 都不为零时,在两极

$$[G^2(z)]'|_{z=k} = -\frac{4(m^2 + l^2 + mk)^2}{k(m^2 + l^2 + mk + al)}, \quad (46)$$

$$[G^2(z)]'|_{z=-k} = -\frac{4(m^2 + l^2 + mk)^2}{k[al - (m^2 + l^2 + mk)]}. \quad (47)$$

注意到 m, l, a 的取值必须使(2)式中的 k 为实数,则从 $(m+k)^2 + (l \pm a)^2 > 0$ 恒成立易证明

$$(m^2 + l^2 + mk) \pm al > 0 \quad (48)$$

恒成立,且与 a, l 的符号无关. 利用这一结果可以得到

$$\left. \begin{aligned} |(G^2(z))'|_{z=k} &< \frac{4(m^2 + l^2 + mk)}{k} \\ |(G^2(z))'|_{z=-k} &> \frac{4(m^2 + l^2 + mk)}{k} \end{aligned} \right\} al > 0, \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} |(G^2(z))'|_{z=k} &> \frac{4(m^2 + l^2 + mk)}{k} \\ |(G^2(z))'|_{z=-k} &< \frac{4(m^2 + l^2 + mk)}{k} \end{aligned} \right\} al < 0. \quad (50)$$

因此,当 a, l 均不为零时,若 a, l 同号,则在 $z = -k$ 附近条件(44)或(45)式被破坏;而当 a, l 异号时,则在 $z = k$ 附近条件(44)或(45)式被破坏. 数值计算的结果也符合这一分析. 因此当 a, l 均不为零时, Kerr-NUT 黑洞的视界不能整体嵌入 E^3 . 另外从表 1 至表 3 可以看出,当 a 和 l 同号时,在 $z = k$ 处有些 R 为负;而当 a 和 l 异号时,在 $z = -k$ 处有些 R 为负. 这说明与 Kerr-Newman 黑洞的视界不同,在 Kerr-NUT 黑洞的视界上,条件(44)或(45)式被破坏的区域与 R 为负的区域并不一致.

六、结 论

从以上讨论可以看出, NUT 参数 l 通过与角动量参数 a 耦合,对 Kerr-NUT 黑洞的视界几何有着明显的影响,从而使这种黑洞视界的几何性质明显地不同于其它黑洞视界的几何性质.

1. 高斯曲率 R 关于赤道平面不对称是 Kerr-NUT 黑洞视界的一个重要特点. 尽管

这样, R 关于参数 a, l, z 却有一定的对称性质. 与 Kerr-Newman 黑洞视界不同, Kerr-NUT 黑洞视界不具有二维球的拓扑.

2. 与外磁场和转动对黑洞视界几何的影响不同, NUT 参数使转动黑洞视界的 C_s 和 C_p 都增大, 但却恒有 $\delta \geq 0$, 即 $C_s \geq C_p$.

3. 这种黑洞的视界不可整体嵌入欧几里得空间 E^3 , 嵌入图关于赤道平面也不对称.

附 录 A

根据(2)式可以将(19)式写成

$$C_s = \frac{2\pi[(m+k)^2 + l^2 + a^2]}{\sqrt{(m+k)^2 + l^2}}, \quad (\text{A.1})$$

令

$$y = \sqrt{(m+k)^2 + l^2} \quad (\text{A.2})$$

则

$$C_s = \frac{2\pi(y^2 + a^2)}{y}. \quad (\text{A.3})$$

因为 m, l 和 a 的取值必须保证 k 为实数, 所以应有

$$m^2 - l^2 \geq a^2. \quad (\text{A.4})$$

从上式不难验证

$$y^2 - a^2 \geq 0. \quad (\text{A.5})$$

又因为

$$\frac{dy}{dl} = \frac{(m+2k)l}{k\sqrt{(m+k)^2 + l^2}} \geq 0, \quad (\text{A.6})$$

所以

$$\frac{dC_s}{dl} = 2\pi \frac{y^2 - a^2}{y^2} \cdot \frac{dy}{dl} \geq 0, \quad (\text{A.7})$$

即 C_s 为 l 的增函数. 在(A.6)式中认为 $l \geq 0$, 这是因为第四节已指出 C_s, C_p 与 a 和 l 的正负无关, 所以在本附录及附录 B 中只考虑 a, l 为非负的情况. 又因为在(22)式的最后一式中

$$0 \leq x \leq 1, \quad (\text{A.8})$$

所以从(22)式得

$$\begin{aligned} \frac{dC_p}{dl} &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{(m+k)\frac{dk}{dl} + (l+ax)}{\sqrt{(m+k)^2 + (l+ax)^2}} + \frac{(m+k)\frac{dk}{dl} + (l-ax)}{\sqrt{(m+k)^2 + (l-ax)^2}} \right] dx \\ &\geq 2 \int_0^1 \frac{2(m+k)\frac{dk}{dl} + 2l}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{(m+k)^2 + (l+ax)^2}} dx \\ &= \frac{4l(m+2k)}{k} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{(m+k)^2 + (l+ax)^2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

因为上式中被积函数大于零, 所以积分也大于零, $dC_p/dl \geq 0$, 即 C_p 为 l 的增函数.

附 录 B

从(22)式可得

$$\frac{\partial C_p}{\partial a} = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{(m+k)\frac{\partial k}{\partial a} + (l+ax)x}{\sqrt{(m+k)^2 + (l+ax)^2}} + \frac{(m+k)\frac{\partial k}{\partial a} - (l-ax)x}{\sqrt{(m+k)^2 + (l-ax)^2}} \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{k} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ [kax^2 - a(m+k)] \left[\frac{1}{\sqrt{(m+k)^2 + (l+ax)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(m+k)^2 + (l-ax)^2}} \right] \right. \\
&\quad \left. + klx \left[\frac{1}{\sqrt{(m+k)^2 + (l+ax)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(m+k)^2 + (l-ax)^2}} \right] \right\} dx. \quad (\text{B.1})
\end{aligned}$$

根据 x 的取值范围, 易得

$$kax^2 - a(m+k) \leq ka - a(m+k) = -ma \leq 0, \quad (\text{B.2})$$

所以 (B.1) 式中大括号内的第一个中括号内的值为非正, 显然第二个中括号内的值为正, 而 klx 为非负, 第三个中括号内的值为非正, 所以 (B.1) 式中的被积函数为非正, 积分必为非正, 即 C_p 为 a 的减函数,

$$C_p \leq C_p(a=0) = 2\pi \sqrt{2k(m+k)} = 2\pi \sqrt{(m+k)^2 + l^2}, \quad k = \sqrt{m^2 + l^2}, \quad (\text{B.3})$$

而直接可以验证

$$\frac{4\pi(m^2 + l^2 + mk)}{\sqrt{(m+k)^2 + l^2}} \Big|_{a=0} \geq 2\pi \sqrt{(m+k)^2 + l^2} \Big|_{a=0} > 2\pi \sqrt{(m+k)^2 + l^2} \Big|_{a=0}, \quad (\text{B.4})$$

所以有

$$C_a \geq C_p \quad (\text{B.5})$$

和

$$\delta \geq 0. \quad (\text{B.6})$$

- [1] W. J. Wild, R. M. Kerns, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 332.
 [2] W. J. Wild, R. M. Kerns, W. F. Drish, *Phys. Rev.*, **D23**(1981), 829.
 [3] R. Kulkarni, N. Dadhich, *Phys. Rev.*, **D33**(1986), 2780.
 [4] L. Smarr, *Phys. Rev.*, **D7**(1973), 289.
 [5] K. D. Kokkotas, *Gen. Rel. Grav.*, **20**(1988), 829.
 [6] K. D. Krori, M. Barua, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 1171.
 [7] D. Kramer *et al.*, *Exact Solutions of Einstein's Field Equation*, Cambridge University Press, (1980), p: 337.
 [8] M. Carmeli, *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*, John Wiley & Sons, New York, (1982), pp. 385; 386.
 [9] M. Carmeli, *Group Theory and General Relativity* McGraw-Hill, New York, (1977), pp. 281—287.
 [10] 强稳朝, *科学通报*, **15**(1988), 1189.
 [11] T. Willmore, *An Introduction to Differential Geometry*, Oxford University Press, Oxford, England, (1959), pp: 79; 161.
 [12] R. M. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago and London, (1984), p. 313.
 [13] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, (1980), p. 905.
 [14] N. A. Sharp, *Can. J. Phys.*, **59**(1981), 688.

SURFACE GEOMETRY OF A KERR—NUT BLACK HOLE

QIANG WEN-CHAO

Department of Basic Courses, Xi'an Institute of Metallurgy and Construction Engineering, Xi'an 710055

(Received 8 July 1991)

ABSTRACT

In this article, the Gaussian curvature of the event horizon of a Kerr-NUT black hole is given. The effect of NUT parameter on the equatorial circumference and the polar circumference of the event horizon is analysed. The problem of embedding the surface in Euclidean 3-space is examined. It is shown that the event horizon of a Kerr-NUT black hole has the geometrical properties which other black holes do not possess.

PACC: 0420; 0490; 0290