第41卷 第7期 物 理 学 报 Vol. 41, No. 7
1992 年 7 月 ACTA PHYSICA SINICA July, 1992

推广的 KdV 方程的孤波解

朱 佐 农
江苏农学院基础部，扬州 225001
1991 年 6 月 25 日收到

本文研究了推广的 KdV 方程

$$u_t+2\mu uu_x+\nu u_{3x}+\delta u_{5x}=0\quad(\mu\nu\delta\neq 0) \tag{1}$$

的精确孤子解，得到了(1)式的一些新的孤波解，对文献[10]的若干结论作了补充与修正。

PACC: 0340K; 0290

一、引 言

众所周知，方程(1)有着广泛的物理背景。在研究冷等离子体中的磁声波传播时导出过[1]，在研究传输线中的孤波[2]和分层流体中界面孤波时也导出过[3]。当流体的无维度的表面张力趋近于 1/3 时，水波方程也由(1)式来描述[4]。因而研究方程(1)的孤波解十分有意义。Kawahara 曾对(1)式进行数值求解[5]。当 δ 是个小量时，文献[6]求出过(1)式的三阶近似解析孤波解。文献[7—9]求得了(1)式的精确孤波解。最近，文献[10]利用 KdV 方程与高阶 KdV 方程行波解之间的形变理论又得到了(1)式的孤子解。本文利用正确的形变关系式细致地研究了方程(1)的精确孤波解，得到了方程(1)的一些新的精确孤波解。对文献[10]的若干结论作了补充与修正。

二、KdV 方程与方程(1)的孤波解之间的形变理论

文献[10]指出，KdV 方程

$$U_t-mUU_x+U_{3x}=0 \tag{2}$$

与5阶 KdV 方程

$$u_t+(\mu u^2+\nu u_{2x}+duu_{2x}+\beta u_x^2+\delta u_{4x})_x=0 \tag{3}$$

的行波解当参数 α,β 满足

$$5\alpha+4\beta=0 \tag{4}$$

时，存在着如下的形变关系：

$$u(\eta)=B_0+B_1U(\eta)+B_2U^2(\eta), \tag{5}$$

其中

$$\eta=kx-\omega t-\eta_0, \tag{6}$$

$$U_{\eta\eta}=C_1+\nu U(\eta)+\frac{m}{2}U^2(\eta),\quad u_\eta^2=C_2+2C_1U(\eta)+\nu U^2(\eta)+\frac{m}{3}U^3(\eta) \tag{7}$$

v 为(2)式的行波解的波速。而 B_0, B_1, B_2, k, ω, C_1, C_2 满足三个纯代数的条件，即文献[10]中(42)—(44)式。

我们指出，方程(2)和(3)的行波解当(4)式成立时存在着形变关系(5)式。而 B_0, B_1, B_2, k, ω, C_1, C_2 满足如下四个纯代数的限制条件：即

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\omega B_1}{k}+2\mu B_0B_1+\nu k^2(B_1v+6B_2C_1)+\alpha k^2\Big(-\frac{3}{2}B_1^2C_1-3B_1B_2C_2\\
&\quad+B_0B_1v+6B_0B_2C_1\Big)+k^4\delta[3mB_1C_1+B_1v^2+30C_1B_2v\\
&\quad+10B_2mC_2]=0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2\omega B_2}{k}+2\mu(B_1^2+2B_0B_2)+\nu k^2(B_1m+8B_2v)\\
&\quad+\alpha k^2\left(B_0B_1m+8B_0B_2v-\frac{1}{2}B_1^2v-6B_2^2C_2-6B_2B_1C_1\right)\\
&\quad+\delta k^4(5B_1mv+56mC_1B_2+32B_2v^2)=0,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&6\mu B_1B_2+5\nu k^2mB_2+\alpha k^2\left(5mB_0B_2+\frac{1}{4}mB_1^2-12B_2^2C_1\right)\\
&\quad+\delta k^4\left(\frac{5}{2}m^2B_1+65mB_2v\right)=0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

及

$$
\mu B_2^2+\alpha k^2\left(-vB_2^2+\frac{B_2mB_1}{2}\right)+\delta k^4\cdot\frac{35m^2}{6}B_2=0. \tag{11}
$$

事实上为求(3)式的行波解 $u=u(\eta)$ 代入(3)式可得

$$
-\omega u+k(\mu u^2+\nu k^2u_{2\eta}+\alpha k^2uu_{2\eta}+k^2\beta u_\eta^2+\delta k^4u_{4\eta})=C, \tag{12}
$$

C 为积分常数。将形变关系式(5)代入(2)式并注意到(7)式经细致计算可得形变关系式中常数 B_0, B_1, B_2, k, ω, v, C_1, C_2 所满足的纯代数限制条件为(8)—(11)式，而不是文献[10]中(42)—(44)式。

为从方程(2)的孤子解 $U(\xi)=U(x-vt)$ 得到推广的 KdV 方程(1)(即在方程(3)中取 $\alpha=\beta=0$) 的孤波解，我们对限制条件(8)—(11)式作更为细致的讨论。

取 $m=6$, $\alpha=\beta=0$, (8)—(11)式化为

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\omega B_1}{k}+2\mu B_0B_1+\nu k^2(B_1v+6B_2C_1)+\delta k^4(18B_1C_1+B_1v^2\\
&\quad+30C_1B_2v+60B_2C_2)=0,
\end{aligned}
\tag{8'}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2\omega}{k}B_2+2\mu(B_1^2+2B_0B_2)+\nu k^2(6B_1+8B_2v)+\delta k^4(30vB_1\\
&\quad+336C_1B_2+32B_2v^2)=0,
\end{aligned}
\tag{9'}
$$

$$
6\mu B_1B_2+30\nu k^2B_2+\delta k^4(90B_1+390B_2v)=0, \tag{10'}
$$

$$
\mu B_2^2+210\delta k^4B_2=0, \tag{11'}
$$

由(11′),(10′),(8′)式分别得

$$
B_2=-\frac{210\delta k^4}{\mu},\quad B_1=-\frac{70\nu}{13\mu}k^2+\frac{v}{3}B_2, \tag{13}
$$

$$\frac{\omega}{k}=2\mu B_0+\nu k^2\left(v+6C_1\frac{B_2}{B_1}\right)+\delta k^4\left(18C_1+v^2+(30C_1v+60C_2)\frac{B_2}{B_1}\right). \tag{14}$$

将(14)式代入(9′)式得

$$\begin{aligned}&2\mu B_1^3+\nu k^2(6B_1^2+8vB_1B_2)+\delta k^4(30vB_1^3+336C_1B_1B_2+32v^2B_1B_2)\\&\quad-2B_2\{\nu k^2(vB_1+6C_1B_2)+\delta k^4[(18C_1+v^2)B_1+(30C_1v\\&\quad+60C_2)B_2]\}=0.\end{aligned} \tag{15}$$

将(13)式代入(15)式，经细致计算整理得

$$a_6k^6+a_8k^8+a_{10}k^{10}+a_{12}k^{12}=0,$$

即 $a_6+a_8y+a_{10}y^2+a_{12}y^3=0$ (其中 $y=k^2$), (16)

式中的系数分别为

$$a_6=-\frac{3038\times 10^2\nu^3}{13^3\mu^2}, \tag{17a}$$

$$a_8=\frac{3528\nu^2\delta v}{13^2\mu^2}, \tag{17b}$$

$$a_{10}=-\frac{56\times 210^2\delta^2\nu C_1}{13\mu^2}-\frac{210^2\nu\delta^2v^2}{3\mu^2}, \tag{17c}$$

$$a_{12}=-98\times 10^3\frac{v^3\delta^3}{\mu^2}+\frac{40\times 210^2C_1v\delta^3}{\mu^2}-\frac{120\times 210^2C_2\delta^3}{\mu^2}. \tag{17d}$$

如文献[11]指出，KdV 方程(2) ($m=6$) 存在单孤子解：

$$U(\xi)=C_0'-\frac{v+6C_0'}{2}\operatorname{sech}^2\left\{\frac{1}{2}\sqrt{v+6C_0'}\xi\right\}\qquad \xi=x-vt. \tag{18}$$

此时有

$$C_1=-vC_0'-3C_0'^2,\ C_2=vC_0'^2+4C_0'^3. \tag{19}$$

注意到(19)式，并令

$$f(y)=a_6+a_8y+a_{10}y^2+a_{12}y^3. \tag{20}$$

对于 $v>0$，设 $\nu\delta<0$，则 $a_6a_{12}<0$，故方程(16)一定存在正实数解 y_1^*. 又 $\nu\delta>0$ 时，$a_6a_8<0$，故方程(16)也存在正实数解 $y_2^*\ll 1$. 对于 $v<0$，设$\nu\delta>0$，则 $a_6a_{12}<0$，方程(16)定存在正实数解 y_3^*，又 $\nu\delta<0$ 时，$a_6a_8<0$，故方程(16)也存在正实数解 $y_4^*\ll 1$. 对于 $v=0$，方程(16)成为

$$\frac{31}{13^2}\nu^3-756C_0'^2\nu\delta^2y^2+28080C_0'^3\delta^3y^3=0. \tag{16′}$$

不论 $\nu\delta>0$ 还是 $\nu\delta<0$，方程(16′)定存在正实数解. 从而得到本文的主要定理：

定理　取 $U(\xi)=U(x-vt)$ 为 KdV 方程(2)($m=6$)的孤波解(21)式 ($v>0$ 或 $v<0$ 或 $v=0$)，则推广的 KdV 方程(1)存在孤波解：

$$u(\eta)=B_0+B_1U(\eta)+B_2U^2(\eta), \tag{21}$$

其中 $\eta=kx-\omega t+\eta_0$，B_0 为任意实常数，B_2，B_1，ω，k 由(13)，(14)，(16)，(17) 诸式所确定. 由(14)式，适当选择 B_0 使 $\omega>0$，$\omega<0$，$\omega=0$，故推广的 KdV 方程(1)的孤波解(21)式可以是右行的，左行的或静态的.

上述讨论中 $B_1\neq 0$，因为当 $C_1C_2\neq 0$ 时，如取 $B_1=0$，则方程组(8′)—(11′)不

相容。在 KdV 方程(2)($m=6$)的孤波解(18)式中取 $C_0'=0$，则得到通常的右行孤波

$$U(\xi)=-\frac{v}{2}\operatorname{sech}^2\left\{\frac{\sqrt{v}}{2}(x-vt)\right\}。\tag{22}$$

此时 $C_1=C_2=0$。方程组(8′)—(11′)化为

$$-\frac{\omega}{k}B_1+2\mu B_0B_1+\nu k^2vB_1+\delta k^4v^2B_1=0,\tag{8''}$$

$$-\frac{2\omega}{k}B_2+2\mu(B_1^2+2B_0B_2)+\nu k^2(6B_1+8B_2v)+\delta k^4(30vB_1+32B_2v^2)=0,\tag{9''}$$

$$6\mu B_1B_2+30\nu k^2B_2+\delta k^4(90B_1+390B_2v)=0,\tag{10''}$$

$$\mu B_2+210\delta k^4=0.\tag{11''}$$

显然若取 $B_1=0$，则(8″)式为恒等式。由(10″)式得

$$k^2=-\frac{\nu}{13\delta v},\tag{23}$$

从而

$$B_2=-\frac{210\nu^2}{169\delta\mu v^2}.\tag{24}$$

由(9″)式得

$$\frac{\omega}{k}=2B_0\mu+4\nu k^2v+16\delta k^4v^2=2B_0\mu-\frac{36\nu^2}{13^2\delta}.\tag{25}$$

从而又获得下述结论：

若 $\nu\delta<0$，则推广的 KdV 方程(1)存在孤波解

$$u(\eta)=B_0+B_2U^2(\eta),\tag{26}$$

其中 $\eta=kx-\omega t+\eta_0$，B_0 为任意实常数，B_2, k, ω 由(23),(24),(25)式确定，$U(\eta)$ 由(22)式确定。若取 $B_0=\frac{18\nu^2}{13^2\mu\delta}$，则(26)式为方程(1)的一个静态孤子解。

三、方程(1)的另一个精确孤波解

在第二节中，我们利用 KdV 方程(2)与推广的 KdV 方程(1)的孤波解之间的正确的形变关系式，从方程(2)的孤子得到了方程(1)的运动孤子以及静态孤子。孤波解(18)式表明：$v>0$ 时，振幅越大，孤子右行速度越快；$v<0$ 时，振幅越大，孤子左行速度越慢。解(18)式中的常数 C_0' 是独立于孤波速度 v 的(参见文献[11])。一个自然的问题是，KdV 方程(2)是否存在别的左行孤子？利用守恒律方程等价的概念，我们曾求出 KdV 方程(2)的另一个左行孤子

$$U(\xi)=\frac{\lambda}{2}\frac{(C-e^{\sqrt{2\lambda}(x+\lambda t-C_1)})^2-4Ce^{\sqrt{2\lambda}(x+\lambda t-C_1)}}{(C+e^{\sqrt{2\lambda}(x+\lambda t-C_1)})^2}$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{2}-\frac{4Ce^{\sqrt{2\lambda}(x+\lambda t-C_1)}}{(C+e^{\sqrt{2\lambda}(x+\lambda t-C_1)})^2}\right),\tag{27}$$

其中 $C>0$。此解并不包含在解(18)式中．(27)式所示的左行孤子和(18)式所示的左行孤子($v<0$)具有不同的性态．从(27)式可得到；这个左行孤子振幅越大，左行速度越快．从而据本文主要定理可得下述结论：推广的 KdV 方程(1)存在如下孤波解：

$$u(\eta)=B_0+B_1U(\eta)+B_2U^2(\eta), \tag{28}$$

其中 $\eta=kx-\omega t+\eta_0$，U 由(27)式所示，B_0 为任意实常数，B_2，B_1，ω，k 由(13)(14)(16)(17)诸式所确定，只需将其中 v 换成 $-\lambda(\lambda>0)$，$C_1=-\frac{\lambda^2}{4}$，$C_2=\frac{\lambda^3}{4}$，适当选择 B_0，孤波解(28)式可以是右行的，左行的或静态的．

四、结　　论

1. 文献[10]讨论了 KdV 方程(2)和一般化的5阶 KdV 方程

$$u_t+(\mu u^2+\nu u_{2x}+\alpha uu_{2x}+\beta u_x^2+\gamma u^3+\delta u_{4x})_x=0 \tag{29}$$

行波解之间的形变关系，文献[10]指出："除了 $\gamma=0$，$3\alpha+2\beta=0$ 这种特殊情况外，一旦得到了 KdV 方程的一个行波解，就可立即得到5阶 KdV 方程(29)的一个行波解"．我们指出，此结论应修改为"除了下列三种特殊情况外，即(1) $\gamma=0$，$3\alpha+2\beta=0$；(2) $\gamma=0$，$3\alpha+2\beta\neq0$，而 $\alpha^2+\left(\nu-\frac{5\delta}{3\alpha+2\beta}\right)^2=0$；(3) $\gamma\neq0$，而 $\alpha^2-2\alpha\beta-15\gamma\delta=0$，且 $\mu[-3\alpha-2\beta\pm\sqrt{(3\alpha+2\beta)^2-120\gamma\delta}]+6\nu\gamma=0$，一旦得到 KdV 方程(2)的一个行波解，就可立即得到5阶 KdV 方程(29)的一个行波解。"事实上，要形变关系 $u(\eta)=AU(\eta)+C_0$ 成立，需 $A\neq0$，即

$$(m\alpha+6\gamma C_\pm)C_0+(2\mu C_\pm+m\nu)\neq0. \tag{30}$$

由此便可得出情形(1)，(2)，(3)需排除．

2. 文献[10]取 KdV 方程(2)的孤子解(18)式(即文献[10]中的(26)式)而得到方程(29)的单孤子解．对应于(18)式，此时 $C_1=-\nu C_0'-3C_0'^2$，$C_2=\nu C_0'^2+4C_0'^3$，而不是文献[10]所指出的"$C_1=C_2=0$"．

3. 在本文第二部分已指出文献[10]所导出的形变关系(即文献[10]中的(42)，(43)，(44)式)有误，且遗漏了(11)式．用此不正确的形变关系式，取 $\alpha=\beta=0$，并不能得到方程(1)的正确的孤波解．文献[10]指出"KdV 方程的每一个解可以两种方式形变成 $\gamma=0$，$5\alpha=-4\beta\neq0$ 的5阶 KdV 方程的解"．但我们指出，如 $\alpha\neq0$，从形变关系(8)—(11)式确定 B_0，B_1，B_2，ω，k 还是很困难的．

4. 文献[10]讨论了 KdV 方程和7阶 KdV 方程行波解之间的形变关系(文献[10]中的(46)，(58)，(60)诸式)，但这将涉及到方程参数以及形变关系式中待定常数所应满足的代数方程组的相容性的复杂讨论．例如对于形变关系(46)式，即

$$u(\eta)=AU(\eta)+u_0 \tag{31}$$

显然需要条件 $A\neq0$，$k^4>0$，这便涉及方程参数的复杂讨论．又如对于形变关系(60)式，即

$$u=u_0+A_1U(\eta)+A_2U^2(\eta)+A_3U^3(\eta), \tag{32}$$

此时待定常数 u_0, A_1, A_2, A_3, k, ω 以及常数 ν, C_1, C_2 将必须满足 10 个纯代数的限制方程。从这个方程组能否确定出 u_0, A_1, A_2, A_3, k, ω 这将是复杂的。

[1] T. Kakutani and H. Ono, *J. Phys. Soc. Japan*, 26(1969), 1305.
[2] H. Nagashima, *J. Phys. Soc. Japan*, 47(1979), 1387.
[3] 戴世强,应用数学和力学,3(1982),721.
[4] S-y Lou and G-j Ni, *Sing. J. Phys.*, 7(1990), 47.
[5] T. Kawahara, *J. Phys. Soc. Japan*, 33(1972), 260.
[6] 戴世强等,中国科学,(A辑),(2)(1990),153.
[7] G-x Huang, S-y Lou and X-x Dai, *Phys. Lett.*, 139A(1989), 373.
[8] J. K. Hunter *et al.*, *J. Fluid Mech.*, 134(1983), 205.
[9] J. A. Ju firia, *J. Fluid Mech.*, 184(1987), 183.
[10] 陈德芳等,物理学报,40(1991),513.
[11] 楼森岳,物理学报,40(1991),8.

THE SOLITON SOLUTIONS OF GENERALIZED KdV EQUATION

ZHU ZUO-NONG

Department of Basic Science, Jiangsu Agricultural College, Yangzhou 225001

(Received 25 June 1991)

ABSTRACT

The generalized KdV equation $u_t + 2\mu uu_x + \nu u_{3x} + \delta u_{5x} = 0$ $(\mu\nu\delta \neq 0)$ is studied. Some new soliton solutions of this equation are obtained and some conclusions of Ref [10] are modified.

PACC: 0340K; 0290