

# 强迫的 Oregonator 振子混沌 维数与立方映象

陈治融 陈飞武 袁慧 李晓辉 赵莲青

西北大学化学系, 西安 710069

牛文章 陈炳兴 滕淑兰

西安 705 研究所, 西安 710061

1991 年 7 月 13 日收到

本文论证了强迫的 Oregonator 振子可以用立方映象刻画其行为, 其依据为描述此振子的四变量方程有三个不动点, 混沌的转换函数呈现三次曲线特点, 找到了隶属三点周期的符号  $BK;C$ , 四点周期的符号  $BK;LC$ ,  $B^2K;C$ ,  $BRK;C$ , 并画出了  $BRK;C$  的环状线, 找到了一条倍周期分岔道路. 在混沌域中研究了五个混沌态, 其维数介于 2.02—2.37 之间, 混沌域中央维数偏低, 贴近四点周期线维数偏高.

PACC: 0545

## 一、引 言

有关立方映象国内外已进行了研究<sup>[1-3]</sup>. Lorenz 模型可以用立方映象来描述<sup>[4]</sup>, 得到令人满意的结果. 由于高维耗散动力学系统所描述的微分方程具有三个不动点, 才可能用立方映象描述, 所以非平衡态统计物理上的系统仍以单峰映象描述为主. 本文为文献[5]的续篇.

## 二、理论分析

本文讨论的微分方程<sup>[5]</sup>为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= s(y - xy - x - qx^2), \\ \dot{y} &= s^{-1}(-y - xy + fz + \rho z \cos \omega t), \\ \dot{z} &= w(x - z). \end{aligned} \quad (1)$$

(1)式简记为  $\dot{x}_i = f_i(x) + \rho_i x_3 u$ ,  $\rho_1 = \rho_3 = 0$ ,  $\rho_2 \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . 参数值选取如下:  $s = 77.27$ ,  $w = 64.4$ ,  $q = 8.375 \times 10^{-6}$ ,  $f = 0.9935$ . 这是一个非自治系统. 问题在于如何找到定态, 也就是要找到与之适应的不动点. 现把非自治系统转变成自治系统,  $\dot{x}_i = f_i(x) + \rho_i x_3 u$ ,  $\dot{u} = -\omega v$ ,  $\dot{v} = \omega u$ , 又采用  $t = 0$ ,  $u = 1$ ,  $v = 0$  的条件, 相当于应用了  $u^2 + v^2 = 1$  这个条件.

要认识微分方程(1)的不动点,以自治形式把它镶嵌到高维空间中去,然后观察在高维情况下的不动点,再加以分析.镶嵌的形式有两种,其一为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x) + \rho_i x_3 u \\ \dot{u} &= -\omega v, \\ u^2 + v^2 &= 1; \end{aligned} \quad (2)$$

另一种形式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x) + \rho_i x_3 u, \\ \dot{v} &= \omega u, \\ u^2 + v^2 &= 1. \end{aligned} \quad (3)$$

此处并不讨论(2)式的不动点是否是(3)式的不动点等问题。(2)与(3)式的不动点各有两个,其 $uv$ 值为 $(+1,0), (-1,0); (0,+1), (0,-1)$ 。在本文中,计算机数据既适用于(2)式,又适用于(3)式。 $\rho = 0.1065$ 时的不动点, $x, y, z, u, v$ 的值分别为 $p_1: 20.9614, 1.04991, 20.9614, 1, 0; p_2: 13508.2, 0.886934, 13508.2, -1, 0; p_3: 1010.64, 0.992518, 1010.64, 0, 1; p_4: 1010.64, 0.992518, 1010.64, 0, -1$ 。 $p_3, p_4$ 从四个变量角度来看应当属于同一点。由此可知,本文中 $y$ 应具有立方映象的特点。

四变量表达的三个不动点 $p_1 p_2 p_3$ 的意义如像在混沌态中,积分曲线围绕着这三个点周而复始地运动。

邻近此三个不动点 $p_1 p_2 p_3$ 系统处于什么状态呢?失稳态或稳定态?仍以 $\rho = 0.1065, \omega = 1.25663706$ 为例,在(1)式中令 $f(t) = 0.9935 + 0.1065 \cos \omega t$ ,以 $f(t)$ 与 $t$ 作图

(见图1)。图1是以 $f = 0.9935$ 时

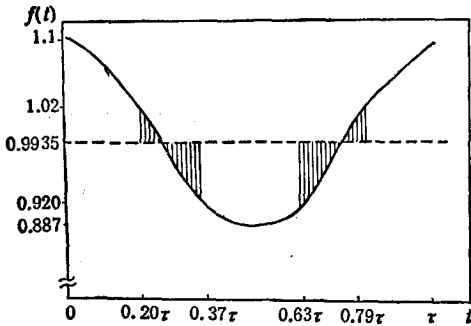


图1 失稳态与稳定态振荡图

$$x_0 = z_0 = 1010.64, y_0 = 0.992518$$

为不动点计算得到 $f(t)$ 变化时态的变化<sup>[6]</sup>,其中失稳区以线段簇表示,线段以外即稳定区,可以看到在一个周期时间内经历了二次失稳态与二次稳定态。另一方面,当 $t$ 处于某一时刻,微分方程(1)等号右端有一个零解,记为 $f_i(x) + \rho_i x_3 \cos \omega t = 0, z = x = \{[-(q-1+f(t))] + [(q-1+f(t))^2 + 4q(1+f(t))]^{1/2}\}/2q, y = \frac{1}{2}[1+f(t) -$

$qx]$ ,可以计算任一时刻下的 $x, y, z$ 值。很明显, $p_1$ 对应于 $f(0)$ 的 $x, y, z$ 值, $p_2$ 对应于 $f(\pi/\omega)$ , $p_3$ 对应于 $f(\pi/2\omega)$ , $p_4$ 对应于 $f(3\pi/2\omega)$ 。由此可知,邻近 $p_1 p_2$ 为稳定态, $p_3 p_4$ 则为失稳态。

### 三、立方映象的描述

基于下述理由,强迫的 Oregonator 振子可用立方映象来描述:

$\rho = 0.1065, \omega = 1.25663706$  是一个混沌态, $y$ 的转换函数如图2所示。

这个混沌具有非周期性的无轨道稳定性运动,在一维近似中,不同的迭代点会大量出

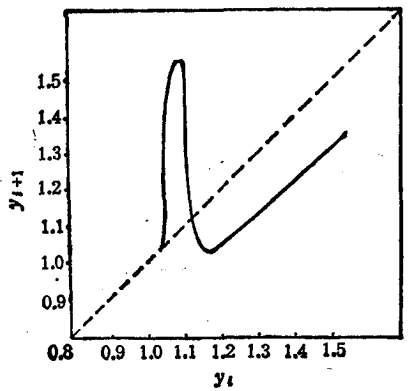


图 2 转换函数图

$$y_{i+1} = F(y_i); \quad t_{i+1} - t_i = \tau = 2\pi/\omega;$$

$$\rho = 0.1065; \quad \omega = 1.25663706$$

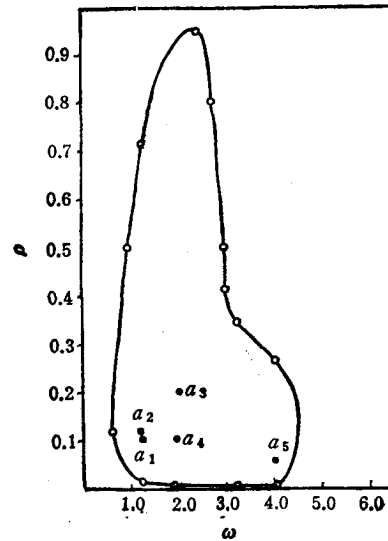


图 3 BRK;C 四点周期封闭线

$\omega, \rho$  值分别为 3.2, 0.0036; 1.567663706, 0.005; 1.25, 0.0135; 0.625, 0.1145; 0.95, 0.5; 2.4, 0.95; 2.7, 0.8; 3.0, 0.413; 3.2, 0.35; 4.002028858, 0.0018; 4.002028858, 0.265; 参考点  $B^2K;C$  1.25663706, 0.72

现, 因而转换函数曲线保留了立方映象形状的基本特征, 出现了  $y_{\max}$  与  $y_{\min}$  与单峰映象不同<sup>[7]</sup>.

文献[7]中混沌态的转换函数曲线呈二次曲线型, 作者采用了  $y_{n+1} = y_n + 15.998y_n(y_n - 0.5)(y_n - 1)$  立方映象,  $y_n \in [0, 1]$  以  $y_{n+1}$  与  $y_n$  作图, 得到的混沌态曲线形状与图 2 相近.

在我们的数据中, 大量出现的是能用立方映象来表达的周期轨道, 其符号采用文献[2]的. 如  $(\omega, \rho)$  为 (1.25, 0.2165) 时隶属三点周期  $BK;C$ . 又如  $(\omega, \rho)$  为 (1.9, 0.003) 时隶属四点周期  $BK;LC$ , (2.7, 0.8)  $BRK;C$ , (1.22, 0.8)  $B^2K;C$ , (0.47, 0.25)  $K;LRC$ , (0.5, 0.2)  $K;L^2C$ . 这里应指出, 我们所得到的符号应该说是所隶属的符号, 如  $BRK;C$  这样的符号指的是此轨道通过两个临界点, 系双超稳轨道, 并未采用通过一个极大值的周期窗符号来表达<sup>[4]</sup>. 至于八点周期的双超稳轨道尚未见到完整的报道. 我们得到的八周期轨道仅仅可以说明它们不能用  $MMS$  轨道来表达. 我们采用  $BRK;C$  单一符号的点绘成一条封闭线, 如图 3.

图 3 中混沌态的  $\omega, \rho$  值分别为 1.25663706, 0.1065<sup>[7]</sup>; 1.25663706, 0.1165; 2.094395102, 0.20; 2.1, 0.1065; 4.002028858, 0.06, 分别以  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  表示.

由于  $BRK;C$  周期线的存在, 混沌态转换函数呈立方映象双模型曲线的特征, 这就充分证实了强迫的 Oregonator 可用立方映象来描述.

## 四、一条倍周期分岔道路

为了寻找图 3 中  $BRK;C$  右端的下尖部的混沌,并研究其维数,为了确证  $a_5$  位置,也必须研究分岔道路。研究  $a_5$  的目的即了解贴近四点周期的维数值。下面是沿一条线的两个方向其倍周期分岔道路趋向混沌的情形。

当  $\omega = 4.002028858$  时,不同  $\rho$  值的周期数如表 1 所示。

表 1 不同  $\rho$  值的周期数

$\rho$ 值	0.31	0.265	0.25	0.0021	0.002	0.0018
周期数	2	4	8	16	8	4

图 4 为  $\omega = 4.002028858$  时分岔示意图。我们选择  $\rho = 0.06$ ,  $\omega = 4.002028858$  计算了 7000 周期数据,每个周期 1000 步,步长  $h = 0.00157$ , 以  $y$  为纵坐标,  $x$  为横坐标,  $x$  与  $z$  相等时用一点表示,  $x$  与  $z$  不等时用横线标出,横线两端各代表  $x$  或  $z$  值,计算维数时采用的微分方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= s(y - xy + x - qx^2), \\ \dot{y} &= s^{-1}(-y - xy + fz + \rho z \cos \phi), \\ \dot{z} &= \omega(x - z), \\ \dot{\phi} &= \omega, \end{aligned} \quad (4)$$

$\phi$  的定义域为  $[0, 2\pi]$ , 并视 0 和  $2\pi$  为同一点, 然后跟踪一条混沌轨道。在  $\phi = 0$  的截面上的点集如图 5 所示,  $x, y$  的最大与最小值的差值均定为 1,  $\varepsilon = 1/10, 1/20, 1/30, 1/40, 1/50, 1/100$ , 立方格子数  $N(\varepsilon) = 46, 100, 164, 208, 270, 478$ 。按下式计算维数:

$$\log N(\varepsilon) - d_c \log 1/\varepsilon = 0.$$

以  $\log N(\varepsilon)$  对  $\log 1/\varepsilon$  作图,如图 6,得一直线,其斜率  $d_c = 1.1691$ 。

在微分方程(4)中,应考虑  $\phi$ , 故此奇异吸引子空间维数  $D_c = 1 + d_c = 2.1691$ 。由

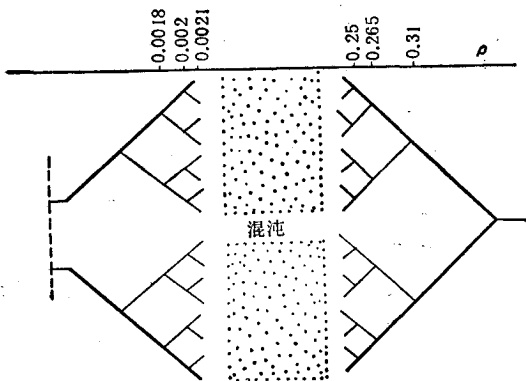
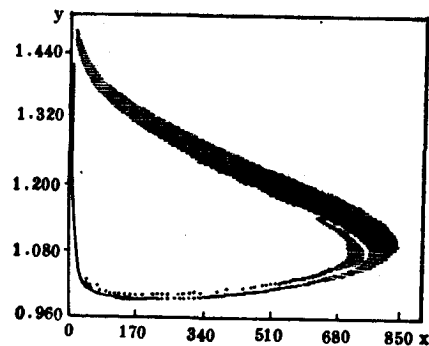


图 4 倍周期分岔示意图

图 5 点集图  $\rho = 0.06$ ;  $\omega = 4.002028858$

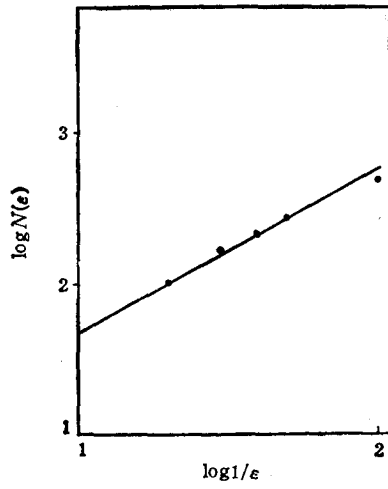
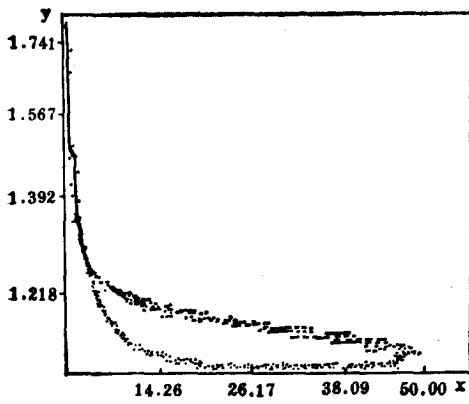
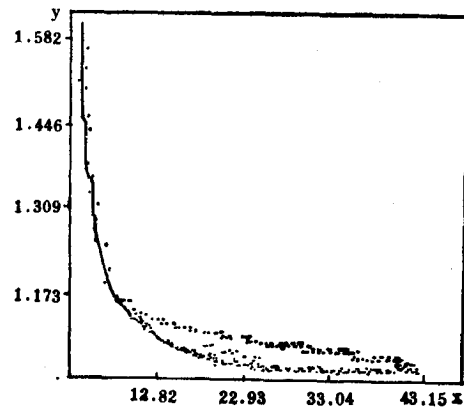


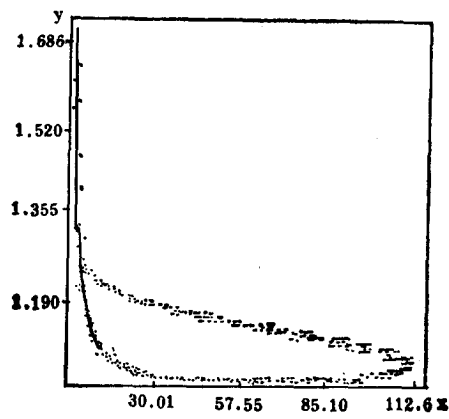
图 6  $\log N(\epsilon) - \log 1/\epsilon$  图



(a)  $\rho = 0.20; \omega = 2.094395102$



(b)  $\rho = 0.1165; \omega = 1.25663706$



(c)  $\rho = 0.1065; \omega = 2.1$

图 7 点集图

于  $D_c$  属于非整数维, 进一步说明  $\rho = 0.06$ ,  $\omega = 4.002028858$  属于一个混沌态.

### 五、混沌域中其他奇异吸引子的维数

文献[5]的混沌态  $\rho = 0.1065$ ,  $\omega = 1.25663706$ , 其维数为 2.3746, 上述的混沌态  $\rho = 0.06$ ,  $\omega = 4.002028858$ , 其维数为 2.1691.

此外, 我们还计算了三个混沌态, 两个处于混沌态域内的中央, 周期数均超过 7000 周期. 图 7(a) 中  $\rho = 0.20$ ,  $\omega = 2.094395102$ ,  $h = 1.5 \times 10^{-3}$ . 图 7(b) 中  $\rho = 0.1165$ ,  $\omega = 1.25663706$ ,  $h = 2.5 \times 10^{-3}$ . 图 7(c) 中  $\rho = 0.1065$ ,  $\omega = 2.1$ ,  $h = 1.4959964 \times 10^{-3}$ . 其点集如图 7 所示, 经计算分别得到  $d_c$  值再加 1 以后的  $D_c$  值. 图 7(a) 为 2.0979, 图 7(b) 为 2.1846, 图 7(c) 为 2.0253.

- [1] ZENG Wanzhen, *Chin. Phys. Lett.*, 2(1985), 429.
- [2] R. S. Mackay, C. Tresser, *Physica*, 27D(1987), 412.
- [3] O. Charoya-Aceves, F. Angulo-Broussard, E. Pina, *Physica*, 14D(1985), 374.
- [4] DING Ming-zhou, HAO Bai-lin, *Commun Theor. Phys.*, 9(1988), 375.
- [5] 陈治融, 赵莲青, 牛文章, *科学通报*, 14(1990), 1060.
- [6] R. J. Field, R. M. Noyes, *J. Chem. Phys.*, 60(1974), 1877.
- [7] K. Tomita, T. Kai, *Prog. Theor. Phys. Supp.*, 63/64 (1987), 280.

## CHAOTIC DIMENSIONS OF FORCED OREGONATOR OSCILLATOR AND CUBIC MAP

CHEN ZHI-RONG CHEN FEI-WU YUAN HUI LI XIAO-HUI ZHAO LIAN-QING

*Department of Chemistry, Northwest University, Xi'an 710069*

NIU WEN-ZHANG CHEN BING-XING TENG SHU-LAN

*Research Institute 705, Xi'an 710061*

(Received 13 July 1991)

### ABSTRACT

In this paper, we prove that forced Oregonator oscillator may be described by cubic map, for there are three fixed points in four variables differential equations and the transfer function of chaos represents the character of cubic curve. We find the DSP symbolic description of 3-point cycle BK; C, 4-point cycle BK; LC, BK; C, BRK; C and draw a cycle line of BRK; C. We find two of one type in period-doubling bifurcations along a straight line. We studied five chaotic behaviours. Its dimensions are 2.02—2.37. In the middle region of chaos, its dimensions are slightly smaller, i.e., 2.02 to 2.09. Near the 4-point cycle line, its dimensions are 2.16 to 2.34.

PACC: 0545