第41卷 第7期 物理学报 Vol. 41, No. 7
1992年7月 ACTA PHYSICA SINICA July, 1992

自由电子激光中平衡态螺旋轨道的稳定性问题

王昌标

电子科技大学高能电子学研究所，成都 610054

1991年6月25日收到

本文用李亚普诺夫的运动稳定性理论成功地解决了具有均匀导向场和理想螺旋磁场自由电子激光中电子平衡态螺旋轨道的稳定性问题．利用李亚普诺夫第一方法，确定了轨道的不稳定区域；利用李亚普诺夫第二方法，严格地证明了高导向场区和低导向场区螺旋轨道的稳定性．

PACC：4255T；4260

一、引　言

自由电子激光是一种把电子在平衡态轨道上作周期性加速运动产生的自发辐射转变为相干辐射的物理过程，因此平衡态轨道的稳定性问题是一个十分重要的基本理论问题．很多作者研究了这个问题[1-7]，然而该问题实际上至今未得到真正解决．

大家知道，电子在具有均匀导向场的 wiggler 磁场(以下简称组合 wiggler 场)中的运动方程是一组非线性的微分方程[1-5]，难以直接用解析的方法求得通解，因此李亚普诺夫运动稳定性理论中的第一方法(通常称为线性扰动法)[8]被广泛地用于自由电子激光中平衡态轨道稳定性问题的研究[1,4,5]．在这种方法中，人们用非线性方程组在一组已知解附近的一阶线性扰动方程组的特征根来判断该已知解是否稳定的．如果至少存在一个具有正实部的特征根，则该已知解在李亚普诺夫的意义下是不稳定的．然而，如果存在一个零根和两个纯虚根，李亚普诺夫第一方法失效．但是这样一种情况常容易被人误解，认为只要一阶线性扰动方程组的非零解是稳定的，那么它的非线性方程组的已知解就是稳定的[7]．事实上，对于许多实际的非线性方程来说，这样的已知解可以是稳定的，也可以是不稳定的，取决于高阶非线性项(见附录一)．

在理想或非理想组合 wiggler 场自由电子激光中，螺旋轨道是一个特解．Friedland[1]和 Freund 等人[5]在无初始电子能量扰动的假定下，研究了它的稳定性问题．在线性扰动方程组具有一个正实特征根的区域，螺旋轨道是不稳定的．然而在人们最为感兴趣的其余区域(即高导向场区和低导向场区)，由于存在一个零特征根和两个纯虚数特征根，螺旋轨道的稳定性问题至今没有被证明．

本文的目的是要解决理想组合场自由电子激光中螺旋轨道的稳定性问题．利用李亚

普诺夫第一方法，并考虑到电子初始能量的扰动，确定了不稳定区域；利用李亚普诺夫第二方法，严格地证明了高导向场区和低导向场区螺旋轨道的稳定性.

二、考虑到初始能量扰动的螺旋轨道不稳定区域

在典型的自由电子激光中，电子注半径很小，wiggler 磁场的横向梯度效应常可以被忽略[9]. 并且实验已经证实[10]，即使对于较大半径的电子注，如果忽略电子横向的谐波运动（betatron motion），单个电子的平均轨道也可以用一个和该电子所在点磁场有关的等效理想组合 wiggler 场中的螺旋轨道来代表. 因此，理想组合场中平衡态螺旋轨道的稳定性问题具有特别重要的意义.

此外，当电子通过自由电子激光互作用区时，速度和能量都要发生变化，而且人们往往希望通过改变入射电子注的能量来达到调谐自由电子激光工作频率的目的，因此轨道的稳定性问题的研究应该考虑到电子初始能量的扰动. 然而，在以往的研究中，都忽略了这个问题[1,5,6].

利用基矢 $\hat{e}_1=\hat{x}\cos(k_wz)+\hat{y}\sin(k_wz)$，$\hat{e}_2=-\hat{x}\sin(k_wz)+\hat{y}\cos(k_wz)$ 和 $\hat{e}_3=\hat{z}$，理想组合场中的电子运动方程可以写为[1]

$$\mathring{\beta}_1=(\beta_3-\bar{\Omega}_{\parallel p})\beta_2, \tag{1}$$

$$\mathring{\beta}_2=(\beta_3-\bar{\Omega}_{\parallel p})\beta_1-\bar{\Omega}_{\perp p}\beta_3, \tag{2}$$

$$\mathring{\beta}_3=\bar{\Omega}_{\perp p}\beta_2, \tag{3}$$

式中 $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ 分别是 x, y, z 方向的单位矢量，k_w 是 wiggler 波数，$\beta_{1,2,3}=v_{1,2,3}/c$，$v_1$, v_2, v_3 分别是电子速度在基矢 $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ 上的投影，c 是真空光速，

$$\bar{\Omega}_{\perp p,\parallel p}=|e|B_{\perp,\parallel}/(\gamma_p m_0 k_w c),$$

$B_\perp$ 是 wiggler 振幅，$B_\parallel$ 是均匀导向场，e 和 m_0 分别是电子电荷和静止质量，

$$\gamma_p=(1-\beta_1^2-\beta_2^2-\beta_3^2)^{-1/2}$$

是相对论因子. 在方程(1)—(3)中，

$$\mathring{\chi}=d\chi/d\tau,\quad \tau=k_w ct.$$

假定 $\beta_\perp=v_\perp/c$ 和 $\beta_\parallel=v_\parallel/c$ 分别是电子作螺旋运动时的横向和轴向规格化速度，用 ξ, ζ 和 η 分别代表由初始条件扰动引起的扰动规格化速度解，即 $\beta_1=\beta_\perp+\xi$，$\beta_2=\zeta$，以及 $\beta_3=\beta_\parallel+\eta$，则方程(1)—(3)的螺旋轨道解的稳定性问题变成了以下自治方程组零解的稳定性问题：

$$\mathring{\xi}=(\eta+\alpha_p)\zeta, \tag{4}$$

$$\mathring{\zeta}=-(\eta+\alpha_p)\xi+\bar{\Omega}_{\perp 0}\left(\frac{\beta_\parallel}{\alpha_0}-\frac{\gamma_0}{\gamma_p}\right)\eta+\frac{\bar{\Omega}_{\perp 0}}{\alpha_0}\beta_\parallel^2\left(1-\frac{\gamma_0}{\gamma_p}\right), \tag{5}$$

$$\mathring{\eta}=\frac{\gamma_0}{\gamma_p}\bar{\Omega}_{\perp 0}\zeta, \tag{6}$$

式中 $\alpha_p=\beta_\parallel-\gamma_0\bar{\Omega}_{\parallel 0}/\gamma_p$，$\alpha_0=\beta_\parallel-\bar{\Omega}_{\parallel 0}$，$\bar{\Omega}_{\perp 0,\parallel 0}=\gamma_p\bar{\Omega}_{\perp p,\parallel p}/\gamma_0$，$\gamma_0=(1-\beta_\perp^2-\beta_\parallel^2)^{-1/2}$.

在得到方程(4)—(6)的过程中,使用了螺旋轨道关系 $\alpha_0\beta_\perp + \bar{\Omega}_{\perp 0}\beta_{/\!/} = 0$。应该注意，虽然 $\overset{\circ}{\gamma}_p \equiv 0$, 但 $(\partial/\partial\xi, \partial/\partial\zeta, \partial/\partial\eta)\gamma_p \not\equiv 0$.

方程(4)—(6)的一阶线性扰动方程组可以写为

$$\overset{\circ}{\xi} = \alpha_0\zeta, \tag{7}$$

$$\overset{\circ}{\zeta} = -\left[\alpha_0 + \left(\frac{\gamma_0\bar{\Omega}_{\perp 0}}{\alpha_0}\right)^2\beta_{/\!/}^3\right]\xi + \frac{\bar{\Omega}_{\perp 0}}{\alpha_0}(\bar{\Omega}_{/\!/0} + \gamma_0^2\beta_{/\!/}^3)\eta, \tag{8}$$

$$\overset{\circ}{\eta} = \bar{\Omega}_{\perp 0}\zeta. \tag{9}$$

线性方程组(7)—(9)有三个特征根: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_{2,3} = \pm\sqrt{D}$, 式中$D$被定义为

$$D = \frac{\bar{\Omega}_{\perp 0}^2\bar{\Omega}_{/\!/0}}{\alpha_0} - \alpha_0^2. \tag{10}$$

根据李亚普诺夫第一方法,当 $D > 0$ 时, 非线性方程组(4)—(6)的零解是不稳定的。由此我们得到方程组(1)—(3)螺旋轨道的不稳定区域:

$$\bar{\Omega}_{/\!/} + (\bar{\Omega}_\perp^2\bar{\Omega}_{/\!/})^{\frac{1}{3}} > \gamma_0\beta_{/\!/} > \bar{\Omega}_{/\!/}, \tag{11}$$

式中 $\bar{\Omega}_\perp = \gamma_0\bar{\Omega}_{\perp 0}$, $\bar{\Omega}_{/\!/} = \gamma_0\bar{\Omega}_{/\!/0}$。

上述结论虽然和文献[1]相同，但我们是在考虑到有初始能量扰动的条件下得到的，因而具有更大的适用范围。

然而,当 $D < 0$ 时，线性方程组(7)—(9)有一个零特征根和两个纯虚数特征根。正如前所述,在这样一种情况下李亚普诺夫第一方法是不适用的。因此我们既没有根据认为 $D < 0$ 的区域内螺旋轨道是稳定的,也没有根据说它是不稳定的。下面我们将用李亚普诺夫第二方法来解决该区域内螺旋轨道的稳定性问题。

三、李亚普诺夫函数及高导向场区和低导向场区螺旋轨道的稳定性

李亚普诺夫第二方法的关键是寻找一个适当的李亚普诺夫函数。研究分析表明，以下函数可以作为非线性方程组(4)—(6)的李亚普诺夫函数:

$$V(\xi,\zeta,\eta) = A^2(\xi,\zeta,\eta) + B^2(\xi,\zeta,\eta) + C^2(\xi,\zeta,\eta), \tag{12}$$

式中

$$A(\xi,\zeta,\eta) = \frac{1}{2}\left[\xi^2 + \zeta^2 - \left(\frac{\gamma_p\beta_{/\!/}}{\gamma_0\alpha_0} - 1\right)\eta^2\right] - \frac{\beta_{/\!/}^2}{\alpha_0}\left(\frac{\gamma_p}{\gamma_0} - 1\right)\eta, \tag{13}$$

$$B(\xi,\zeta,\eta) = \frac{1}{2}\eta^2 + \alpha_p\eta - \bar{\Omega}_{\perp 0}\frac{\gamma_0}{\gamma_p}\xi, \tag{14}$$

$$C(\xi,\zeta,\eta) = \frac{\beta_{/\!/}^2}{\alpha_0}\left(\frac{\gamma_p}{\gamma_0} - 1\right). \tag{15}$$

定义

$$DE(\xi,\zeta,\eta) = \frac{\bar{\Omega}_{/\!/0}}{\alpha_0} - \frac{\left(\frac{1}{2}\eta + \alpha_0\right)^2}{\bar{\Omega}_{\perp 0}^2}, \tag{16}$$

利用方程(4)—(6)，得到 $\mathring{V}(\xi,\zeta,\eta)=0$. 因此根据李亚普诺夫第二方法中的稳定性定理[11]，只要李亚普诺夫函数 $V(\xi,\zeta,\eta)$ 是定正的，非线性方程组(4)—(6)的零解就是稳定的. 可以证明(见附录二)，如果 $DF(\xi,\zeta,\eta)<0$，则李亚普诺夫函数 $V(\xi,\zeta,\eta)$ 是定正的. 下面我们就来确定 $DF(\xi,\zeta,\eta)<0$ 成立的条件，从而证明高导向场区和低导向场区螺旋轨道的稳定性.

由(16)式可以看出，如果 $\alpha_0<0$，即 $\bar{\Omega}_{\parallel}>\gamma_0\beta_{\parallel}$，$DF(\xi,\zeta,\eta)<0$ 始终成立. $\bar{\Omega}_{\parallel}>\gamma_0\beta_{\parallel}$ 对应于高导向场区，因此自由电子激光中高导向场区的螺旋轨道始终是稳定的.

可是当 $\alpha_0>0$ 时的情况有所不同. 在这种情况下，$DF(\xi,\zeta,\eta)$ 可以大于零. 但我们可以证明(见附录三)，如果 $DF(0,0,0)=\bar{\Omega}_{\parallel 0}/\alpha_0-(\alpha_0/\bar{\Omega}_{\perp 0})^2<0$，则方程(4)—(6)的零解是稳定的. 从 $\alpha_0>0$ 和 $DF(0,0,0)<0$ 得到

$$\gamma_0\beta_{\parallel}>\bar{\Omega}_{\parallel}+(\bar{\Omega}_{\perp}^2\bar{\Omega}_{\parallel})^{\frac{1}{3}}. \tag{17}$$

这对应于低导向场区，因此低导向场区的螺旋轨道也是稳定的.

四、结　　论

本文用李亚普诺夫稳定性理论成功地解决了理想组合 wiggler 场自由电子激光中电子平衡态螺旋轨道的稳定性问题. 本文的工作与以前工作[1]的不同之处在于：(1) 考虑到了电子初始能量的扰动，因而得到的结论更为一般；(2)给出了高导向场区和低导向场区螺旋轨道稳定性的严格证明，因而完善了自由电子激光电子平衡态轨道的稳定性理论.

应该注意到，我们在证明螺旋轨道稳定性问题的同时，实际上也解决了一类新的非线性微分方程组零解的稳定性问题.

附　　录　　一

下面构造的例子清楚地表明，如果一阶线性扰动方程组具有一个零特征根和两个纯虚数特征根，那么它的已知解可以是稳定的，也可以是不稳定的.

考虑方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+ax^3-y^2z,\\ \dot{y}&=x+ay^3-xy^4z,\\ \dot{z}&=az^3+2xy^5,\end{aligned} \tag{A.1}$$

它的一阶线性扰动方程组是

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y,\\ \dot{y}&=x,\\ \dot{z}&=0,\end{aligned} \tag{A.2}$$

它的三个特征根是 0，$+i$ 和 $-i$. 取 $V(x,y,z)=0.5(x^2+y^2+z^2)$ 作为方程组(A.1)的李亚普诺夫函数，并考虑到 $\dot{V}(x,y,z)=a(x^4+y^4+z^4)$，我们发现，当 $a>0$ 时，(A.1) 式的零解是不稳定的；当 $a=0$ 时，零解是稳定的；当 $a<0$ 时，零解是渐近稳定的.

附　　录　　二

如果 $V(\xi,\zeta,\eta)=0$，则 $A(\xi,\zeta,\eta)=B(\xi,\zeta,\eta)=C(\xi,\zeta,\eta)=0$. 由此我们得到

$$
\begin{aligned}
&\gamma_p - \gamma_0 = 0, \\
&\xi^2 + \zeta^2 - \left(\frac{\gamma_p \beta_{//}}{\gamma_0 \alpha_0} - 1\right)\eta^2 = 0, \\
&\frac{\eta^2}{2} - \alpha_p \eta - \frac{\gamma_0 \bar{\Omega}_{\perp 0} \xi}{\gamma_p} = 0.
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

我们发现，三个方程中只有头两个是独立的，消去ξ得到

$$\zeta^2 = \eta^2 DF(\xi,\zeta,\eta), \tag{A.4}$$

显然，如果 $DF(\xi,\zeta,\eta)<0$，则对于 $V(\xi,\zeta,\eta)=0$ 存在唯一的一组解 $\xi=\zeta=\eta=0$．因此只要 $DF(\xi,\zeta,\eta)<0$，$V(\xi,\zeta,\eta)$ 就是定正的．

附 录 三

实际上，由于 $DF(\xi,\zeta,\eta)$ 是一个连续函数，且 $DF(\xi,\zeta,\eta)<0$，因而存在一个充分小的 h-邻域，只要 $(\xi^2+\zeta^2+\eta^2)^{1/2}\leqslant h$，就有 $DF(\xi,\zeta,\eta)<0$．因此当 $\alpha_0>0$ 且 $DF(0,0,0)<0$ 时，$V(\xi,\zeta,\eta)$ 在以 $(0,0,0)$ 为中心的充分小的邻域内是定正的．根据李亚普诺夫第二方法中的稳定性定理，并考虑到 $\overset{\circ}{V}(\xi,\zeta,\eta)=0$，我们得出结论，方程(4)—(6)的零解是稳定的．

[1] L. Friedland, *Phys. Fluids*, 23(1980), 2376.
[2] L. Friedland and J. L. Hirshfield, *Phys. Rev. Lett.*, 44(1980), 1456.
[3] I. B. Bernstein and L. Friedland, *Phys Rev.*, A23(1985), 2879.
[4] A. Goldring and Friedland, *Phys. Rev.*, A32(1985), 2879.
[5] H. P. Freund, S. Johnston and P. Sprangle, *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-19(1983), 322.
[6] H. P. Freund and A. K. Ganguly, *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-21(1985), 1073.
[7] Changbiao Wang, *Appl. Phys. Lett.*, 57(1990), 837.
[8] 蔡燧林、盛骤，常微分方程组与稳定性理论，高等教育出版社，(1986)，第114页．
[9] B. E. Newnam, R. W. Warren, R. L. Sheffield, W. E. Stein, M. T. Lynch, J. S. Fraser, J. C. Goldstein, J. E. Sollid, T. A. Swann, J. M. Watson and C. A. Bran, *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-21 (1985), 867.
[10] J. Fajans, D. A. Kirkpartrick and G. Bekefi, *Phys. Rev.*, A32(1985), 3448.
[11] 见文献[8]，第119页．

PROBLEM OF STABILITY OF THE EQUILIBRIUM HELICAL ORBIT IN FREE-ELECTRON LASERS

WANG CHANG-BIAO

Institute of High Energy Electronics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054

(Received 25 June 1991)

ABSTRACT

The problem of stability of the equilibrium helical orbit in free-electron lasers with a combined ideal helical wiggler and uniform axial guide field is successfully solved by means of the Lyapunov's stability theory of motion. The unstable region is determined with perturbation of initial energy taken into account by Lyipunov's first method. An appropriate Lyapuov's function is constructed; accordingly, the low and high guide field stable regions are shown rigorously.

PACC: 4255T; 4260