

环形 Josephson 结中的回波效应与 第一零场台阶的下限偏置电流*

王强华 王 炜 姚希贤

南京大学物理系,非线性物理中心,南京,210008

1991年1月28日收到

本文用微扰理论下环形 Josephson 结中圆对称孤子点粒子模型所得的结果,首先分析了环形结中各种耗散情形下的孤子回波效应,部分结果与数值模拟计算结果进行了比较;然后讨论了孤子为避免回波效应而共振地在结中往返传播,环形结必须具备的最小偏置电流。分析表明,这种最小偏置电流与结的内、外半径和结中的耗散情形有关。给出了一些理论计算结果,并对此进行了讨论。

PACC: 7450;0340K

一、引 言

Josephson 结作为一个特殊的非线性物理系统,目前正受到广泛的重视。这不仅因为它是研究混沌等非线性现象的典型系统^[1],而且因为它具有广泛的应用前景。如在微电子应用方面,用它制作各种器件,测量微弱电流、电压、磁场、电阻,测量微波功率和频率,用以作电压基准,作信号传输线等等^[2,4]。旋转对称的 sine-Gordon 方程描述下的孤子用来作为基本粒子的模型之一^[3]。

一维长 Josephson 结已有许多理论和实验的研究(参阅文献[4])。二维和三维情形,也有不少研究,如 Maslov 讨论了二维、三维旋转对称 Josephson 结的动力学^[5], Christiansen 讨论了圆形 Josephson 结实际应用的一个模型^[6]等。

一维长 Josephson 结虽然具有诸如磁通量子化、电流电压台阶等特殊的电磁性质,但输出功率较小,必须以适当数目的 Josephson 结耦合才可能提高输出功率。而环形结预料可以弥补以上缺憾,因为大面积环形结相当于多个一维 in-line 结的密切耦合^[7]。

我们已分析了环形结的静态特性^[8]、动态特性,计算了环形结中圆对称孤子解^[9]、旋转周期解^[10]和单孤子的回波效应^[11],用微扰方法得到了单孤子在环形结中的动力学方程等^[12]。本文由此进一步讨论各种耗散下的回波效应,以及对于有限宽度的环形结,为避免回波效应,使孤子共振地在结中往返传播,环形结所必需的最小偏置电流 $I_{B(min)}$,从而就得到了孤子共振往返传播所对应的第一零场台阶的下限偏置电流 $I_{B(min)}$ 与结的内外半径 R_i, R_o 和耗散系数 α 的关系。我们认为,这对环形结的实际应用具有重要意义。

* 国家自然科学基金资助的课题。

二、点粒子模型下环形结中的孤子动力学的简单描述

文献 [12] 中仔细论述了环形结中的孤子动力学行为, 其主要内容为采用约化单位^[13], 环形结中圆对称自场方程为^[12]

$$\phi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \phi_{\rho} - \phi_{tt} = \sin \phi + \alpha \phi_t, \quad (1)$$

式中 ρ 为结中各处到圆心的距离, α 为耗散系数. 设结中存在单孤子解:

$$\phi = 4 \tan^{-1} \exp \frac{\sigma(\rho - R)}{\sqrt{1 - u^2}},$$

式中 $\sigma = \pm 1$ 标明孤子的极性, R 为孤子中心位置, u 为其速度, 并且

$$u = dR/dt.$$

如果 $u = u(t)$ 为时间的缓慢函数, 文献 [12] 中用微扰方法得到了孤子在结中的动力学方程

$$du/dt = -\frac{1}{R} (1 - u^2) - \alpha u (1 - u^2) \quad (2)$$

和能量表达式

$$E = 16\pi R / \sqrt{1 - u^2}, \quad (3)$$

E 为孤子的能量.

(1) 式的边界条件为

$$\phi_{\rho}(\rho = R_i) = I_H / 2\pi R_i,$$

$$\phi_{\rho}(\rho = R_e) = (I_H + I_B) / 2\pi R_e.$$

式中 R_i, R_e 分别为结的内外半径, I_H, I_B 分别为圆结中心引线上的电流 I_H 和结偏置电流. I_H 独立于环形结中, 用以给环形结加对称外磁场. 由此, 文献 [12] 中得到孤子碰撞到边界后变为反孤子这一瞬间过程引起的能量变化为

$$\Delta E = \begin{cases} \Delta E_i = -(\pm 4\pi I_H), & R = R_i, \\ \Delta E_e = \pm 4\pi(I_H + I_B), & R = R_e, \end{cases} \quad (4)$$

$$\quad (5)$$

$\Delta E_i, \Delta E_e$ 分别为孤子在内边界 R_i 和外边界 R_e 处的能量变化. 其中“ $\pm$ ”号由下式决定:

$$C = -u\sigma / |u\sigma|.$$

注意到微扰处理下 $\phi_t = \frac{-2u\sigma}{\sqrt{1 - u^2}} \operatorname{sech} \frac{\sigma(\rho - R)}{\sqrt{1 - u^2}}$, 所以 C 即反映了 ϕ_t (电压) 的正负.

孤子与边界碰撞前后, u, σ 都变号, 故 C 不变号; 孤子若在结中回波, 由于 σ 不变号而 u 变号, 则 C 将变号. 因此, 对于在结中往返传播的孤子, 电压保持为正(或负), 有一非零的直流平均电压.

把 (4), (5) 式改写为

$$\Delta E_i = -C 4\pi I_H, \quad (6)$$

$$\Delta E_e = C 4\pi(I_H + I_B), \quad (7)$$

则可见在有耗散情形和零外场 ($I_H = 0$) 下, 孤子如能在结中往返传播, 必须由外边界提供能量以平衡其一周运动耗散掉的能量, 从而要求 $\Delta E_0 > 0$, 即 $CI_B > 0$, 表示电压和偏置电流必须同号 (C 代表电压的正负), 这正是总能量守恒的要求。

下面为简便起见, 除非特别说明, 不区分孤子和反孤子。

三、回波效应的分析

为分析回波效应, 令 R_0 足够大, 保证回波的发生。因此孤子只可能与内边界 R_i 碰撞, 且 $\Delta E_i = -C4\pi I_H$ 。

1. 无耗散环形结中的孤子回波效应

$\alpha = 0$, 故由 (2) 式得

$$du/dt = -\frac{1}{R}(1-u^2),$$

$$dR/dt = u,$$

从而有

$$R/R_0 = \sqrt{\frac{1-u^2}{1-u_0^2}}, \quad (8)$$

式中 R_0, u_0 为初始时刻 t_0 的孤子中心位置及其速度。(8) 式结合 (3) 式可知

$$E(t) = E(t_0) = 16\pi R_0 / \sqrt{1-u_0^2},$$

即 $\alpha = 0$ 时, 孤子在结中运动的能量不变。

根据上述方程, 先讨论一个特殊情形, 即 $t = t_0$ 时 $R_0 = R_i$, $u = u_0 > 0$, 可以计算出孤子能达到的最大位置 $R_{\max}$

$$R_{\max} = R_i / \sqrt{1-u_0^2}.$$

当 $R = R_{\max}$ 时, $u = 0$, 令此时刻为 $t_0 + t_{\text{ret}}$, 结合 (8) 式可以求得 t_{ret} 为

$$\begin{aligned} t_{\text{ret}} &= \int_{R_i}^{R_{\max}} \frac{dR}{u} \\ &= \frac{R_i}{\sqrt{1-u_0^2}} \arcsin u_0. \end{aligned} \quad (9)$$

注意到 $E(t) = E(t_0) = E$, 定义 $E_0 = 16\pi R_i$, 则上式可改写为

$$t_{\text{ret}} = \frac{E}{16\pi} \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}.$$

当 $t > t_0 + t_{\text{ret}}$ 时, 孤子开始返回向内运动, 即发生第一次回波。

图 1 给出 (9) 式中 $t_{\text{ret}} - u_0$ 的关系, 以实线表示。作为比较, 引用文献 [11] 中的数值模拟计算的结果, 在图中以点表示。两者符合得很好。我们认为, 这正是由于点粒子模型中以能量角度考察孤子动力学性质抓住了问题的关键。

孤子发生了第一次回波后, 再与内边界碰撞, 变成反孤子, 接着可能发生第二次回波、

第三次回波等。

2. 有耗散的环形结中的孤子回波效应

这里 $\alpha > 0$, 方程 (2) 不能严格求解。本节中限于讨论 $I_H = 0$, 即零外场情形。这时 $\Delta E_i = 0$ 。孤子在整个过程中不断耗损其能量。由于耗散的存在可以抑制方程 (1) 中 $1/\rho$ 项对孤子解的扰动, 我们可以用孤子模型来描述这一情形下相当长一段时间内孤子的回波过程。

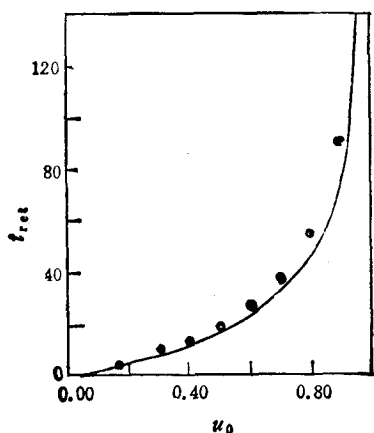


图1 孤子从 R_i 运动到 R_{max} 所经历的时间 t_{ret} 与其初始速度 u_0 的关系 实线为理论曲线; 点为实际数值模拟计算的结果; $R_i = 30$

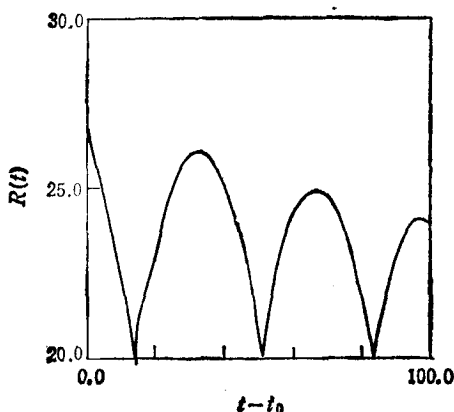


图2 回波效应过程中孤子中心位置与时间的关系 结参数 $\alpha = 0.01$; $R_i = 20$; $R_e = 30$; t_i 为时间参考零点; $I_B = 0$

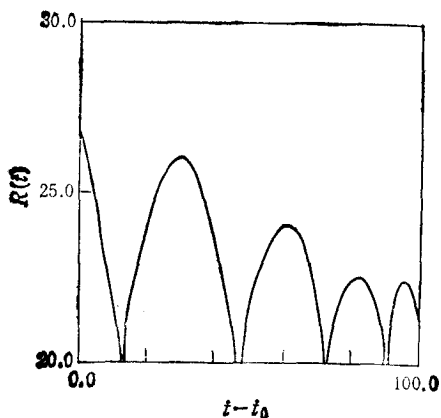


图3 与图2对应的数值模拟计算结果

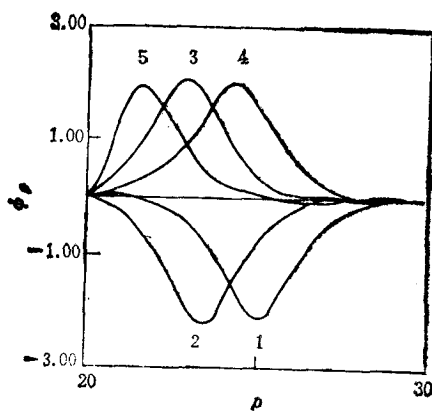


图4 在图3情形中一段时间内的不同时刻 $\phi_{\rho}-\rho$ (孤子图象) 关系 每一曲线相隔 $\Delta t = 10(W_T^{-1})$ 时间; 1, 2, ..., 5 标明时间先后顺序; 曲线1和4对应回波的瞬间

图2为理论情形下孤子中心位置 R 与时间 t 的关系, 图3为对应的数值计算的结果。二者在相当长时间内一致, 并可见孤子能达到的极大位置 R_{max} 在不断减小。注意到 $R = R_{max}$ 时, $u = 0$, 由 (3) 式知 $E = 16\pi R_{max}$, 因此 R_{max} 的减小意味着孤子能量在减小, 这正是由于结中存在耗散的缘故。图4为数值模拟计算得到的某一次回波前后一段时间

内不同时刻的孤子图象。由此可见,孤子回波过程前后 ϕ_p 不变号,即孤子极性 σ 不变;孤子与边界的碰撞过程前后, ϕ_p, σ 则改变。这正是上述两种过程的不同之处。由 $C = -\omega\tau/|\omega\sigma|$ 知孤子每经一次回波, C 改变一次符号,根据引言中的讨论,对应于 ϕ_i 也变号。因此,只要孤子发生回波,则整个过程中环形结的平均直流电压便为零。

因此,有限结宽的环形结只有避免了回波效应,使孤子在结中共振地往返传播,才对应于 I - V 特性中第一零场台阶的有限电压态。

从本节的结果来看,微扰理论的结果与数值计算的结果在初始后的一段时间符合甚好,那么可以推知,对稳定往返传播的孤子,每周都相当于有一个初始时刻,在这种情况下,微扰处理的结果将与数值计算结果长时间保持一致,因此,微扰理论对于往返传播的孤子的处理,比对回波的处理将更为准确。这就是下面讨论的前提。

四、有限结宽的环形结回波效应的避免和第一零场台阶

现在考虑零外场 $I_H = 0$ 的环形结。

实际的环形结不可避免地存在有耗散,因此必须由偏置电流 I_B 为孤子提供能量,平衡掉孤子在结中运动一周(往返一次)所耗散的能量,才能使孤子稳定地在结中往返传播,对应的 I_B - V 特性即所谓第一零场台阶。文献[14]用数值计算 sine-Gordon 方程的方法得到了一些不同几何尺寸的环形结的第一零场台阶,均表明不同的结参数具有不同的下限偏置电流 $I_{B(\min)}$ 及其对应的最小有限直流电压 $V_{\min}$ 。这一现象可以由有限结中存在回波效应来解释。当 $I_B < I_{B(\min)}$,孤子经若干次往返,耗散掉的能量大于从外边界吸收的能量,直到某一时刻孤子再也达不到外边界,开始回波。由于回波过程中电压随孤子每经一次回波而改变符号,故在 IV 特性曲线上表现的直流平均电压为零。

考虑孤子从外边界 R_e 开始运动,碰到内边界 R_i 后变为反孤子并返回向外,回到外边界,用 $\begin{pmatrix} u \\ R \end{pmatrix}$ 代表孤子的速度和位置,这一过程可以简记为

$$\begin{pmatrix} -u_e \\ R_e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -u_i \\ R_i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_i \\ R_i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u'_e \\ R_e \end{pmatrix}, \quad (10)$$

式中 $u_e > 0$, $u_i > 0$, $u'_e \geq 0$,为往返一次必须满足的条件。(10) 式中已用到 $\Delta E_i = 0$,所以孤子与内边界碰撞前后速度仅是改变方向。这一往返过程耗散的能量为

$$\Delta E = 16\pi R_e \left(\frac{1}{\sqrt{1-u_e^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(u'_e)^2}} \right). \quad (11)$$

回到边界 R_e 后,将吸收能量

$$\Delta E_e = 4\pi I_B. \quad (12)$$

结合(2),(3),(12)式,可以求出使得 ΔE , ΔE_e 正好平衡时的 u_e, u'_e 。此后过程(10)式将不断重复,对应于孤子的周期性传播。如果初始几周过程中 ΔE 和 ΔE_e 不平衡,在一定范围内孤子速度将被调整,使得最终 $\Delta E, \Delta E_e$ 平衡。但是,当 ΔE_e 过小(即 I_B 过小)时, $\Delta E, \Delta E_e$ 一直不能达到平衡,且 $\Delta E > \Delta E_e$, 这样孤子经若干次往返后,由于能量 $E < 16\pi R_e$ 而达不到外边界 R_e ,并开始回波。因此决定孤子最终是往返传播还是

回波的临界过程为过程 (10) 式中 $u'_c = 0$ 的情形, 记为

$$\begin{pmatrix} -u_{e(\min)} \\ R_e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -u_{i(\min)} \\ R_i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_{i(\min)} \\ R_i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ R_e \end{pmatrix}. \quad (13)$$

这一过程对应的孤子往返传播必须的偏置电流就是零场台阶的下限偏置电流 $I_{B(\min)}$, 结合 (11), (12) 式, 并令 $u_c = 0$, $\Delta E = \Delta E_c$, 有

$$I_{B(\min)} = 4R_e / \sqrt{1 - u_{e(\min)}^2}.$$

式中 $u_{e(\min)}$ 需结合 (2), (13) 式求出, 可见 $I_{B(\min)}$ 为 α, R_e, R_i 的函数. 虽然 $I_{B(\min)}$ 的分析表达式不能给出, 但用上述方法可以计算各种参数 α, R_i, R_e 条件下的环形结的下限偏置电流. 定性地说, $I_{B(\min)}$ 为 $\alpha, R_i, (R_e - R_i)$ 的增函数.

五、结果与讨论

我们用上面介绍的方法计算了不同参数的环形结的下限偏置电流 $I_{B(\min)}$, 为方便起见, 用平均偏置电流密度

$$\gamma_B = I_{B(\min)} / \pi(R_e^2 - R_i^2)$$

代表 $I_{B(\min)}$.

图 5(a) 给出 $R_i = 20, R_e = 30$ 的环形结 γ_B 和对应的直流平均电压 $V_{\min}$ 与耗散 α 的关系. γ_B 为 α 的增函数. 与一维 in-line 结显著不同之处在于 γ_B 并不对应于 $V_{\min} = 0$, 而是 $V_{\min} \sim 0.3$. 对不同尺寸的结, 也发现 $V_{\min} \neq 0$. 因此, 环形结的 IV 特性中, V 为非连续地从零跳到有限电压的第一零场台阶.

图 5(b) 给出与图 5(a) 对应的情形下, 孤子在过程 (13) 式中 $u_{e(\min)}, u_{i(\min)}$ 与 α 的关系. 可见孤子在此过程中, 速度不会长时间保持很小数值. 原因是 (2) 式中 $1/R$ 项的贡献犹如对孤子始终施加了一个“吸引力”, 孤子必须以足够大的速度运动方能克服这一“吸引力”, 回到外边界. 其周期为一确定值 $T_{\max}$. 因此对一般的往返过程 (10) 式,

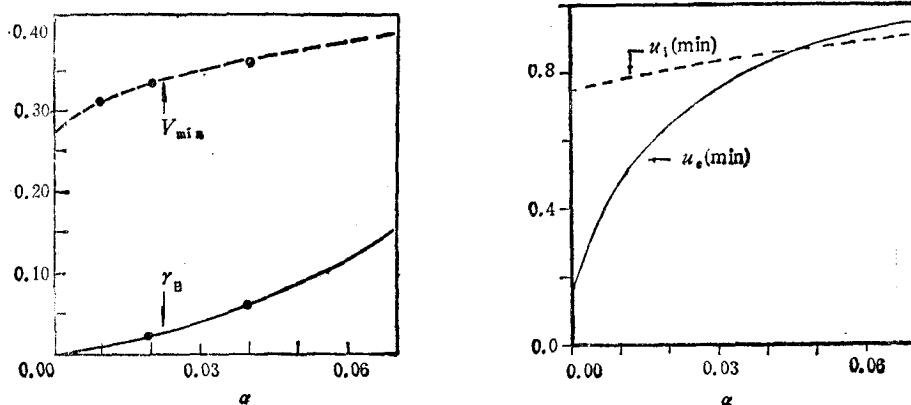


图 5

(a) $R_i = 20, R_e = 30$ 的环形结第一零场台阶的下限偏置电流密度 γ_B 和对应的直流平均电压 $V_{\min}$ 与耗散 α 的关系. 实线为 γ_B ; 虚线为 $V_{\min}$; 点为数值计算的相应结果

(b) 图 (a) 情形下, 孤子从 $R_e \rightarrow R_i$ 的起始速率 $u_{e(\min)}$ 和从 $R_i \rightarrow R_e$ 的起始速率 $u_{i(\min)}$ 与 α 的关系. 实线为 $u_{e(\min)}$; 虚线为 $u_{i(\min)}$

其周期 T 满足 $T \leq T_{\max}$, 对应的平均电压 $V = 4\pi/T \geq 4\pi/T_{\max} = V_{\min}$. 这就解释了图 5(a) 中 $V_{\min} \approx 0$ 的现象.

另一方面, 在 in-line 结中, 微扰理论得出的孤子动力学方程为 $du/dt = -\alpha u(1-u^2)^{1/2}$, 由此可知孤子在结中往返运动的周期最大值 $T_{\max} \rightarrow \infty$, 从而有 $V_{\min} = 0$, 因此, in-line 结的 I - V 特性曲线中, 区别于环形结, V 是从零连续地过渡到第一零场台阶的.

图 5(a) 中给出几个数值计算结果, 以点表示, 与理论曲线符合甚好.

需要强调的是, 我们的微扰处理^[12]中前提假设是孤子在耗散和偏置作用下仍能保持孤子的性质, 因此, 理论上可以计算更大耗散下环形结的下限偏置. 但是, 实际情形中, 当 α 或 I_B 过大, 孤子受的扰动过大, 不能稳定存在. 因此, 以上的理论分析的适用性是有限制的. 对图 5(a) 情形的环形结, $\alpha > 0.08$ 后, 数值计算表明其中要么是零电压态, 要么是旋转态, 单孤子态不稳定, 仅存在于暂态过程之中, 为此, 这里对 $\alpha > 0.08$ 情形的理论结果没有表出.

用第四节中介绍的方法还可以求出 r_B 与 $R_i, W(=R_c - R_i)$ 等的关系. 结果均表明 $V_{\min} \approx 0$. 具体结果不再赘述.

最后必须指出, 我们用的孤子点粒子模型的适用性条件为 $R_i \geq R_{\min}$, $W = R_c - R_i \geq R_{\min}$, 当 $R_{\min} \geq 5$ 时适用性很好^[12].

六、总 结

本文用微扰理论得出的环形 Josephson 结中单孤子动力学方程, 讨论了环形结中的回波效应; 分析了有限环形结的第一零场台阶的下限偏置电流与回波效应的关系, 和与结参数 α, R_i, R_c 的关系, 对结果进行了简单讨论, 并比较了环形结与 in-line 结的第一零场台阶, 就其不同之处进行了理论上的解释.

- [1] M. Octavio, *Physica*, **163A** (1990), 248.
- [2] T. A. Fulton, R. C. Dynes and P. W. Anderson, *Proc. IEEE*, **61** (1973), 28.
- [3] R. K. Bullough, *Interaction of radiation with Condensed Matter*, Vol. 1, Vienna: International Atomic Energy Agency, (1972).
- [4] A. Barone and G. Paterno, *Physics and Applications of the Josephson effect*, Wiley, New York, (1982).
- [5] E. M. Maslov, *Physica*, **15D** (1985), 433.
- [6] P. L. Christiansen *et al.*, *Appl. Phys. Lett.*, **39** (1981), 170.
- [7] Wei Wang, A. L. Thomson, Xixian Yao, *Phys. Rev.*, **43E** (1991), in the press.
- [8] Wei Wang, Xixian Yao, *J. Low Temp. Phys.*, **71** (1988), 453.
- [9] 徐昆明、姚希贤, *低温物理学报*, **9**(1987), 25.
- [10] Wei Wang, A. L. Thomson, Xixian Yao, *Phys. Rev.*, **43B** (1991), in the press.
- [11] Wei Wang, Xixian Yao, *J. Phys.*, **22A** (1989), 2447.
- [12] 王强华、王焯、姚希贤, *物理学报*, 待发表.
- [13] A. C. Scott *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **47** (1976), 3272.
- [14] 徐昆明等, *低温物理学报*, **11**(1989), 187.
- [15] D. W. McLaughlin, A. C. Scott, *Phys. Rev.*, **18A** (1978), 1652.

RETURNING EFFECT AND THE FIRST ZERO FIELD STEP IN AN ANNULAR JOSEPHSON JUNCTION

WANG QIANG-HUA WANG WEI YAO XI-XIAN

Department of Physics, Center of Nonlinear Dynamical System, Nanjing University, Nanjing, 210008

(Received 28 January 1991)

ABSTRACT

The returning effect of soliton in an annular Josephson junction is analysed in detail theoretically. Some results are compared with directly numerical simulation ones. To avoid the return effect of soliton, the conditions which relate to the minimum bias current of the first zero step of annular junctions with different geometric and dissipative parameters are discussed. A discussion of the difference between in-line and annular junction is also made.

PACC: 7450; 0340K