第41卷 第8期
1992年8月

物理学报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 41, No. 8
Aug., 1992

Whitham–Broer–Kaup浅水波方程的对称性约化*

阮航宇 楼森岳
宁波师范学院现代物理研究室，宁波 315211

1991年8月2日收到

本文利用群论方法和直接法给出 Whitham-Broer-Kaup 浅水波方程的5种类型的对称性约化。群论方法得到的 Painlevé II 型约化仅仅是直接法约化的一种特殊情况。在直接法的约化结果中包含有关于时间变量 t 的3种类型的奇点：极点，代数支点和对数支点。

PACC： 0220；0290；0340K

一、引言

为了描述浅水中的表面色散波，人们得到一些著名的完全可积模型，如 KdV 方程、Boussinesq 方程，KP 方程，Whitham-Broer-Kaup 方程(缩写为 WBK 方程)[1-3]等等．其中 WBK 方程

$$u_t+uu_x+h_x+Cu_{xx}=0, \tag{1}$$

$$h_t+hu_x+h_xu+\sigma u_{xxx}-Ch_{xx}=0, \tag{2}$$

被 Broer[2] 称之为“最古老，最简单并且最为人们所熟悉的方程……”．而且这个系统具有最丰富的可积性质[4]．(1)，(2)式中 $u=u(x,t)$ 为水平速度场，$h=h(x,t)$ 为偏离液面平衡位置的高度，σ,C 为表征不同色散程度的常数．当 σ,C 为零时，方程(1)，(2)正是描述浅水的无色散的经典长波方程． WBK 方程的孤子解等一系列有趣的物理和数学性质已被许多物理学家和数学家广泛研究[1-4]．本文将从完全不同的另一角度出发，给出 WBK 方程的另一类有趣解：所有的相似解． 通常人们给出相似解的方法总是采用群论的方法，然而这种方法需要进行大量繁复的代数运算且不能得到所有的相似解．最近 Clarkson 和 Kruskal 等发展了一种简单而有效的对称性约化的直接方法[5]．将此直接方法运用于1＋1维 Boussinesq 方程，可得到该方程的所有 $u=U(x,t,w(z(x,t)))$ 形式的对称性约化[5]，而群论方法的结果只是直接法的一些特例．文献[6]把该方法推广应用到2＋1维情况——KP 方程，并得到该方程的所有对称性约化． 本文将把这种方法推广应用于微分方程组的情况——WBK 方程．为与传统的李群方法相比较，首先用传统的李群方法来约化 WBK 方程． 结果发现用李群法约化所得的方程为 Painlevé II 型的．用直接法约化了 WBK 方程，结果得到5种类型的约化．李群法的结果仅仅是

* 国家自然科学基金资助的课题．

直接法的第一种特殊情况。直接法的第二种约化方程为 Bureau 方程[7]的特例。直接法的第三、四、五种约化结果为一些简单的 Riccati 方程和线性方程。并且可用简单的明显函数积分。在 WBK 方程的某些约化或解中,允许存在关于时间变量 t 的极点、代数支点和对数支点。

二、群论方法约化

为了使用群论的标准方法[8],将 WBK 方程写作

$$F_1(u,h,h_x,\cdots)\equiv u_t+uu_x+h_x+Cu_{xx}=0, \tag{3}$$

$$F_2(u,h,h_x,\cdots)\equiv h_t+hu_x+h_xu+\sigma u_{xxx}-Ch_{xx}=0. \tag{4}$$

更进一步设

$$u=u_0(x,t),h=h_0(x,t)$$

为 WBK 方程的一个解。如果 WBK 方程是在无穷小变换(ε 为无穷小参数)

$$x=x+\varepsilon X(x,t,u,h), \tag{5}$$

$$t=t+\varepsilon T(x,t,u,h), \tag{6}$$

$$u=u+\varepsilon U(x,t,u,h), \tag{7}$$

$$h=h+\varepsilon H(x,t,u,h) \tag{8}$$

下不变的,则

$$VF_1\Big|_{\substack{u=u_0(x,t)\\h=h_0(x,t)}}=0,\ VF_2\Big|_{\substack{u=u_0(x,t)\\h=h_0(x,t)}}=0, \tag{9}$$

其中

$$V=X\frac{\partial}{\partial x}+T\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial u}+H\frac{\partial}{\partial h}+\{U_t\}\frac{\partial}{\partial u_t}+\{H_t\}\frac{\partial}{\partial h_t}+\{U_x\}\frac{\partial}{\partial u_x}$$
$$+\{H_x\}\frac{\partial}{\partial h_x}+\{U_{xx}\}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+\{H_{xx}\}\frac{\partial}{\partial h_{xx}}+\{U_{xxx}\}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}},$$

V 的表达式中 $\{U_t\},\{H_t\},\{U_x\},\{H_x\},\{U_{xx}\},\{H_{xx}\}$ 和 $\{U_{xxx}\}$ 是与变换(5)—(8)式相应的导数 $u_t,h_t,u_x,h_x,h_{xx},u_{xx},u_{xxx}$ 的无穷小变换,根据导数项导数的阶数可分别称作第一、第二和第三级扩张(extensions)。这些扩张可利用(5)—(8)式得到,如

$$\{U_t\}=[U_t+U_hh_t+U_uu_t-u_x(X_t+X_uu_t+X_hh_t)$$
$$-u_t(T_t+T_hh_t+T_uu_t)]_{\substack{u=u_0(x,t)\\h=h_0(x,t)}},$$

$$\begin{aligned}\{U_{xx}\}=[&U_{xx}+2U_{hx}h_x+U_hh_{xx}+2U_{ux}u_x+U_uu_{xx}\\&+U_{hh}h_x^2+2U_{hu}u_xh_x+U_{uu}u_x^2-2u_{xx}(X_x+X_hh_x+X_uu_x)\\&-2u_{tx}(T_x+T_hh_x+T_xu_x)-u_x(X_{xx}+2X_{hx}h_x\\&+X_hh_{xx}+2X_{ux}u_x+X_uu_{xx})-h_xu_x(X_{hh}h_x+2X_{hu}u_x)\\&-u_t(T_{xx}+2T_{hx}h_x+T_hh_{xx}+2T_{ux}u_x+T_uu_{xx})\\&-u_th_x(T_{hh}h_x+2T_{hu}u_x)\\&-u_x^3X_{uu}-u_tu_x^2T_{uu}]_{\substack{u=u_0(x,t)\\h=h_0(x,t)}}.\end{aligned}$$

将 V 的表达式代入(9)式，有

$$VF_1 = \{U_t\} + u_{0x}U + \{U_x\}u_0 + \{H_x\} + C\{U_{xx}\} = 0, \tag{10}$$

$$VF_2 = \{H_t\} + Hu_{0x} + h_0\{U_x\} + u_0\{H_x\} + Uh_{0x} + \sigma\{U_{xxx}\} - C\{H_{xx}\} = 0. \tag{11}$$

将所有的"扩张"代入(10),(11)式后，可以知道(10),(11) 式仅是 u_0, h_0 及其导数的代数方程，由于这些变量是线性无关的，要求它们与 X, T, U, H 有关的系数必须分别为零。由此导致唯一的解

$$X = at + b, U = a, T = d_1, H = 0,$$

其中 a, b, d_1 为任意常数。从 Lagrange 条件

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{T} = \frac{du}{U} = \frac{dh}{H},$$

即可得

$$d_1 dx = (at + b)dt, \tag{12}$$

$$a dt = d_1 du, \tag{13}$$

$$a dx = (at + b)du, \tag{14}$$

$$h = \text{常数}. \tag{15}$$

由(12)—(15)式积分，立即得到变换不变量 ξ 和变换不变函数 $W(\xi), Q(\xi)$ 为

$$\xi = (at + b)^2/d_1^2 - 2ax/d_1, \tag{16}$$

$$w(\xi) = u - (at + b)/d_1, \tag{17}$$

$$Q(\xi) = h. \tag{18}$$

将变量 (u, h, x, t) 变换成 $(w(\xi), Q(\xi), \xi)$，WBK 方程即被约化成常微分方程组

$$-\frac{2ac}{d^1} w'' + ww' + Q' = \frac{1}{2}, \tag{19}$$

$$\frac{4\sigma a^2}{d_1^2} w''' + \frac{2ac}{d_1} Q'' + Qw' + wQ' = 0, \tag{20}$$

其中"′"表示对 ξ 的导数。将(19),(20)式消去 Q 并作变换

$$w = \frac{d_1}{4\sqrt{2}\, a(\sigma + c^2)^{1/2}} w_1(\xi_1), \quad \xi = -\frac{d_1^2}{16a^2(\sigma + c^2)} \xi_1 - 2f_2 \tag{21}$$

后，w_1 方程正是 Painlevé II 型方程

$$w_1'' = w_1^3 + 2\xi_1 w_1 + \mu, \tag{22}$$

其中 μ 为任意常数。

三、直接法约化

类似于文献[5,6]的方法，对于 WBK 方程，寻求下述形式的约化：

$$u = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z), z = z(x,t), \tag{23}$$

$$h = A(x,t) + B(x,t)Q(z), \tag{24}$$

其中 α, β, A, B, z 分别为待定的 (x,t) 的函数，w 和 Q 为满足某一常微分方程组的 z 的函数，并且不难证明对于 WBK 方程，也只要取特殊的约化形式(23),(24)式即可包含更

一般的约化形式(证明见附录 A)

$$u=U(x,t,w(z)),z=z(x,t), \tag{25}$$

$$h=H(x,t,Q(z)). \tag{26}$$

将(23),(24)式代入 WBK 方程得到

$$\begin{aligned}C\beta z_x^2w''&+(\beta z_t+\alpha\beta z_x+2C\beta_xz_x+C\beta z_{xx})w'+(\beta_t+\alpha\beta_x+\beta\alpha_x\\&+C\beta_{xx})w+\beta\beta_xw^2+\beta^2z_xww'+Bz_xQ'+B_xQ+\alpha_t\\&+\alpha\alpha_x+A_x+C\alpha_{xx}=0,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\sigma\beta z_x^3w'''&+(3\sigma\beta_xz_x^2+3\sigma\beta z_xz_{xx})w''+(A\beta z_x+3\sigma\beta_{xx}z_x+3\sigma\beta_xz_{xx}\\&+\sigma\beta z_{xxx})w'+(A\beta_x+\beta A_x+\sigma\beta_{xxx})w-CBz_x^2Q''+(Bz_t\\&+\alpha Bz_x-2CB_xz_x-CBz_{xx})Q'+(B_t+B\alpha_x+\alpha B_x\\&-CB_{xx})Q+(B\beta)_xQw+B\beta z_x(Qw)'+[A_t\\&+(A\alpha+\sigma\alpha_{xx}-CA_x)_x]=0.\end{aligned} \tag{28}$$

(27)和(28)式仅是 w,Q 关于 z 的常微分方程要求 w,Q 及其导数的各项系数的比仅是 z 的函数,即对于 $z_x\neq 0$ 的情况,下述限制方程必须满足:

$$\beta z_t+\alpha\beta z_x+2C\beta_xz_x+C\beta z_{xx}=\beta z_x^2\Gamma_1(z), \tag{29}$$

$$\beta_t+(\alpha\beta)_x+C\beta_{xx}=\beta z_x^2\Gamma_2(z), \tag{30}$$

$$\beta\beta_x=\beta z_x^2\Gamma_3(z), \tag{31}$$

$$\beta^2z_x=\beta z_x^2\Gamma_4(z), \tag{32}$$

$$Bz_x=\beta z_x^2\Gamma_5(z), \tag{33}$$

$$B_x=\beta z_x^2\Gamma_6(z), \tag{34}$$

$$\alpha_t+\alpha\alpha_x+A_x+C\alpha_{xx}=\beta z_x^2\Gamma_7(z), \tag{35}$$

$$3\sigma\beta_xz_x^2+3\sigma\beta z_xz_{xx}=\beta z_x^3\Gamma_8(z), \tag{36}$$

$$A\beta z_x+3\sigma\beta_{xx}z_x+3\sigma\beta_xz_{xx}+\sigma\beta z_{xxx}=\beta z_x^3\Gamma_9(z), \tag{37}$$

$$A\beta_x+\beta A_x+\sigma\beta_{xxx}=\beta z_x^3\Gamma_{10}(z), \tag{38}$$

$$-CBz_x^2=\beta z_x^3\Gamma_{11}(z), \tag{39}$$

$$Bz_t+\alpha Bz_x-2CB_xz_x-CBz_{xx}=\beta z_x^3\Gamma_{12}(z), \tag{40}$$

$$B_t+(B\alpha)_x-CB_{xx}=\beta z_x^3\Gamma_{13}(z), \tag{41}$$

$$(B\beta)_x=\beta z_x^3\Gamma_{14}(z), \tag{42}$$

$$B\beta z_x=\beta z_x^3\Gamma_{15}(z), \tag{43}$$

$$A_t+(A\alpha)_x+\sigma\alpha_{xxx}-CA_{xx}=\beta z_x^3\Gamma_{16}(z), \tag{44}$$

其中 $\Gamma_i(z)(i=1,2,\cdots,16)$ 为 z 的待定函数.

类似于文献[5,6],为了求解方程(29)—(44)式,决定 α,β,A,B,w,Q,z, 注意到在写下约化形式(23),(24)式时存在一些自由度,为了固定这些自由度,可采用如下一些规则:

规则 1: 若 $\alpha(x,t)=\alpha_0(x,t)+\beta(x,t)\Omega(z)$, 则可取 Ω 为 $\Omega=0$ (可作变换 $w\to w-\Omega$).

规则 2: 若 $A(x,t)=A_0(x,t)+B(x,t)\Omega(z)$, 则可简单地取 $\Omega=0$ (作变换 $Q\to Q-\Omega$).

规则 3：若 $\beta(x,t)=\beta_0(x,t)\Omega(z)$，则可取 $\Omega=\Omega_0=$ 常数(作变换 $w\to w\Omega_0/\Omega$)。

规则 4：若 $B(x,t)=B_0(x,t)\Omega(z)$，则可取 $\Omega=\Omega_0=$ 常数(作变换 $Q\to Q\Omega_0/\Omega$)。

规则 5：若 $z(x,t)$ 由 $\Omega(z)=z_0(x,t)$ 决定，其中 $\Omega(z)$ 为任意可逆函数，则可取 $\Omega(z)=z$ (作变换 $z\to\Omega^{-1}(z)$)。

必须强调的是每个规则只能使用一次，即每一个自由度将由于使用相应的规则而被固定。过多地使用规则将失去一般性。

利用规则 1—5，不难求得(29)—(44)式的唯一独立解为(详见附录 B)

$$u=-\frac{1}{\theta}(\theta_t x+\lambda_t)+\theta w(z), \tag{45}$$

$$h=\theta^2 Q(z),\ z=\theta x+\lambda, \tag{46}$$

$$\theta_t=D_0\theta^3, \tag{47}$$

$$\lambda_{tt}=D_0^2\theta^4\lambda+2D_0\theta^2\lambda_t-C_1\theta^4, \tag{48}$$

$$Cw''+ww'+Q'-D_0^2 z+C_1=0, \tag{49}$$

$$\sigma w'''-CQ''+D_0Q+(Qw)'=0. \tag{50}$$

更进一步的讨论应分作 $D_0=0$ 和 $D_0\neq 0$ 两种情况：1) $D_0=0$。在这种情况下，求得(47)，(48)式的解后即得约化结果为

$$u=C_1\theta^3 t-C_2/\theta+\theta w, \tag{51}$$

$$h=\theta^2 Q,\ z=\theta x-\frac{1}{2}C_1\theta^4 t^2+C_2 t+C_3, \tag{52}$$

$$Cw''+ww'+Q'+C_1=0, \tag{53}$$

$$\sigma w'''-CQ''+(Qw)'=0, \tag{54}$$

其中 θ,C_1,C_2,C_3 为任意常数。

比较(51)—(54)式与群论约化的结果(16)—(20)式可知，这种情况正是用群论方法约化的结果。在(53)，(54)式中消去 Q 后的方程即为 Painleué II 型方程。对于 $C_1=0$ 时，这种约化即为众所周知的行波约化。 2) $D_0\neq 0$。在这种情况下，(47)—(50)式成为

$$\theta=[2(D_1-D_0t)]^{-1/2},\ z=\theta x+\lambda,$$

$$\lambda=\lambda_1(D_1-D_0t)^{1/2}+\lambda_2(D_1-D_0t)^{-1/2}+\frac{C_1}{4D_0^2},$$

$$Q=-Cw'-\frac{1}{2}w^2+\frac{1}{2}D_0^2z^2-C_1z-f_1,$$

$$(\sigma+C^2)w'''+\left(\frac{1}{2}D_0^2z^2-C_1z-D_0C-f_1\right)w'-\frac{1}{2}D_0w^2-\frac{3}{2}w^2w'$$
$$+(D_0^2z-C_1)w+\frac{3}{2}D_0^3z^2-D_0C_1z-D_0^2C-D_0f_1=0, \tag{55}$$

其中 $D_1,\lambda_1,\lambda_2,C_1,f_1$ 均为常数。

方程(55)正是 Bureau 已经详细研究过的方程[7]

$$\dddot{y}=(a_1y+a_0)\ddot{y}+(b_2y^2+b_1y+b_0)\dot{y}^2+(C_3y^3+C_2y^2+C_1y+C_0)\dot{y}$$
$$+d_4y^4+d_3y^3+d_2y^2+d_1y+d_0$$

的特例(上式中 a_i,b_i,c_i,d_i 为 z 的解析函数)，因此此处不再对方程(55)作详细讨论。

上述的讨论是在 $z_x \neq 0$ 的情况下才适用的. 当 $z_x = 0$ 时,完全类似于 $z_x \neq 0$ 的情况,不难得到 WBK 方程的所有可能的相似解为

3) $u = w(t), h = \Gamma_4 x + Q(t), w' + \Gamma_4 = 0,$ (56)

$$Q' + \Gamma_4 w = 0, \tag{57}$$

其中 Γ_4 为任意常数. 约化方程(56),(57)仅为 w,Q 的线性方程,其一般解为

$$w = -\Gamma_4 t + t_0,\ Q = \frac{1}{2}\Gamma_4^2 t^2 - \Gamma_4 t_0 t + Q_0,$$

Q_0, t_0 为积分常数.

4) $u = -C_1 + (x + C_1 t + C_2)w(t), h = Q(t), w' + w^2 = 0,$ (58)

$$Q' + Qw = 0, \tag{59}$$

w 和 Q 方程(58),(59)分别为 Riccati 方程和线性方程,其一般解为

$$w = \frac{1}{t + t_0},\ Q = \frac{C_3}{t + t_0},$$

C_1, C_2, C_3, t_0 均为任意常数.

5)
$$u = \frac{1}{t + t_0}x + w(t),\ h = \frac{C_1}{(t + t_0)^2}x + Q(t),$$

$$w' = -\frac{1}{t + t_0}w - \frac{C_1}{(t + t_0)^2}, \tag{60}$$

$$Q' = -\frac{1}{t + t_0}Q - \frac{C_1}{(t + t_0)^2}w. \tag{61}$$

线性方程(60),(61)的一般解为

$$w = \frac{w_0}{t + t_0} - \frac{C_1}{t + t_0}\ln(t + t_0), \tag{62}$$

$$Q = \frac{Q_0}{t + t_0} + \frac{w_0 C_1}{(t + t_0)^2} - \frac{C_1^2}{(t + t_0)^2}[\ln(t + t_0) + 1], \tag{63}$$

其中 w_0, Q_0, C_1, t_0 均为任意常数. 有意思的是在这种约化解中包含了关于时间变量 t 的对数支点(见(62),(63)式).

在这一节中得到的约化结果2)—5)都是用经典群论方法得不到的. 3)—5)中的约化方程均是一些简单的 Riccati 方程或线性方程. 它们的解可用初等函数来描述.

四、结果与讨论

Whitham, Broer 和 Kaup 在 Boussinesq 近似下得到的非线性方程 (WBK 方程) 可以很好地描述浅水色散波. 本文利用群论方法和直接法得到 WBK 方程的所有可能的对称性约化. 群论方法只能给出一种约化形式,即 Painlevé II 型约化. 直接法的约化包含更多的信息. 群论法得到的结果只是直接法的一种特殊情况. 在直接法给出的约化结果中包含有关于时间变量 t 的一些奇点: 既有极点,又有代数型支点 (约化 2)), 还有对数型支点(约化 5)). 仅有相似解1),2)反映了色散波的特点. 而相似解 3)—5)与色散项无关(与 σ, C 无关),因此,这些解并不能用来描述色散波.

如何运用经典李群方法(对称性方法)[8]和非经典李群方法(条件对称性方法)[9]，得到本文所给出的所有结果等问题，有待于更进一步的研究.

作者之一(楼森岳)感谢与复旦大学倪光炯教授和黄国翔博士的讨论.

附　　录　A

(23)，(24)式的一般性证明

将一般的形式(25)，(26)式代人 WBK 方程后得

$$U_t + (U_w z_t + U_w z_x + 2CU_{xw} z_x + CU_w z_{xx}) w_z + UU_x + H_x + CU_{xx} + H_Q z_z Q_z \\ + CU_{ww} z_x^2 w_z^2 + CU_w z_x^2 W_{zz} = 0, \tag{A.1}$$

$$H_t + HU_x + UH_x - CH_{xx} + \sigma U_{xxx} + (H_Q z_t + UH_Q z_x - 2CH_{xQ} z_x - CH_Q z_{xx}) Q_z \\ + (HU_w z_x + 3\sigma U_{xxw} z_x + 3\sigma U_{xw} z_{xx} + \sigma U_w z_{xxx}) W_z - CH_{QQ} z_x^2 Q_z^2 - CH_Q z_x^2 Q_{zz} + \sigma(3U_{xww} z_x^2 w_z^2 \\ + 3U_{xw} z_x^2 w_{zz} + 3W_{ww} z_x z_{xx} w_z^2 + 3U_{ww} z_x^3 w_z w_{zz} + U_w z_x^3 w_{zzz} \\ + 3U_w z_x z_{xx} w_{zz}) = 0. \tag{A.2}$$

要求 (A.1)，(A.2) 式是 w, Q 对 z 的常微分方程给出许多限制条件(即要求 (A.1)，(A.2) 式中 w, Q 及其导数的各幂次，乘积的系数之比仅是 Q, z, w 的函数)，其中 (A.1) 式 w_z^2 和 w_{zz} 的系数之比和 (A.2) 式 Q_z^2 和 Q_{zz} 的系数之比给出的限制条件为 ($z_x \neq 0$)

$$\frac{U_{ww}}{U_w} = \Gamma_1(Q, w, z) = \Gamma_1(w), \tag{A.3}$$

$$\frac{H_{QQ}}{H_Q} = \Gamma_2(Q, w, z) = \Gamma_2(Q). \tag{A.4}$$

(A.3)，(A.4) 式的最后一步是因为由假设(25)，(26)式中 U 和 $H\left(\text{从而 } \frac{U_{ww}}{U_w} \text{ 和 } \frac{H_{QQ}}{H_Q}\right)$ 仅仅通过变量 w, Q 与 z 相联系. 将 (A.3)，(A.4) 式分别对 w, Q 积分二次得

$$U = \beta(x,t) \int^w \mathrm{d}w_1 \exp \int^{w_1} \Gamma_1(w') \mathrm{d}w' + \alpha(x,t) \equiv \beta \Omega_1(w(z)) + \alpha, \tag{A.5}$$

$$H = B(x,t) \int^Q \mathrm{d}Q_1 \exp \int^{Q_1} \Gamma_2(Q') \mathrm{d}Q' + A(x,t) \equiv B \Omega_2(Q(z)) + A. \tag{A.6}$$

作变换

$$\Omega_1(w(z)) \to w_1(z), \Omega_2(Q(z)) \to Q_1(z),$$

即得当 $z_x \neq 0$ 时一般化的约化形式(25)，(26)式是与特殊形式(23)，(24)式等价的.

当 $z_x = 0$ 时，可简单地取 $z = t$. 并不妨设(25)，(26)式所示的 U, H 可对变量 w, Q 作 Laurant 级数展开，即

$$U = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(x,t) w^n(t), \tag{A.7}$$

$$H = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(x,t) Q^n(t). \tag{A.8}$$

将 (A.7)，(A.8) 式及 $z = t$ 代人 (A.1)，(A.2) 式得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{nt} w^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n w^{n-1} w_t + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_n a_{mx} w^{n+m} \\ + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{nx} Q^n + C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{nxx} w^n = 0, \tag{A.9}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{nt} Q^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n b_n Q^{n-1} Q_t + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_n a_{mx} Q^n w^m \\ + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{nx} a_m Q^n w^m - C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{nxx} Q^n + \sigma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{nxxx} w^n = 0. \tag{A.10}$$

要求（A.9),(A.10) 式为 t 的常微分方程组，给出许多限制条件，其中从 (A.9), (A.10) 两式等号左端第二项求和的各项，易得

$$na_n(x,t)=a_1(x,t)\Gamma_n(t)\equiv\beta(x,t)\Gamma_n(t),(n\neq 0), \tag{A.11}$$

$$nb_n(x,t)=b_1(x,t)\Omega_n(t)\equiv B(x,t)\Omega_n(t),(n\neq 0), \tag{A.12}$$

其中 $\Gamma_n(t),\Omega_n(t)$ 为 t 的函数．将 (A.11),(A.12) 式代人 (A.7),(A.8) 式即得

$$U=\beta(x,t)\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\Gamma_n(t)w^n(t)+a_0(x,t)\equiv\beta(x,t)w_1(t)+\alpha(x,t),$$

$$H=B(x,t)\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\Omega_n(t)Q^n(t)+b_0(x,t)\equiv B(x,t)Q_1(t)+A(x,t).$$

由此即得证在 $z_x=0$ 时，亦不必采用最一般的约化形式(25),(26)式，而只需采用特殊形式(23),(24)式即可．

附 录 B

约化形式(45)—(50)式的导出

由规则 3 和规则4，从(32),(33)式立即得

$$\Gamma_4=\Gamma_5=1,\beta=z_x,B=z_x^2. \tag{B.1}$$

将 (B.1) 式代人(31)式并对 x 积分两次得

$$\int^z\exp\left\{-\int^{z_2}\Gamma_3(z_1)dz_1\right\}dz_2\equiv\Omega(z)=\theta(t)x+\lambda(t),$$

其中 $\theta(t),\lambda(t)$ 为两个与 t 有关的积分函数．利用规则 5 即可取

$$\Gamma_3(z)=0,z=\theta x+\lambda. \tag{B.2}$$

将 (B.1) 和 (B.2) 式代人(29)和(37)式，并利用规则 1 和 2 可得

$$A=0,\Gamma_1=\Gamma_9=0, \tag{B.3}$$

$$\alpha=-\frac{1}{\theta}(\theta_t x+\lambda_t). \tag{B.4}$$

由 (B.1)—(B.4) 式，立即有

$$\Gamma_2=\Gamma_6=\Gamma_8=\Gamma_{10}=\Gamma_{11}+C=\Gamma_{12}=\Gamma_{14}=\Gamma_{15}-1=\Gamma_{16}=0 \tag{B.5}$$

及

$$\Gamma_{13}=D_0=\text{常数},\ \theta_t=D_0\theta^3. \tag{B.6}$$

最后将所有结果代人(35)式得唯一可能的解

$$\Gamma_7=-D_0^2z+C_1, \tag{B.7}$$

$$\lambda_{tt}=D_0^2\theta^4\lambda+2D_0\theta^2\lambda_t-C_1\theta^4, \tag{B.8}$$

C_1 为常数．将 (B.1)—(B.8) 式代回(27)—(44)式即得所证结果(45)—(50)式． $z=t$ 的情况是完全类似的，因此不再给出约化结果3)—5)的详细推导．

[1] G. B. Witham, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A* 299(1967), 6.

[2] L. J. F. Broer. *Appl. Sci. Res.*, 31(1975), 377.

[3] D. J. Kaup, *Prog. Theor. Phys.*, 54(1975), 396.

[4] B. A. Kupershmidt, *Commun. Math. Phys.*, 99(1985), 51.

[5] P. A. Clarkson and M. D. Kruskal, *J. Math. Phys.*, 30(1989), 2201; S-y Lou, *Phys. Lett. A*, 151(1990), 133.

[6] S-y Lou, *J. Phys. A*, 23(1990), L649.
S-y Lou and G-j Ni, *Commun. Theor. Phys.*, 15(1991), 465.
S-y Lou, H-y Ruan, D-f Chen and W-z Chen, *J. Phys. A*, 24(1991), 1455.

[7] F. J. Bureau, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, IV65(1975), 1.

[8] M. Lakshmanan and P. Kaliappan, *J. Math. Phys.*, 24(1983), 79.

[9] G. W. Bluman and J. D. Cole, *J. Math. Mech.*, 10(1969), 1025.
D. Levi and P. Winternitz, *J. Phys. A*, 22(1989), 2915.

SYMMETRY REDUCTIONS OF WHITHAM-BROER-KAUP EQUATIONS IN SHALLOW WATER

RUAN HANG-YU LOU SEN-YUE

Division of Modern Physics, Ningbo Normal College, Ningbo 315211

(Received 2 August 1991)

ABSTRACT

In this paper, five types of similarity reductions of Whitham-Broer-kaup equations in shallow water are given by both the classical Lie approach and the direct method. The Painlevé II type reduction equation obtained by the classical Lie approach is only the special case of that obtained by the direct method. In the similarity reduction results of the direct method, three types of singularity points, i.e., poles, algebraic branch points and logarithmic branch points. are included.

PACC: 0220; 0290; 0340K