

光学耗散系统的准热力学模型及其在光学 双稳性相变问题上的应用

欧 发

华南理工大学应用物理系, 广州 510641

1991年6月10日收到

本文以光学耗散系统为范例, 论证在满足细致平衡原理的条件下, 可以与传统热力学相平行地发展一种“准热力学”模型。然后运用此模型系统而普遍地讨论了光学双稳系统的临界现象与相变。又借助 Ginzburg-Landau 模型处理了光学双稳性(第二类)临界点附近的涨落与关联。将平衡热力学的 Landau 相变理论推广到具有双稳性并远离热平衡的耗散系统。

PACC: 0590; 6460; 4265P; 6470

一、引 言

从光与二能级原子耦合系统这一具体事例中, 我们发现: 1) 吸收型光学双稳系统(远离热平衡的非线性系统)的广义热力学势及其定义或导来的状态函数至少在形式上满足平衡热力学基本关系式^[1]; 2) 上述双稳系统的临界现象也遵循平衡热力学中的 Landau 相变理论^[2]。远离热平衡系统具有类似于热平衡系统的某些秉性, 看来, 是有前提条件的。基本的前提就是细致平衡原理^[3]。(而对于热平衡系统细致平衡原理总是能够成立的。)本文准备从比较一般的情况出发, 进一步论证这个问题。并为光学(甚至更一般的)耗散系统确立一种‘准热力学’模型, 然后运用此模型讨论光学双稳的临界现象与相变的普遍特征。

二、准热力学模型

1. Fokker-Planck 方程与细致平衡原理

在文献[3]中, 通过绝热消除慢包络 Maxwell 方程中的原子极化变量与平均场近似等手续, 得到具有普适性的非线性光学腔单模光场的动力学方程, 现将其写成 Langevin 方程的形式

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \{-C[q_2\chi_d(x) + q_1\chi_s(x)] - q_1 + \theta q_2 + y\} + F_1(t) \\ &- K_1(q_1q_2) + F_1(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \{C[q_1\chi_d(x) - q_2\chi_a(x)] - q_i - \theta q_1\} + F_i(t) \\ &= K_i(q_1q_2) + F_i(t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$q_1 = x \cos \phi, \quad q_2 = x \sin \phi, \quad (3)$$

其中 y 和 x 依次为输入和输出(或光腔内空间上平均)光场实振幅, ϕ 为输出相对于输入的位相; $\chi_d(x)$ 和 $\chi_a(x)$ 分别代表色散性和耗散性的非线性极化率, 对于被动 (passive) 介质: $\chi_a(x) > 0$, 而活化 (active) 或有增益的介质: $\chi_a(x) < 0$, θ 为腔失谐; C 为控制参量, 正比于原子数和耦合强度; 时间 t 是以有关腔膜的弛豫时间 τ_c 为单位. 通常假定随机力 $F_i(t)$ 具有 Markoff 过程的特征,

$$\langle F_i(t) \rangle = 0, \quad (i = 1, 2), \quad (4)$$

$$\langle F_i(t)F_j(t') \rangle = Q_{ij}\delta(t-t'), \quad Q_{ij} = Q\delta_{ij}. \quad (5)$$

于是与 Langevin 方程(1),(2)相对应的 Fokker-Planck 方程为

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= - \left[\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} K_i(q)P \right] + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} P, \\ q &= (q_1, q_2), \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (6)$$

其中漂移系数 $K_i(q_1q_2)$ 如(1), (2)式所示. 并假定扩散系数矩阵 $Q_{ij}(=Q\delta_{ij})$ 与变量 (q_1, q_2) 无关, 从量子统计的观点来看, 这种情形相当于忽略量子涨落^[4].

下面参照文献[5]提供的步骤, 导出本系统的漂移系数 $K_i(q)$ 和扩散系数 Q_{ij} 满足细致平衡原理的充要条件, 以及在此条件下 Fokker-Planck 方程的静态解.

在时间反演下变量 $q = (q_1, q_2)$ 的转换 \hat{q} 如下式所示^[5]:

$$\hat{q} = (\varepsilon_1 q_1, \varepsilon_2 q_2), \quad \varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = -1. \quad (7)$$

因为

$$\hat{x} = x(\hat{y} = y), \quad \hat{\phi} = -\phi. \quad (8)$$

同时, 在 $K_i(i = 1, 2)$ 时(1)和(2)式中的控制参量 C 以及 $\chi_d(x)$ 和 $\chi_a(x)$ 在时间反演下都保持不变. 现将代表系统决定性动力学特性的漂移系数 K_i 按如下方式分解为两部分:

$$\mathcal{D}_i(q) = \frac{1}{2} [K_i(q) + \varepsilon_i K_i(\hat{q})], \quad (9)$$

$$J_i(q) = \frac{1}{2} [K_i(q) - \varepsilon_i K_i(\hat{q})]. \quad (10)$$

\mathcal{D}_i 与 J_i 的具体表达如下:

$$\mathcal{D}_1 = -(C\chi_a + 1)q_1 + y, \quad \mathcal{D}_2 = -(C\chi_a + 1)q_2; \quad (11)$$

$$J_1 = -(C\chi_d - \theta)q_2, \quad J_2 = (C\chi_d - \theta)q_1. \quad (12)$$

由文献[3]可知, $(C\chi_a + 1)/\tau_c$ 为振幅 x 的衰减率, 而 $(C\chi_d - \theta)/\tau_c$ 为相位 ϕ 的变率. 可见, K_i 的 \mathcal{D} 部分代表耗散过程, 而 J 部分则为色散过程, 这完全符合文献[5]将 \mathcal{D}_i 和 J_i 依次当作不可逆和可逆的漂移系数的观点.

将 Fokker-Planck 方程(6)的静态解写成如下形式:

$$P(q, C, y) = N \exp\{-\phi(q, C, y)\}, \quad (13)$$

则 Q_{ij} , \mathcal{D}_i 和 J_i 满足细致平衡原理的充要条件为^[5]

$$Q_{ij}(q) = \varepsilon_i \varepsilon_j Q_{ij}(\tilde{q}), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_i} = \sum_k (Q^{-1})_{ik} \left(\sum_j \frac{\partial Q_{kj}}{\partial q_i} - 2\mathcal{D}_k \right) \equiv A_i, \quad (15)$$

$$\sum_i \left[\frac{\partial J_i}{\partial q_i} - J_i \sum_k (Q^{-1})_{ik} \left(\sum_j \frac{\partial Q_{kj}}{\partial q_i} - 2\mathcal{D}_k \right) \right] = 0. \quad (16)$$

由于 $Q_{ij} = Q\delta_{ij}$, 且 Q_{ij} 与变量 q 无关, 故条件(14)式对于本系统总是能够成立的. 条件(15)式具体表达为

$$A_1 = 2Q^{-1}[(C\chi_s(x) + 1)q_1 - y] = \frac{\partial \phi}{\partial q_1}; \quad (15a)$$

$$A_2 = 2Q^{-1}(C\chi_s(x) + 1)q_2 = \frac{\partial \phi}{\partial q_2}. \quad (15b)$$

(15a), (15b) 式意味的是函数 ϕ 可积的条件

$$\frac{\partial A_1}{\partial q_2} = \frac{\partial A_2}{\partial q_1}, \text{ 亦即 } q_1 \frac{\partial \chi_s(x)}{\partial q_2} = q_2 \frac{\partial \chi_s(x)}{\partial q_1}, \quad (x = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}). \quad (15c)$$

显然, (15c) 式亦即 (15a), (15b) 式也是能够成立的. 同理有

$$q_1 \frac{\partial \chi_d(x)}{\partial q_2} = q_2 \frac{\partial \chi_d(x)}{\partial q_1}. \quad (17)$$

考虑到 (11), (12) 和 (17) 诸关系式, 不难得出(16)式所指示的条件为

$$(C\chi_d - \theta)q_2 = 0 \text{ 即 } \chi_d - \theta = 0. \quad (16a)$$

于是, 由(1)和(2)式所描述的耗散系统满足细致平衡原理的充要条件可简要地归结为系统的色散因子 χ_d 和 θ 为零. 这是一个颇为有趣的结果. 虽然色散代表一种可逆过程, 它却会破坏系统的细致平衡.

2. 准热力学的基本关系式(静态和动态)

将方程(1)、(2)按(13)式所示的概率分布求平均, 并忽略变量之间的关联, 得到的将是决定性方程

$$\langle \langle F_i(t) \rangle \rangle = 0, \quad \frac{dq_i}{dt} = K_i(q_1, q_2), \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

这里与方程(1)、(2)不同之处只是其中的变量 q_1 和 q_2 应理解为随机变量的平均. 参照方程(2), 不难看出, 当 $\chi_d - \theta = 0$, 一旦相位 $\phi = 0$, 即 $q_2 = x \sin \phi = 0$, $\frac{dq_2}{dt}$ 也同时为零, 这意味着在无色散的情况下, 相位将锁定在 $\phi = 0$. 于是, 方程(18)退化成[参照(1)、(2)和(15a)诸式]

$$\frac{dx}{dt} = -\{[C\chi_s(x) + 1]x - y\} = -\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}, \quad (\phi = 2\tilde{G}/Q). \quad (19)$$

按(19)式将梯度 $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}$ 沿路径 x 积分可得函数 \tilde{G} 的显式, 并具有传统热力学的 Gibbs 自由能形式[可称 \tilde{G} 为‘准 Gibbs 自由能’]

$$\tilde{G} = \tilde{U} - C\tilde{S} - yx, \quad (20)$$

相应

$$\tilde{F} = \tilde{U} - C\tilde{S}, \quad (21)$$

则称 \tilde{F} 为‘准 (Helmholtz) 自由能’, 其中准熵 \tilde{S} 与准内能 \tilde{U} 分别表示为

$$\tilde{S} = - \int x\chi_c(x) dx, \quad (22)$$

$$\tilde{U} = \frac{x^2}{2} \left(\text{或 } \tilde{U} = k \frac{x^2}{2}, k = \tau_c^{-1} \right). \quad (23)$$

(23)式中括号内的表示意味着在运动方程(19)中采用通常的时间单位。同样可以引入准焓 \tilde{H} ,

$$\tilde{H} = \tilde{U} - yx. \quad (24)$$

$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x} = 0$ 决定系统的宏观静态方程

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \rightarrow y = [C\chi_c(x) + 1]x. \quad (25)$$

利用静态条件 $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x} = 0$, 显然可得如下诸准热力学势函数的全微分关系式:

$$d\tilde{G} = -\tilde{S}dC - xdy, \quad (26)$$

$$d\tilde{U} = Cd\tilde{S} + ydx, \quad (27)$$

$$d\tilde{F} = -\tilde{S}dC + ydx, \quad (28)$$

$$d\tilde{H} = Cd\tilde{S} - xdy. \quad (29)$$

[请注意: 如果 \tilde{U} 和 \tilde{S} 局限于(如(22),(23)式所示)只是变量 x 的函数, (27) 式并不是真正的两个独立变量的全微分关系式。]由于利用了静态条件 $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x} = 0$, (26)–(29)式代

表的过程是静态的。静态过程所经历的时间尺度 τ 不仅远大于介质原子的弛豫时间 τ_s , 而且远大于系统(光腔)光子的弛豫时间 τ_c (τ_c 本身又远大于 τ_s)。简而言之, 静态过程进行得如此之缓慢, 以致于过程的每一中间态都可以当成静态。这是发生在耗散系统中的静态过程, 所以仍属于不可逆过程。但它又相似于传统热力学中的平衡过程——可逆过程。

当过程是非静态的, 情况又将如何? 为探讨此问题, 利用准熵 \tilde{S} 及准内能 \tilde{U} 关系式(22)和(23), 将动力学方程(19)写成

$$\frac{dx}{dt} = C \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + y = - \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x} \right)_{y,C}. \quad (30)$$

一个动力学方程总是包含着能量守恒关系。由(19)式不难得到如下传统热力学意义上的能量平衡方程:

$$yxdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2[1 + C\chi_c(x)] \left(\frac{x^2}{2}\right) dt. \quad (31)$$

显然, 此方程应理解为: 在 dt 时间内入射场 y 提供的有效功 $yxdx$ 等于该段时间内腔贮存的光场能量 $x^2/2$ 的增长 $d\left(\frac{x^2}{2}\right)$ 和被系统(腔与介质)所耗散的能量(系统释放的热量)

$2[1 + C\chi_s(x)] \left(\frac{x^2}{2}\right) dt$ 之和.

下面将换一种方式用方程(30)来表达‘能量守恒关系’。将方程(30)等号两边乘以在 dt 时间内场的增量 dx , 得

$$d\tilde{U} - Cd\tilde{S} - \left(\frac{dx}{dt}\right) dx + ydx, \left(\frac{dx}{dt} dx \geq 0\right). \quad (32)$$

若将 dx 看成在‘驱动力’ y 作用下的‘位移’, 则可定义 ydx 为驱动场 y 对系统所作的准功

$$\delta\tilde{W} \equiv ydx, \quad (33)$$

而 $Cd\tilde{S} - \left(\frac{dx}{dt}\right) dx$ 应解释为系统‘吸收’的准热量

$$\delta\tilde{Q} - Cd\tilde{S} - \left(\frac{dx}{dt}\right) dx, \quad (34)$$

于是将(32)式写成

$$d\tilde{U} = \delta\tilde{Q} + \delta\tilde{W}. \quad (35)$$

并读作: 系统准内能 \tilde{U} 的增加 $d\tilde{U}$ 等于系统吸收的准热量 $\delta\tilde{Q}$ 和外界对系统所做的准功 $\delta\tilde{W}$ 之和。这正是准热力学第一定律(准能量守恒关系)。 (32)式又表示

$$d\tilde{S} \geq \frac{\delta\tilde{Q}}{C} \left[= \frac{1}{C} (d\tilde{U} - \delta\tilde{W}) \right], \quad (36)$$

其中等式和不等式分别代表静态和非静态过程。于是, (36)式表达准热力学第二定律。当

$$\delta\tilde{Q} = 0 \quad (d\tilde{U} = \delta\tilde{W}), \quad d\tilde{S} \geq 0. \quad (37)$$

这说明非静态的‘绝热’过程, 准熵趋向于极大。它正与传统热力学的熵增加原理——孤立系统中不可逆过程的熵判据十分相似。

宏观动力学方程(30)直接给出(也是准热力学第二定律的另一种表达方式)

$$(d\tilde{G})_{,c} \left[= \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{,c} dx \right] \leq 0. \quad (38)$$

(38)式表示, 在入射场 y 和控制参量 C 保持不变的非静态过程中, 准 Gibbs 自由能 \tilde{G} 总是在单调地减小, 最终达到极小值——稳定的静态。所以, (38)式正相当于恒温 T 恒压 P 下的 Gibbs 自由能 G 判据。

$$(dG)_{p,T} \leq 0. \quad (39)$$

故称(38)式为准 Gibbs 自由能判据。 \tilde{G} 的表达式(20)中, 准内能 \tilde{U} 与准熵 \tilde{S} 只是变量 x 的函数, 而且 \tilde{U} 的函数形式完全固定 [$\tilde{U} = x^2/2$]. 这种特殊性是由动力学方程(19)所决定的。现设函数 \tilde{S} 和 \tilde{U} 分别为两个独立变量 C 和 x 的函数,

$$\tilde{S} = \tilde{S}(x, C), \quad \tilde{U} = \tilde{U}(x, C). \quad (40)$$

这样, 原来只代表方程(19)的宏观动力学方程(30)得到推广。以上诸准热力学关系式仍将成立, 并具有更大的普遍性。 [(27)式也将成为真正的全微分关系式.]

3. 有关准热力学模型的结论

1) 光学(或者一般的)耗散系统在满足细致平衡原理的条件下, 可以与传统热力学相平行地发展一种准热力学理论。本文所提出的这种耗散系统的准热力学模型, 实质上

是不可逆热力学的一种表现形式。

2) 在我们探索准热力学理论与传统热力学之间的相似性的同时,也应该注意到两者之间的区别。首先两者的基础与历史背景不同,或不尽相同。两者各自的状态参量与势函数的物理内涵也不同。例如,控制参量 C 与温度 T 相对应: 但 C 可以是广延量,而 T 是强度量; 光场 x 与体积 v 相对应,但 x 是强度量而 v 是广延量; 传统热力学的势函数 S, U, F, H 和 G 都是广延量,而与之对应的准热力学势都不符合广延量的定义。当然,如果将动力学方程(30)看成是方程(19)的一种推广形式, [方程(30)中 \tilde{S} 和 \tilde{U} 各自可以是两个独立的参变量 C 和 x 的函数。] 方程(30)甚至已不局限于代表光学的非线性耗散系统。随之系统的状态参量 (x, C, y) 的含义也就很广泛,其中谁是广延量或强度量,视具体情况而定。

三、光双稳系统的相变理论 ——‘准热力学’模型的一种应用

1. 双稳系统的两类临界点

若静态方程(25)存在双稳性,则可绘出如图 1 所示的等 $C(x-y)$ 曲线族。人们熟知,控制参量在临界值 C_c 。以上的 $x-y$ 曲线族相似于平衡热力学中的临界温度以下的等温线。对于后者,恒温恒压下,一相(例如,气相)的热力势 G (Gibbs 自由能)等于另一相(液相)的 G , 是两相共存的判据,而且此判据对应于一级相变。在 $x-y$ 曲线的双稳区也可以找到类似这样的点 $(y = y_0)$ 。在其高、低透支上的准自由能 \tilde{G}_h 和 \tilde{G}_l 相等,

$$\tilde{G}_h(y_0, C) = \tilde{G}_l(y_0, C). \quad (41)$$

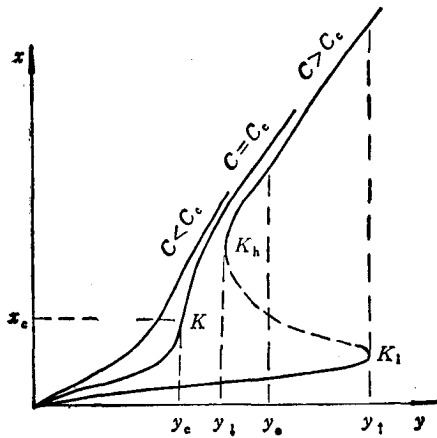


图 1

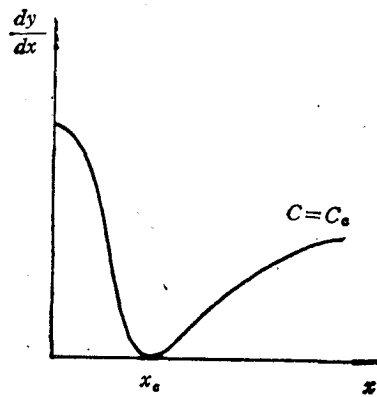


图 2

然而 此点仅意味系统处于高、低透支的概率相等,并不意味要发生高、低透支之间转变——相变,倘若并无外来的激发或内部足够强的涨落。但是,一旦输入 y 达到低支或高支的端点 $(y_l$ 或 $y_h)$, 在两支(两相)之间就会自动地发生转变。我们倾向于称这样的端点 K_l 和 K_h (参见图 1)为第一类临界点。这两点涉及类一级相变,因为在上述转变下

准熵 \tilde{S} 作不连续变化。这一类临界点相似于平衡热力学的过冷或过热的极限。不过对于热平衡系统,它也仅仅是理论上的极限,实际上很难达到。对于光学双稳系统,这一类临界点就显得比较重要,与开关效应密切相关。通常提到的光学双稳的临界慢化,其实就是指接近该临界点时开关速度的慢化。当 C 降低到某个临界值 C_c , K_h 和 K_l 将重合为图 1 所示的 K 点,这将是另一种意义上的临界点。

按照本文观点,该临界点 K 意味着光学双稳(通常是被动的,也可以是活化的)系统的类二级相变(连续相变)^[2]。然而, Bonifacio 与 Lugiato 等人在权威性的评论文献 [6, 7] 中一再声称发生于被动 (passive) 系统中的光学双稳性“决不会展示 (never exhibit) 二级相变”。看来,这是一个需要经过认真讨论而予以澄清的问题。

本文将阐明可以发展一种具有普遍意义的光学双稳性相变理论,犹如平衡热力学中的 Landau 二级相变理论。也是对上述本文与 Bonifacio 和 Lugiato 截然相反的观点的进一步论证。

2. 稳定性分析

对均为静态的两类临界点作稳定性分析十分有益于以后的讨论。在临界点 K_h 与 K_l , 有[见图 1]

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{K_i} = 0 \quad \text{即} \quad \left(\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}\right)_{K_i} = 0, \quad (i = h, l). \quad (42)$$

而临界点 K 为 $C = C_c$ 时 x - y 曲线的拐点[见图 1 和图 2], 故不仅具有 (42) 式所示性质,而且

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_K = \left(\frac{\partial^3 \tilde{G}}{\partial x^3}\right)_K = 0, \quad (43)$$

因点 K 正是 $(dy/dx)_{C_c-x}$ 曲线(图 2 所示)的极小,故又有

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_K = \left(\frac{\partial^4 \tilde{G}}{\partial x^4}\right)_K > 0. \quad (44)$$

虽然,在 K 点: $C = C_c$, $x = x_c$, 但由(22)和(23)式注解的(20)式以及静态方程(25)表明,(43)和(44)式依次只取决于

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_c} = \left(\frac{\partial^3 \tilde{G}}{\partial x^3}\right)_{x=x_c} = 0 \quad (45)$$

和

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=x_c} = \left(\frac{\partial^4 \tilde{G}}{\partial x^4}\right)_{x=x_c} > 0. \quad (46)$$

现运用准 Gibbs 自由能判据(38)式作静态稳定性分析。若保持 y 和 C 不变,由于系统内部涨落,场 x 偏离其静态值 x_s 。判据(38)式表明

$$\tilde{G}(x) - \tilde{G}(x_s) > 0. \quad (47)$$

将 $\tilde{G}(x)$ 围绕 $x = x_s$ 展开成 $\Delta x (= x - x_s)$ 的幂级数,可得如下静态 $\left[\left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}\right)_{x=x_s} = 0\right]$

的稳定性条件:

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}\right)_{x=x_s} > 0, \quad (48a)$$

$$\left(\frac{\partial^3 \tilde{G}}{\partial x^3}\right)_{x=x_s} = 0, \quad (48b)$$

$$\left(\frac{\partial^4 \tilde{G}}{\partial x^4}\right)_{x=x_s} > 0. \quad (48c)$$

.....

倘若偏离 $|\Delta x|$ 比较小, 对于一般的静态, 条件 (48a) 式已经足够保证其稳定性。但对于上述两类临界点, $(\partial^2 \tilde{G}/\partial x^2)_{x=x_s} = 0$, 稳定性条件 (48b) 和 (48c) 式就成为必要。然而, 只有第二类临界点 K 能满足 [见 (43) 和 (44) 式] (48b) 和 (48c) 式, 第一类则不能满足。因此, 临界点 K 是稳定的 (当然, 这种稳定有其特殊性, 应该叫 ‘临界稳定’), 而高、低支的拐点 K_h 和 K_l 是不稳定的——临界不稳定。

3. 推广的 Landau 相变理论

将光学双稳系统的临界现象和相变的特征归纳入 Landau 相变理论。依照文献 [2] 的办法, 选择差额 $x - x_c$ 为一种序参量 p , 而 $y - y_{op}$ 为与 p 对偶的等效外场 \tilde{H} ,

$$p = x - x_c, \quad \tilde{H} = y - y_{op}. \quad (49)$$

这里 y_{op} 代表输入 y 的一种特殊的运行值, 是这样规定的

$$y_{op} = [1 + C\chi_s(x_c)]x_c. \quad (50)$$

将准 Gibbs 自由能 \tilde{G} 在临界点 K 附近展开成按 p 幂次 (到第 4 次) 的级数,

$$\tilde{G}(x, y, C) = \sum_{n=0}^4 G_n p^n, \quad \tilde{G} = \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \tilde{G} \right]_{x=x_c}, \quad (n=0, 1, 2, 3, 4). \quad (51)$$

显然

$$G_0 = \tilde{G}(x_c, y, C), \quad G_1 = [1 + C\chi_s(x_c)]x_c - y = -\tilde{H}. \quad (52)$$

将系数 G_2 在 $C = C_c$ 处展开, 据 (25) 式和 $(dy/dx)_K = 0$, 不难证明

$$G_2 = \frac{1}{2} a \tau (a - 1), \quad \tau = 1 - C/C_c, \quad (53)$$

而据 (45), (46) 式, 应有

$$G_3 = \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \tilde{G}}{\partial x^3} \right)_{x=x_c} = 0, \quad G_4 = \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 \tilde{G}}{\partial x^4} \right)_{x=x_c} = b/4 > 0. \quad (54)$$

最终, 到达我们期望的目的——在光学双稳临界点 K 附近准 Gibbs 自由能 \tilde{G} 的 Landau 表达式为

$$\tilde{G} = G_0 - \tilde{H}p + \frac{1}{2} a \tau p^2 + \frac{1}{4} b p^4. \quad (55)$$

显而易见, 其中 \tilde{H} 等效于铁磁体中的外磁场 H , 而 p 则相当于受 \tilde{H} 激发的磁化。当入射光场偏置在 $y = y_{op}$, 即 $\tilde{H} = 0$, (55) 式成为

$$\tilde{G} = G_0 + \frac{1}{2} a \tau p^2 + \frac{1}{4} b p^4. \quad (56)$$

这时 p 就类似于自发磁化。

人们熟知, Landau 理论(平均场理论)主要涉及到平衡热力学的二级相变。铁磁体是用以阐述该理论的一个典型。现在从一般情况出发,将 Landau 理论系统而严格地推广到远离热平衡的光学双稳系统,这本身也说明光学双稳系统临界点 K 的二级相变特征^[2]具有普遍意义。还有些具体事例,例如,分/倍频效应^[6]及受辐照的 Josephson 结^[9]的双稳性,可以为佐证。

4. 涨落与关联

在文献 [2b] 中,曾定性地考虑了这个问题。本节试图采用 Ginzburg-Landau 模型定量地处理光学双稳系统序参量的涨落与关联。G-L 模型是作为平均场理论的 Landau 理论的一种发展。既然光学双稳系统临界现象能够纳入 Landau 理论的框架,也可以期望 G-L 模型能适用于光学双稳系统的临界现象。

序参量 p 的统计分布 P 应与场 x 的分布一样,受以下公式支配:

$$P = N \exp\{-2\tilde{G}(p)/Q\}, \quad (57)$$

其中 $\tilde{G}(p)$ 由(56)式来表达。据(56)式可以确定,当 $C \leq C_c$ ($t \geq 0$), 序参量的静态 $\left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial p} = 0\right)$ 值 p_s 为零,

$$p_s = 0, \quad (t \geq 0). \quad (58)$$

令 $p(\xi)$ 代表局域序参量,而 ξ 为空间坐标矢量。序参量的涨落 Δp 被定义为

$$\Delta p(\xi) = p(\xi) - p_s = p(\xi), \quad \text{而 } p(\xi) = x(\xi) - x_c, \quad (59)$$

其中 $x(\xi)$ 为局域场振幅。用 G-L 模型代替(56)式来表达临界点 K 附近的准 Gibbs 自由能 \tilde{G} 如下:

$$\tilde{G} = G_0 + L^{-d} \left\{ d^d(\xi) \left[\frac{1}{2} a t [\Delta p(\xi)]^2 + g \left[\frac{\partial \Delta p(\xi)}{\partial \xi} \right]^2 + \frac{b}{4} [\Delta p(\xi)]^4 \right\}, \quad (60)$$

其中 L 为系统的线度,为简单起见,该系统是立方形的; d 为与感兴趣的涨落有关的空间维数; g 为常数。对于光学系统,局域光场 $x(\xi)$ 本身往往是一种慢包络,例如,在环型光腔中就是如此。因而 $\left| \frac{\partial \Delta p(\xi)}{\partial \xi} \right|$ 和临界点 K 附近的 $p(\xi) = \Delta p(\xi)$ 一样是微小量,所有

这些正满足 G-L 模型所要求的条件。设 Δp_k 为涨落位形 $\Delta p(\xi)$ 的 Fourier 变换。进一步将(60)式中的 $[\Delta p(\xi)]^4$ 作为高阶微小项略去,相应(57)式近似成为 Gauss 分布,

$$P \approx \exp\left\{-2 \sum_k \left(\frac{1}{2} a t + g k^2\right) |\Delta p_k|^2 / L^d Q\right\} \quad (61)$$

显然,按此分布所得的 $|\Delta p_k|^2$ 的平均为

$$\langle |\Delta p_k|^2 \rangle = \frac{QL^d}{4} / \left(\frac{1}{2} a t + g k^2\right). \quad (62)$$

它给出

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \langle |\Delta p_k|^2 \rangle \approx k^{-2}, \quad (k = 2\pi/\lambda). \quad (63)$$

(63) 式表明涨落靠近临界点 K 时,波长 λ 长的模式占支配地位,而到达 K 点 ($t = 0$) 时,

$k \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow \infty)$ 模式的涨落要发散。

空间相关函数 $\Gamma(l)$ 按常规定义为

$$\Gamma(l) = \langle \Delta p(\xi + l) \Delta p(\xi) \rangle. \quad (64)$$

不难证明 $\Gamma(l)$ 为 $\langle |\Delta p_k|^2 \rangle$ 的 Fourier 变换,

$$\Gamma(l) = (2\pi)^{-d} \int d^d k \Gamma(k) \exp(ik \cdot l), \quad \Gamma(k) = \langle |\Delta p_k|^2 \rangle. \quad (65)$$

在光学系统中光的传播方向具有特殊性, 人们关心这个方向(纵向)上的涨落。若横向效应又可以忽略, 在这种情况下, 只需要计算 $d = 1$ 的相关函数 $\Gamma(l)$ 。将(62)式取代(65)式中的 $\Gamma(k)$ 得

$$\Gamma(l) = \frac{QL}{8g} \exp\left(-\frac{l}{\Lambda}\right), \quad \Lambda = (2g/at)^{\frac{1}{2}}, \quad (t \geq 0), \quad (66)$$

其中 Λ 度量序参量涨落在空间上可发生关联的距离, 一般称之为相关长度, 趋近 K 点 ($t = 0$) 时, Λ 也是发散的。

5. 标度律

两个临界指数 η 与 ν 分别由如下两式定义^[10]:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Gamma(k) (= \langle |\Delta p_k|^2 \rangle) \approx k^{-2+\eta}, \quad (67)$$

$$\Lambda \approx t^{-\nu}. \quad (68)$$

对照(63)和(66)式, 可知

$$\eta = 0, \quad \nu = 1/2. \quad (69)$$

因此, 指数 η 和 ν 连同在文献[2]中引入的

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \delta = 3 \quad \text{和} \quad \gamma = 1 \quad (70)$$

表示光学双稳系统的临界现象, 与热平衡系统(例如铁磁体)的情形完全一样。并服从如下的一些标度律(未计及空间维度 d):

$$\gamma = (2 - \eta)\nu, \quad \alpha + 2\beta\gamma = 2, \quad \alpha + \beta(\delta + 1) = 2. \quad (71)$$

当然, 所有这些仅在平均场理论(Landau 理论)的意义上能够成立。

Landau 表达式(55)同样也包含双稳性行为。从(55)式得静态方程

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial p} = 0, \quad bp' + atp - \tilde{H} = 0. \quad (72)$$

再由此解出高、低支阈值 \tilde{H}_+ (下跳)和 \tilde{H}_- (上跳),

$$\tilde{H}_{\pm} = \pm \frac{2}{3} at \sqrt{\frac{-at}{3b}}, \quad \tilde{H}_+ = \tilde{H}_-, \quad \text{与} \quad \tilde{H}_- = \tilde{H}_+. \quad (73)$$

看来, 据此应当定义一个新的临界指数 φ ,

$$|\tilde{H}_{\pm}| = |\tilde{H}_{\pm}| \approx (-t)^{\varphi}, \quad \varphi = \frac{3}{2}. \quad (74)$$

相应存在另一个关系式[见(70)式]

$$\varphi = \beta\delta. \quad (75)$$

可加入标度律[(71)式所示]的行列。

6. 结语

1) 发生于满足细致平衡原理的耗散系统中的光学双稳性临界现象,可以纳入平衡热力学的 Landau 相变理论框架,这是一种带有普遍意义的规律性。

2) 某些具体事例^[8,9]表明,该规律已不局限于光学的范畴。

3) 另一方面, Landau 表达式(55)本身也包含双稳性行为,相应要引入一种新的临界指数及其标度律,正如(74)和(75)式所示。

4) 从实验上观测光学双稳系统临界现象应当是很有意义的。以上许多理论结果需要实验来检验。

[1] Fa Ou and Zixiong Qin, *Opt. Comm.*, **65**(1988), 455.

[2a] Fa Ou, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 3021.

[2b] 欧发、邓文基, *物理学报*, **39**(1990), 932.

[3a] 欧发、蔡永强, *物理学报*, **37**(1988), 330.

[3b] Ou Fa and Cai Yongqiang, *Chinese Phys.*, **9**(1989), 678.

[3c] 欧发、吴庭万、张晓东, *光学学报*, **8**(1988), 205.

[4] A. Schenzle and H. Brand, *Opt. Comm.*, **27**(1978), 85.

[5] H. Haken, *Advanced Synergetics*, Springer-Verlag, Berlin, (1983), p. 294.

[6] R. Bonifacio and L. A. Lugiato, in *Dissipative Systems in Quantum Optics*, Ed. R. Bonifacio, Springer-Verlag, (1982), pp. 61; 84.

[7] L. A. Lugiato, in *Progress in Optics XXI*, ed. E. Wolf, Elsevier Science Pub., (1984), pp. 71; 188.

[8] D. F. Walls, P. D. Drummond and K. J. Mcneil, in *Optical Bistability*, ed. C. M. Bowden, M. Ciftan and H. R. Robl, Plenum Press, (1981), p. 51.

[9] G. S. Agarwal and S. R. Shenoy, in *Optical Bistability*, eds. C. M. Bowden, M. Ciftan and H. R. Robl, Plenum Press, New York, (1981), p. 85.

[10] S. K. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena*, W. A. Benjamin Inc., (1976), p. 107.

QUASI-THERMODYNAMIC MODEL OF THE DISSIPATIVE SYSTEMS AND ITS APPLICATION TO PHASE TRANSITIONS IN OPTICAL BISTABILITY

Ou Fa

Department of Applied Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510641

(Received 10 June 1991)

ABSTRACT

Taking the optical system as a prototype, this paper demonstrates that a quasi-thermodynamic model for dissipative systems, satisfying the principle of detailed balance, may be developed, which is parallel to the traditional thermodynamics. The present systems are described by the generalized dynamical equation of nonlinear optical cavities, introduced in previous work of Ou Fa et al. In view of the quasi-thermodynamic model, the critical phenomena and phase transitions in optical bistability are discussed systematically and generally. By taking the advantage of Ginzburg-Landau's model, the fluctuations and correlations near the (second kind of) critical point of optical bistability are studied also. So the Landau's theory of phase transitions in equilibrium thermodynamics is generalized to the bistable dissipative systems far from equilibrium.

PACC: 0590; 6460; 4265P; 6470