

理想腔中多次原子注入产生的光场挤压*

曹昌祺 丁小宏

北京大学物理系, 北京 100871

1991 年 7 月 31 日收到

利用共振的 Jaynes-Cummings (缩写为 J-C) 模型研究腔内相干光场与原子多次作用后所产生挤压效应。在单光子跃迁情况, 对适当选取的小的作用时间, 通过多次作用可以提高压缩度, 但有限制, 次数太多, 压缩反而变坏。在双光子跃迁情况, 对于强相干光和适当取值的作用时间 $t = \pi/g_2$, 可以求出被压缩的不确定度与作用次数间的解析关系式。此式表明, 选取适当的作用次数可以得到深度压缩。初始平均光子数 N 愈大, 能达到的最大压缩愈强。

PACC: 4250

1982年 Meystre 和 Zubairy 首先指出^[1], 单模相干光场与二能级原子相互作用 (J-C 模型) 可以产生挤压效应。后来许多文献在更广泛的条件和广义的 J-C 模型基础上研究了光场的各种挤压性质^[2]。其中 Kuklinski 和 Madajczyk 得出强相干光与单个原子长时间的相互作用可以产生深度压缩。所需时间与 \sqrt{N} (N 为初始相干光场的平均光子数) 成正比, 因而是一个大值。本工作的意图是: 考察能否通过光场与原子的多次作用也达到深度压缩。多次作用是指让处于激发态(或处于基态)的原子逐个地通过腔与光场相作用, 任何时刻腔内最多只有一个原子。本文中只考虑共振的情形。相互作用包括单光子跃迁和双光子跃迁两种类型。下面先给出若干一般的关系式, 然后再分别类型作具体讨论^[3]。

设双能级原子激发态为 $|A\rangle$, 基态为 $|B\rangle$ 。在旋转波近似下, 作用图象中的 J-C 模型 $\hat{H}_{int}(t)$ 为

$$\hat{H}_{int}(t) = \hbar g_l (a^\dagger s_+ + (a')^\dagger s_-), l = 1, 2, \quad (1)$$

其中 s_+ 代表 $|A\rangle\langle B|$, s_- 代表 $|B\rangle\langle A|$, $l = 1$ 表示单光子跃迁, $l = 2$ 表示双光子跃迁。由于只考虑共振情况, 故 $\hat{H}_{int}(t)$ 实际上与 t 无关。

作用图象中原子-光场系统的密度算符可设为

* 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目的部分结果。

1) 本文结果曾在第四届全国量子光学讨论会(1990年11月, 成都)上报告过。

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m,n} [\rho_{m,n}^{AA}(t) |A,m\rangle\langle A,n| + \rho_{m,n}^{AB}(t) |A,m\rangle\langle B,n| + \rho_{m,n}^{BA}(t) |B,m\rangle\langle A,n| + \rho_{m,n}^{BB}(t) |B,m\rangle\langle B,n|]. \quad (2)$$

由 $\hat{\rho}(t)$ 所满足的运动方程可以解出

$$\begin{aligned} \rho_{m,n}^{AA}(t) &= \rho_{m,n}^{AA}(0) \cos(Q_m^{(1)}t) \cos(Q_n^{(1)}t) \\ &+ \rho_{m+1,n+1}^{BB}(0) \sin(Q_m^{(1)}t) \sin(Q_n^{(1)}t) + i\rho_{m,n+1}^{AB}(0) \cos(Q_m^{(1)}t) \sin(Q_n^{(1)}t) \\ &- i\rho_{m+1,n}^{BA}(0) \sin(Q_m^{(1)}t) \cos(Q_n^{(1)}t), \\ \rho_{m+1,n+1}^{BB}(t) &= \rho_{m,n}^{AA}(0) \sin(Q_m^{(1)}t) \sin(Q_n^{(1)}t) \\ &+ \rho_{m+1,n+1}^{BB}(0) \cos(Q_m^{(1)}t) \cos(Q_n^{(1)}t) - i\rho_{m,n+1}^{AB}(0) \sin(Q_m^{(1)}t) \cos(Q_n^{(1)}t) \\ &+ i\rho_{m+1,n}^{BA}(0) \cos(Q_m^{(1)}t) \sin(Q_n^{(1)}t), \\ \rho_{m,n+1}^{AB}(t) &= \rho_{m,n+1}^{AB}(0) \cos(Q_m^{(1)}t) \cos(Q_n^{(1)}t) \\ &+ \rho_{m+1,n}^{BA}(0) \sin(Q_m^{(1)}t) \sin(Q_n^{(1)}t) + i\rho_{m,n}^{AA}(0) \cos(Q_m^{(1)}t) \sin(Q_n^{(1)}t) \\ &- i\rho_{m+1,n+1}^{BB}(0) \sin(Q_m^{(1)}t) \cos(Q_n^{(1)}t), \\ \rho_{m+1,n}^{BA}(t) &= \rho_{m,n+1}^{AB}(0) \sin(Q_m^{(1)}t) \sin(Q_n^{(1)}t) \\ &+ \rho_{m+1,n}^{BA}(0) \cos(Q_m^{(1)}t) \cos(Q_n^{(1)}t) - i\rho_{m,n}^{AA}(0) \sin(Q_m^{(1)}t) \cos(Q_n^{(1)}t) \\ &+ i\rho_{m+1,n+1}^{BB}(0) \cos(Q_m^{(1)}t) \sin(Q_n^{(1)}t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$Q_n^{(1)} = g_l \sqrt{(n+1)/n!}. \quad (4)$$

对原子自由度求迹后,即可得出光场的密度矩阵元 $\rho_{m,n}$. 当原子初始处于激发态 $|A\rangle$ 时有

$$\begin{aligned} \rho_{m,n}(t) &= \rho_{m,n}(0) \cos(Q_m^{(1)}t) \cos(Q_n^{(1)}t) \\ &+ \rho_{m-1,n-1}(0) \sin(Q_m^{(1)}t) \sin(Q_n^{(1)}t). \end{aligned} \quad (5)$$

在光场与原子多次作用的情况,利用上式即可得出光场密度矩阵元的递推关系. 设每次作用时间均为 t , $\rho_{m,n}(k)$ 代表 k 次作用后的光场密度矩阵元, 则当原子初始在激发态时即有

$$\begin{aligned} \rho_{m,n}(k+1) &= \rho_{m,n}(k) \cos(Q_m^{(1)}t) \cos(Q_n^{(1)}t) \\ &+ \rho_{m-1,n-1}(k) \sin(Q_m^{(1)}t) \sin(Q_n^{(1)}t). \end{aligned} \quad (6)$$

同样可得出原子初始在基态时的递推关系为

$$\begin{aligned} \rho_{m,n}(k+1) &= \rho_{m,n}(k) \cos(Q_m^{(1)}t) \cos(Q_n^{(1)}t) \\ &+ \rho_{m+1,n+1}(k) \sin(Q_m^{(1)}t) \sin(Q_n^{(1)}t). \end{aligned} \quad (7)$$

下面写出吸收算符 \hat{a} 任意直角分量 \hat{a}_ϕ 的不确定度,其中

$$\hat{a}_\phi = \hat{a}_1 \cos \phi + \hat{a}_2 \sin \phi, \quad (8)$$

\hat{a}_1, \hat{a}_2 分别为 \hat{a} 的实部和虚部. 不难求出

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_\phi \rangle &= \sum_n \sqrt{n+1} \operatorname{Re}[\rho_{n,n+1} e^{i\phi}], \\ \langle \hat{a}_\phi^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_n \sqrt{(n+1)(n+2)} \operatorname{Re}[\rho_{n,n+2} e^{2i\phi}] + \frac{1}{4} \sum_n (2n+1) \rho_{n,n}. \end{aligned} \quad (9)$$

若初始时光场为相干态,则有

$$\rho_{mn}(0) = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{m+n}}{\sqrt{m!n!}} e^{i\theta(m-n)} \equiv \bar{\rho}_{mn}(0) e^{i\theta(m-n)}. \quad (10)$$

从递推关系(6)和(7)式可以看出, $\rho_{mn}(k)$ 中亦将含有相位因子 $e^{i\theta(m-n)}$. 它在分出此因子后即成为实数

$$\rho_{mn}(k) = \bar{\rho}_{mn}(k) e^{i\theta(m-n)}, \quad \bar{\rho}_{mn}(k) \text{ 为实数.}$$

将此代入(9)式, 即可求出 k 次作用后 a_0 的不确定度为

$$\delta_{\phi, k}^2 = \langle \hat{a}_\phi^2 \rangle_k - \langle \hat{a}_\phi \rangle_k^2 = C_k + D_k \cos 2(\phi - \theta), \quad (11)$$

其中

$$C_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_n n \bar{\rho}_{nn}(k) - \frac{1}{2} \left[\sum_n \sqrt{n+1} \bar{\rho}_{n, n+1}(k) \right]^2, \\ D_k = \frac{1}{2} \sum_n \sqrt{(n+1)(n+2)} \bar{\rho}_{n, n+2}(k) - \frac{1}{2} \left[\sum_n \sqrt{n+1} \bar{\rho}_{n, n+1}(k) \right]^2. \quad (12)$$

当 $D_k < 0$ 时, $\delta_{\phi, k}^2$ 的最小值出现在 $\phi - \theta$ 方位上. 而当 $D_k > 0$ 时, $\delta_{\phi, k}^2$ 的最小值出现在 $\phi - \theta + \pi/2$ 的方位上.

另外, 若初始时光场密度矩阵只有对角元

$$\rho_{mn}(0) = \rho_n(0) \delta_{mn},$$

则由递推关系(6)和(7)式可以看出 $\rho_{mn}(k)$ 亦将只有对角元, 即

$$\rho_{mn}(k) = \rho_n(k) \delta_{mn}.$$

于是 $D_k = 0$, 相应地, $\delta_{\phi, k}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \langle n \rangle_k$, 与 ϕ 无关而且大于 $1/4$ (除非是真空态), 即无挤压发生.

为书写简便起见, 下面取 α 为实数即 $\theta = 0$. 这样只需计算 δ_i^2 和 δ_r^2 , 最小值即为其中的一个.

三

对单光子跃迁, 数值计算表明, 不论原子初态是激发态还是基态, 最小不确定度都出

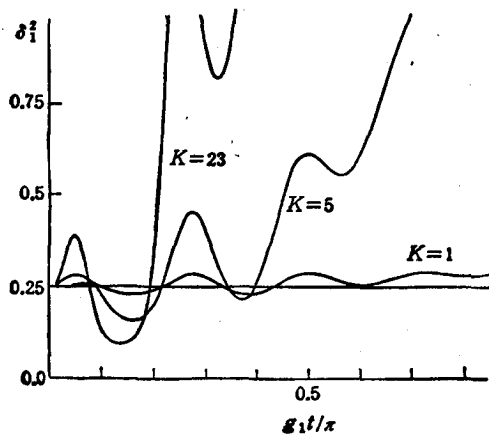


图1 $N = 20$, 原子初始在激发态

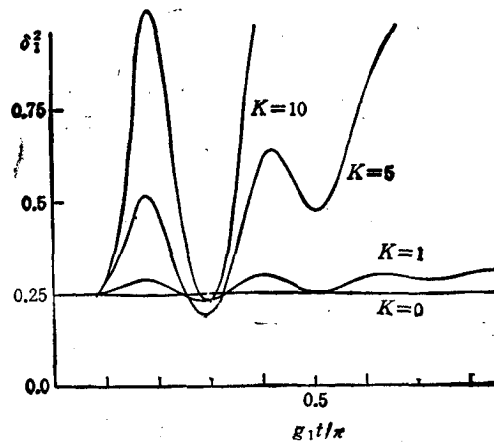


图2 $N = 20$, 原子初始在基态

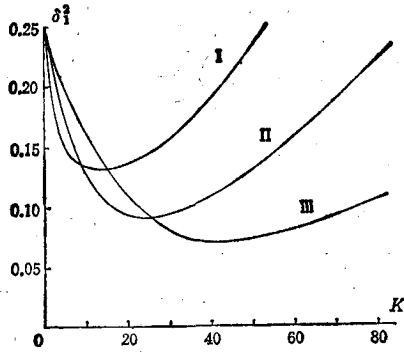


图3 原子初始在激发态 I 为 $N = 10, g_1 t = 0.151\pi$; II 为 $N = 20, g_1 t = 0.128\pi$; III 为 $N = 30, g_1 t = 0.105\pi$

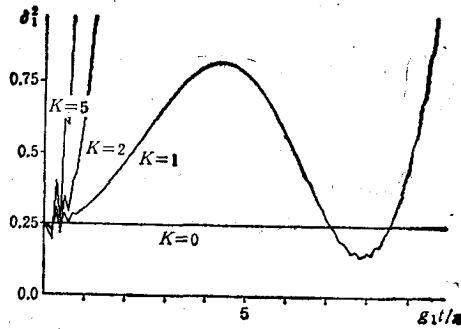


图4 $N = 20$, 原子初始在激发态

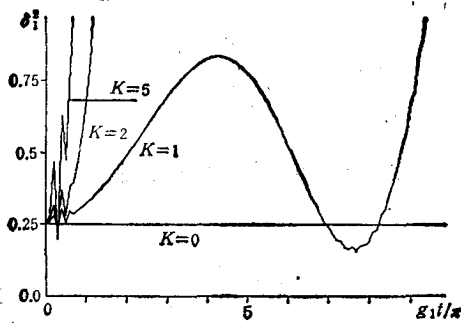


图5 $N = 20$, 原子初始在基态

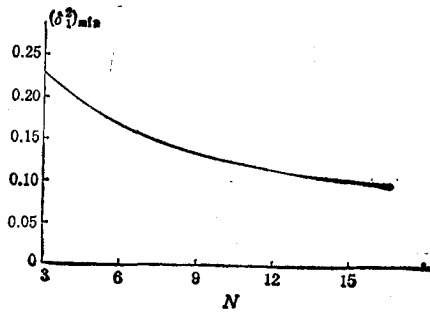


图6 原子初始在激发态

现在实轴方向(如前所述, α 已取为实数), 即由 δ_1 表示。下面用 K 表示总的的作用次数, t 仍表示每次作用时间。图 1 和图 2 给出初始平均光子数 N 等于 20 时, 对于不同的 K , 在小的作用时间范围 ($g_1 t < \pi$), δ_1^2 随 t 的变化。可以看到, 不论原子初始是在激发态还是基态, 在适当的 $g_1 t$ 值范围, 通过多次作用可以压低 δ_1^2 的值。但这也有一个限度。对于固定的 t , K 太大, 压缩反而变坏。图 3 给出原子初始在激发态的情况, 对优选的作用时间 δ_1^2 随 K 的变化。

从图 3 还可看出, 当 N 增加时, 可以达到较大的压缩, 但所需的作用次数 K 要相应地增大。

图 4 和图 5 给出在较大的作用时间 ($g_1 t \geq \sqrt{N}\pi$) 范围, δ_1^2 随 t 的变化。可以看到, 仅当 $K = 1$ 时出现 Kuklinski 和 Madajczyk 所指出的再压缩^[2]。多次作用情况在此时间范围不出现压缩。

对于给定的 N , δ_1^2 作为 t 和 K 的函数, 存在一个最小值 $(\delta_1^2)_{\min}$, 图 6 给出该值随 N 的变化。可以看到, N 愈大, $(\delta_1^2)_{\min}$ 愈小。

四

现在讨论双光子跃迁的情况。

对于一定的 N 和原子初态, δ_1 和 δ_2 将为 t 和 K 的函数。计算表明当 N 大时 $\delta_1(K, t)$ 和 $\delta_2(K, t)$ 具有下列性质:

1) 无论原子初态为激发态还是基态, 当 N 大时, $\delta_1(K, t)$ 和 $\delta_2(K, t)$ 都具有周期性,

$$\delta_1(K, t + 2\pi/g_2) = \delta_1(K, t), \quad \delta_2(K, t + 2\pi/g_2) = \delta_2(K, t). \quad (13)$$

实际上当 $N \geq 20$ 时, 这种周期性就已很好地显示。

2) 当原子初态为激发态时, 压缩只出现在 δ_1 上, 较大压缩的主要位置在

$$t = (2n + 1)\pi/g_2$$

(即每个周期的中点)附近以及 $t = 2n\pi/g_2$ 的两侧。当原子初态为基态时, δ_1 和 δ_2 都可能出现压缩。对于 δ_1 , 较大压缩的主要位置在 $t = (2n + 1)\pi/g_2$ 的两侧, 对于 δ_2 , 位置则在 $t = 2n\pi/g_2$ 附近。

在探讨深度压缩时, 对于原子初态为激发态和基态, 最大压缩分别位于 $\delta_1(K, \pi/g_2)$ 和 $\delta_2(K, \pi/g_2)$ 。

3) 当 K 增加时, 上述最佳值 $\delta_1(K, \pi/g_2)$ 和 $\delta_2(K, \pi/g_2)$ 开始都减少, 表明压缩的增强, 但到一定程度后, K 再增大, 压缩反而减弱。随着 N 的增大, 最大压缩程度提高, 而所需的次数亦增大。图 7 和图 10 曲线 1 分别给出原子为激发态时的 $\delta_1^2(K, \pi/g_2)$ 和为基态时的 $\delta_2^2(K, \pi/g_2)$ 随 K 的变化。

下面对双光子跃迁情况的压缩进行解析的研究。对典型的作用时间 $t = \pi/g_2$, 在 N 大时可以推出不确定度 δ_1 或 δ_2 随 N 和 K 变化的解析公式。这是因为当 N 大时, 在 (12) 式求和中有重要意义的 n 都较大, 于是

$$\begin{aligned} \Omega_n t &= g_2 t \sqrt{(n+1)(n+2)} \\ &\approx g_2 t \left(n + \frac{3}{2} - \frac{1}{8n} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

在上式(以及下文)中略去了 $\Omega_n^{(0)}$ 中的

上角标(2)。由于 n 为大数, (14) 式等号右方最后一项 $-gt/8n$ 为小量。如果它可以忽略(下面将对此问题作进一步研究), 则从 (3) 式可以看出 $\rho_{m^A}^{A^A}(t + 2\pi/g_2)$, $\rho_{m^B}^{A^B}(t + 2\pi/g_2)$, $\rho_{m^A}^{B^A}(t + 2\pi/g_2)$ 和 $\rho_{m^B}^{B^B}(t + 2\pi/g_2)$ 分别等于 $\rho_{m^A}^{A^A}(t)$, $\rho_{m^B}^{A^B}(t)$, $\rho_{m^A}^{B^A}(t)$ 和 $\rho_{m^B}^{B^B}(t)$ 。从而对原子求迹后所得出的光子密度矩阵元亦将具有周期性, 周期即为 $2\pi/g_2$ 。

另外, (6) 式可以写成

$$\begin{aligned} \rho_{mn}(k+1, t) &= \rho_{mn}(k, t) \cos \Omega_m t \cos \Omega_n t \\ &+ \rho_{m-2, n-2}(k, t) \sin \Omega_{m-2} t \sin \Omega_{n-2} t, \end{aligned} \quad (15)$$

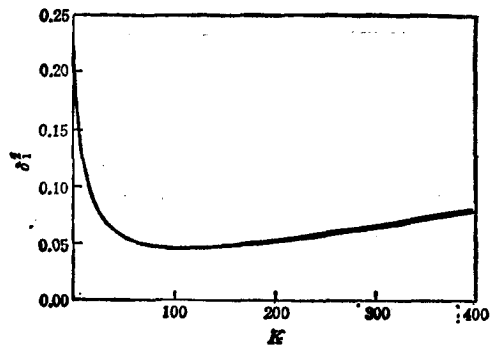


图 7 $N = 20, g_1 t = \pi$, 原子初始在激发态

其中 t 代表单次作用时间。这样,当 $\rho(k, t)$ 具有周期 $2\pi/g_2$ 时, $\rho(k+1, t)$ 亦将具有周期 $2\pi/g_2$ 。通过递推即可得出 $\rho_{mn}(K, t)$ 具有周期 $2\pi/g_2$ 。对于(7)式(原子初态为基态)也有同样的推论。这就解释了前面所述的 $\delta_1(K, t)$ 与 $\delta_2(K, t)$ 的周期性(13)式。

根据以上讨论,当 $t = 2l\pi/g_2$ 时,光场都将回到原来的相干态,因而不产生压缩。

现在再来看 t 等于半个周期即 π/g_2 时的特点。当入射原子处在激发态时,半个周期后,它将完全变到基态,光场变化由(5)式给出

$$\rho_{mn}(\pi/g_2) = (-1)^{m-n} \rho_{m-2, n-2}(0). \quad (16)$$

从上式可以得知,若初始时光场在纯态,则到 $t = \pi/g_2$ 时,它仍回到纯态。另外, $t = \pi/g_2$ 时的光子数分布曲线 $\rho_{nn}(\pi/g_2)$ 与初始时分布曲线的形状相同,只是向 n 增大的方向移动了两格。

类似地,当入射原子处在基态时,半个周期后,它将完全变到激发态,同时光场亦回到纯态,其密度矩阵元为

$$\rho_{mn}(\pi/g_2) = (-1)^{m-n} \rho_{m+2, n+2}(0). \quad (17)$$

经过 K 次作用,结果即为¹⁾

$$\begin{aligned} \rho_{mn}(K, \pi/g_2) &= (-1)^{(m-n)K} \rho_{m-2K, n-2K}(0), \quad (\text{入射原子在激发态}), \\ \rho_{mn}(K, \pi/g_2) &= (-1)^{(m-n)K} \rho_{m+2K, n+2K}(0), \quad (\text{入射原子在基态}). \end{aligned} \quad (18)$$

在进一步推导 δ_1 和 δ_2 之前,先来讨论(14)式等号右方 $-1/8n$ 项可忽略的问题。

由于有重要意义的 $n \sim 1/N$, 故对 Q_n 来说此修正项为小项。但是,在计算 $\delta_1(K, t)$ 和 $\delta_2(K, t)$ 时,首先要对(6)式或(7)式进行 K 次迭代,才能从 $\rho(0)$ 得出 $\rho(K)$, 然后还要将 $\rho(K)$ 的相应矩阵元乘上 n 或 $\sqrt{n+1}$ 或 $\sqrt{(n+1)(n+2)}$ 因子并对 n 求和(参见(12)式)。这样(14)式中的修正项 $(-1/8n)$ 是否可略去并不明显,需要进一步研究。

在下面讨论中,先考虑原子初始在激发态的情况,允许 K 的取值从 1 一直到 N^2 的量级。对 t 只取优选值 π/g_2 。令

$$\alpha_{mn} = \pi^2/64mn, \quad \beta_{mn} = \frac{\pi^2}{128} [1/(m-2)^2 + 1/(n-2)^2], \quad (19)$$

则从(6)式得

$$\rho_{mn}(k+1) = (-1)^{m-n} [\rho_{m-2, n-2}(k)(1 - \beta_{mn}) + \rho_{mn}(k)\alpha_{mn}]. \quad (20)$$

经过 K 次重复迭代,并只保留 α 和 β 的一次项,得

$$\begin{aligned} \rho_{m+2K, n+2K}(K) &= (-1)^{K(m-n)} \rho_{mn}(0) \left(1 - \sum_{k=1}^K \beta_{m+2k, n+2k} \right) \\ &+ (-1)^{K(m-n)} \rho_{m+2, n+2}(0) \sum_{k=1}^K \alpha_{m+2k, n+2k}. \end{aligned} \quad (21)$$

于是²⁾

$$A_1 \equiv \sum_n \rho_{nn}(K) = \sum_n (n+2K) \tilde{\rho}_{n+2K, n+2K}(K)$$

1) $K=0$ 时 ρ_{mn} 与 t 无关, 故记作 $\rho_{mn}(0)$ 。

2) 由于 α 已取为实数, 下式中的 $\tilde{\rho}_{mn}$ 实即 ρ_{mn} 。

$$\begin{aligned}
& - \sum_n (n+2K) \bar{\rho}_{nn}(0) \left(1 - \sum_{k=1}^K \beta_{n+2k, n+2k} \right) \\
& + \sum_n (n+2K-2) \bar{\rho}_{nn}(0) \sum_{k=1}^K \alpha_{n+2k-2, n+2k-2}, \\
A_2 \equiv & \sum_n \sqrt{n+1} \bar{\rho}_{n, n+1}(K) = (-1)^K \sum_n \sqrt{n+2K+1} \bar{\rho}_{n, n+1}(0) \\
& \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^K \beta_{n+2k, n+2k+1} \right) + (-1)^K \sum_n \sqrt{n+2K-1} \bar{\rho}_{n, n+1}(0) \sum_{k=1}^K \alpha_{n+2k-2, n+2k-1}, \quad (22) \\
A_3 \equiv & \sum_n \sqrt{(n+1)(n+2)} \bar{\rho}_{n, n+2}(K) \\
& - \sum_n \sqrt{(n+2K+1)(n+2K+2)} \bar{\rho}_{n, n+2}(0) \\
& \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^K \beta_{n+2k, n+2k+2} \right) + \sum_n \sqrt{(n+2K-1)(n+2K)} \sum_{k=1}^K \alpha_{n+2k-2, n+2k}
\end{aligned}$$

由于 m 和 n 都是大数¹⁾, 故上式中出现的对 k 求和式可用积分式代替, 即

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{(n+2k)(m+2k)} \approx \frac{1}{2} \int_1^{2K+1} \frac{dx}{(n+x)(m+x)}. \quad (23)$$

当 $m=n$ 和 $m \neq n$ 时, 积分结果分别为 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2K+1} \right)$ 和

$$\frac{1}{2(m-n)} \left(\ln \frac{m+1}{n+1} - \frac{m+2K+1}{n+2K+1} \right).$$

于是化出

$$A_1 \approx \sum_n P_n (n+2K) - \frac{\pi^2}{64} \sum P_n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2K-1} \right), \quad (24)$$

其中

$$P_n = \frac{e^{-N} N^n}{n!}.$$

由此得

$$A_1 \approx N + 2K + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (25)$$

同样, 通过展开化出

$$\begin{aligned}
A_2 \approx & (-1)^K \sum_n P_n \sqrt{\frac{N}{n+1}} \sqrt{n+2K+1} - (-1)^K \frac{\pi^2}{128} \sum_n P_n \sqrt{\frac{N}{n+1}} \\
& \left[\sqrt{n+2K+1} \left(\frac{1}{6n^3} - \frac{1}{6(n+2K)^3} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+2K+1}} \right]
\end{aligned}$$

1) 由(21)式, 只当 m 和 n 量级上达到 N 时, $\rho_{m+2k, n+2k}(K)$ 才显著不为零。

$$\cdot \left(\frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + 2K - \frac{1}{2}} \right) \Bigg] \\ = (-1)^k \sum_n P_n \sqrt{\frac{N}{n+1}} \sqrt{n+2K+1} + O\left(\frac{\sqrt{N+2K}}{N^3}\right) + O\left(\frac{1}{N\sqrt{N+2K}}\right). \quad (26)$$

$$\text{于是 } A_2^2 = \left(\sum_n P_n \sqrt{\frac{N}{n+1}} \sqrt{n+2K+1} \right)^2 + O\left(\frac{N+2K}{N^3}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (27)$$

仿上还可得到

$$A_3 = \sum_n P_n \frac{N}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \sqrt{(n+2K+1)(n+2K+2)} \\ + O\left(\frac{N+2K}{N^3}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (28)$$

将(25),(27)和(28)式代入(12)式,即可看出: 在

$$1/N \ll 1, \quad K/N^3 \ll 1 \quad (29)$$

条件下,修正项可以略去.

五

在略去修正项后, A_1, A_2, A_3 即可求出. 通过泰勒展开,并利用

$$\sum_n P_n (n-N) = 0, \quad \sum_n P_n (n-N)^2 = N, \\ \sum_n P_n (n-N)^3 = N, \quad \sum_n P_n (n-N)^4 = 3N^2 + N, \quad (30)$$

求出的结果为

$$A_1 \approx N + 2K, \\ A_2^2 \approx N + 2K - \frac{K^2}{N(N+2K)} - \frac{3K^2}{N^2(N+2K)} + \frac{7K^3}{N^2(N+2K)^2} \\ - \frac{7}{2} \frac{K^4}{N^2(N+2K)^3}, \\ A_3 \approx N + 2K - \frac{K}{N} - \frac{1}{2} \frac{K^2}{N^2(N+2K)}. \quad (31)$$

由此即得 $\nu = \pi/g_2$ 时 δ_1 和 δ_2 的公式. 它们并可简化成

$$\delta_1^2 = \frac{1}{4} \frac{N}{N+2K} + \frac{1}{16} \frac{K}{N^2}, \quad \delta_2^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2K}{N} \right) + \frac{K}{8N^2}. \quad (32)$$

此公式适用的条件是(29)式,以及入射原子是在激发态.

从图 8 和图 9 可以看出,当 N 达到 10^2 数量级时,在图中 K 的变化范围内,由上式计算出的结果与从数值计算的精确结果符合得很好.

从(32)式可以得出下面几点结论:

1) δ_1 总比 δ_2 小.

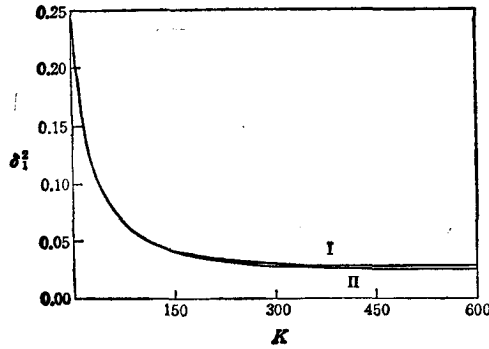


图 8 $N = 50, g_1 t = \pi$, 原子初始在激发态 I 为精确结果;
II 为按(32)式计算的结果

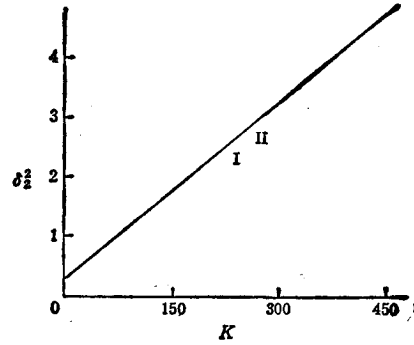


图 9 图注同图 8

2) 当(32)式中 K/N^2 项与前项相比可以略去时,

$$\delta_1^2 \delta_2^2 \approx 1/16, \quad (33)$$

从而光场近似为具有最小测不准度的纯态, 其具体表达式为

$$| \rangle^{(K)} \approx \sum_n (-i)^n e^{-\frac{1}{2}N} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n + 2K\rangle. \quad (34)$$

3) 当 K 从 1 增加时, δ_1 开始时减少, 但到一定限度时又回升. 使 δ_1 取极小值的 K 值为

$$K_0 \approx \sqrt{2N^{3/2}}, \quad (35)$$

相应的 δ_1^2 极小值为

$$(\delta_1^2)_{\min} \approx \frac{1}{4\sqrt{2N}}. \quad (36)$$

如前所述, N 愈大, $(\delta_1^2)_{\min}$ 愈小, $N \rightarrow \infty$ 时它趋于零. 实际上 δ_1^2 随 K 的变化开始阶段下降较快, 以后有一范围变化较慢, 故 K 并不需要取到(35)式所给出的那样大的值.

态 $| \rangle^{(K)}$ 也是振幅挤压态. 从(34)式或(18)式不难求出

$$\langle \hat{n} \rangle = N + 2K,$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^2 \rangle &= \sum_n (n + 2K)^2 \rho_{n+2K, n+2K}(K) = \sum_n (n + 2K)^2 \rho_{n,n}(0) \\ &= N^2 + N + 4NK + 4K^2. \end{aligned}$$

于是仍有 $\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = N$, (37)

与初始光场相同. 而 $\frac{1}{\langle n \rangle} \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2} = \frac{\sqrt{N}}{N + 2K}$, (38)

即光子数服从亚泊松分布. 当 K 取(35)式所给出的 K_0 时, 上式等号右方的值为 $\frac{1}{2\sqrt{2N}}$, 是一个小值.

以上讨论的是入射原子在激发态的情况, 当入射原子在基态时, 只需将(32)式中的 K 换成 $-K$, 结果即为 (略去了 $\frac{K}{N^2}$ 项, 参见条件(40)式)

$$\delta_1^2 = \frac{1}{4} \frac{N}{N-2K}, \quad \delta_2^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2K}{N}\right), \quad (39)$$

其适用条件为

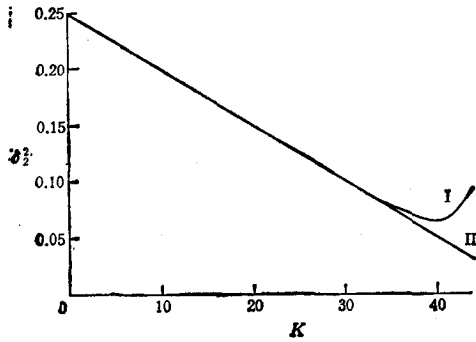


图 10 $N = 100, g, t = \pi$, 原子初始在基态
I 为精确结果; II 为按(39)式计算的结果

$$\frac{1}{N} \ll 1, \quad \frac{N-2K}{3\sqrt{N}} > 1. \quad (40)$$

可以看到, 这时 $\delta_2 < \delta_1$, 而且在(39)式适用的范围内, δ_2^2 随 K 直线下降. $\delta_1^2 \delta_2^2 = 1/16$ 仍成立. δ_2^2 可能达到的最小值其量级仍为 $1/\sqrt{N}$.

图 10 给出按(39)式计算的 δ_2^2 与数值计算的精确结果相比较. 在曲线右端符合变坏是由于(40)式的第二式已不满足或满足得不好的缘故.

- [1] P. Meystre and M. S. Zubairy, *Phys. Lett.*, **89A**(1982), 390.
 [2] C. K. Hong and L. Mandel, *Opt. Commun.*, **42**(1982), 437; *Phys. Rev.*, **A32**(1985), 974;
 A. S. Shumovsky, F. Kein and E. I. Aliskenderov, *Phys. Lett.*, **124A**(1987), 351;
 C. C. Gerry and P. J. Moyer, *Phys. Rev.*, **38A**(1988), 5665;
 J. R. Kuklinski and J. L. Madajczyk, *Phys. Rev.*, **37A**(1988), 3175;
 M. H. Mahran and A.-S. F. Obada, *Phys. Rev.*, **40A**(1989), 4476.

GENERATION OF SQUEEZED LIGHT IN IDEAL CAVITY BY INJECTING ATOMS

CAO CHANG-QI DING XIAO-HONG

Department of Physics, Peking University, Beijing 100871

(Received 31 July 1991)

ABSTRACT

Two level atoms are injected into ideal cavity one by one to interact with the light field therein which initially is in coherent state. In one-photon transition case, the quadrature variance could be reduced by this means for suitably chosen interaction time t . But there exists some limitation, the squeezing will become worse if the number of times K is too large. In two-photon transition case, for large mean photon number N and optimum interaction time $t = \pi/g$, analytical formula for dependence of quadrature variance on N and K can be obtained. This formula shows that deep squeezing can be achieved by suitably chosen K . And the larger the N is, the stronger the achievable squeezing will be.

PACC: 4250