光子湮没算符高次幂本征态的压缩性质

詹佑邦
淮阴师范专科学校物理系，淮阴 223001
1991年8月12日收到

本文研究光子湮没算符高次幂 $a^k(k\geq 3)$ 的 k 个正交归一本征态的压缩性质，发现当 k 为偶数时，这些本征态均可有振幅 N 次方 ($k=2N$) 压缩存在。

PACC: 4250

一、引　言

由于辐射场的压缩效应在光通讯和引力波检测等方面具有潜在的应用，因而一直受到人们普遍关注。有关辐射场的压缩态、反聚束等非经典效应的研究，目前已取得很大的进展，在理论和实验上已有许多方案实现这些非经典效应。最近，人们开始关注在理论上构造出量子力学所允许的新的光场态，期望通过对这些光场态的研究发现那些迄今尚未被发现的非经典效应。文献[1]提示一种构造光子湮没算符高次幂 a^k 的正交归一本征态的一般方法，并研究 $k=3$ 时的压缩和反聚束性质。文献[2]具体研究 a^k 的正交归一本征态的数学结构及其量子统计性质，成功地给出 a^k 的 k 个正交归一本征态的普遍表达式。然而文献[2]认为 $a^k(k\geqslant 3)$ 的本征态不存在振幅平方压缩以及更高阶的压缩。本文研究光子湮没算符高次幂 a^k 的本征态的压缩性质，结果表明，a^k 的正交归一本征态不仅可存在振幅平方压缩 ($k=4$ 时)，而且还可存在任意高阶的振幅 N 次方压缩 ($k=2N$ 时)。

二、a^k的正交归一本征态

光子湮没算符高次幂 a^k 的本征值为 α^k 的正交归一本征态可表示为[2]

$$|\psi_m\rangle_k = A_m^{-\frac{1}{2}}(|\alpha|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{kn+m}}{\sqrt{(kn+m)!}}|kn+m\rangle, \tag{1}$$

式中 α 为复参数，$\alpha=|\alpha|e^{i\theta}$，$m$ 的可能取值为 $m=0,1,2,\cdots,(k-1)$，态矢符号中的下标 k 表示该态是属于算符 a^k 的本征态，有

$$a^k|\psi_m\rangle_k = \alpha^k|\psi_m\rangle_k. \tag{2}$$

(1)式中的系数 $A_m(|\alpha|^2)$ 为一级数

$$A_m(|\alpha|^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2(kn+m)}}{(kn+m)!}, \tag{3}$$

有

$$\sum_{m=0}^{k-1} A_m(|\alpha|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{|\alpha|^2} \tag{4}$$

和

$$A_m(|\alpha|^2) = A_0^{(k-m)}(|\alpha|^2), \tag{5}$$

式中 $A_0^{(k-m)}(|\alpha^2|)$ 表示 $A_0(|\alpha|^2)$ 对 $|\alpha|^2$ 的$(k-m)$阶导数，$A_0(|\alpha|^2)$ 的解析式为

$$A_0(|\alpha|^2) = \frac{1}{k} e^{|\alpha|^2} + \sum_{l=1}^{[\frac{k}{2}]} \Big[B_l \cos\Big(|\alpha|^2 \sin \frac{2l\pi}{k}\Big) + D_l \sin\Big(|\alpha|^2 \sin \frac{2l\pi}{k}\Big)\Big] \exp\Big(|\alpha|^2 \cos \frac{2l\pi}{k}\Big), \tag{6}$$

式中的积分常数 B_l 和 D_l 可利用下式求出：

$$\frac{1}{k} e^{|\alpha|^2} + \sum_{l=1}^{[\frac{k}{2}]} \Big[B_l \cos\Big(|\alpha|^2 \sin \frac{2l\pi}{k}\Big) + D_l \sin\Big(|\alpha|^2 \sin \frac{2l\pi}{k}\Big)\Big] \exp\Big(|\alpha|^2 \cos \frac{2l\pi}{k}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2kn}}{(kn)!}. \tag{7}$$

若已给定 k 的某一确定值，将(7)式等号左端展开成 $|\alpha|^2$ 的幂级数，然后比较方程等号两端$|\alpha^2|$ 同次幂的系数，即可求出 B_l 和 D_l，从而(6)式中的 $A_0(|\alpha|^2)$ 就可完全确定，再由(5)式求出 $A_m(|\alpha|^2)$，这样由 (1) 式表示的 a^k 的 k 个正交归一本征态也就完全确定。

已经知道[2]，a^k 的 k 个正交归一本征态可构成一个完备的 Hilbert 空间，在这个空间里，通过光子湮没算符 a 的连续作用可实现这 k 个本征态间的相互转换，即有

$$a^r|\psi_0\rangle_k = \alpha^r A_0^{-\frac{1}{2}} A_{k-r}^{\frac{1}{2}} |\psi_{k-r}\rangle_k, \quad (r = 1, 2, \cdots, k). \tag{8}$$

三、$|\psi_m\rangle_k$ 的振幅平方压缩

不难证明[2]，$a^k(k \geqslant 3)$ 的 k 个正交归一本征态 $|\psi_m\rangle_k$ 均不存在二阶压缩效应。现在讨论 $|\psi_m\rangle_k(k \geqslant 3)$ 的振幅平方压缩性质.

定义两个分别与场振幅平方的实部和虚部相对应的自轭算符[3]

$$Y_1 = \frac{1}{2}(a^2 + a^{+2}), \qquad Y_2 = \frac{1}{2i}(a^2 - a^{+2}), \tag{9}$$

Hillery[3] 已证明光子湮没算符平方 a^2 的两个正交归一本征态 $|\alpha\rangle_e$（偶相干态）和 $|\alpha\rangle_o$（奇相干态）为 Y_1 和 Y_2 的最小测不准态. Y_1 和 Y_2 满足的对易关系和测不准关系分别为

$$[Y_1, Y_2] = i(2\hat{N} + 1) \tag{10}$$

和

$$\Delta Y_1 \Delta Y_2 \geqslant \left\langle \hat{N} + \frac{1}{2} \right\rangle, \tag{11}$$

式中 $\hat{N} = a^+a$ 为粒子数算符。如果 Y_1 或 Y_2 的起伏满足

$$\langle \Delta Y_j^2 \rangle < \left\langle \hat{N} + \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (j = 1,2) \tag{12}$$

或者

$$:\Delta Y_1^2: = \langle \Delta Y_1^2 \rangle - \left\langle \hat{N} + \frac{1}{2} \right\rangle$$
$$= \frac{1}{4}[\langle 2a^{+2}a^2 + a^{+4} + a^4 \rangle - \langle a^{+2} + a^2 \rangle^2] < 0, \tag{13a}$$

$$:\Delta Y_2^2: = \langle \Delta Y_2^2 \rangle - \left\langle \hat{N} + \frac{1}{2} \right\rangle$$
$$= \frac{1}{4}[\langle 2a^{+2}a^2 - (a^{+4} + a^4) \rangle + \langle a^{+2} - a^2 \rangle^2] < 0, \tag{13b}$$

则称该光场处于振幅平方压缩态。已经证明在(12)式或(13)式意义下的光场态为非经典态[3]。

因为 $|\phi_m\rangle_k$ 是 a^k 的本征值为 α^k 的本征态，利用(2)式以及 $|\phi_m\rangle_k$ 间的正交关系，不难证明仅当 $f = k_n (n = 1,2,\cdots)$ 时，有

$$_k\langle \phi_m | a^f | \phi_m \rangle_k = \alpha^{kn}, \tag{14}$$

若 $f \neq kn$，则有

$$_k\langle \phi_m | a^f | \phi_m \rangle_k = 0. \tag{15}$$

又由(8)式有

$$_k\langle \phi_s | a^{+r}a^r | \phi_s \rangle_k = |\alpha|^{2r} \frac{A_{k-r+s}}{A_s},$$
$$(s = 0,1,2,\cdots,(r-1)), \tag{16a}$$

$$_k\langle \phi_t | a^{+r}a^r | \phi_t \rangle_k = |\alpha|^{2r} \frac{A_{t-r}}{A_t},$$
$$(t = r, r+1,\cdots,(k-1)). \tag{16b}$$

下面计算 Y_1 和 Y_2 在 $a^k (k \geqslant 3)$ 的 k 个正交归一本征态中的起伏情况。由(14)和(15)式，有

$$_k\langle \phi_m | a^4 | \phi_m \rangle_k = \alpha^4 \delta_{k,4}, \tag{17}$$

即仅当 $k = 4$ 时，a^4 在 $|\phi_m\rangle_k$ 中的期望值不为零。在 $k = 4$ 时，利用(5)—(7)式和(13)—(17)式，可得到 Y_1 和 Y_2 在 a^4 的 4 个正交归一本征态中的起伏为

$m = 0$

$$:\Delta Y_1^2: = \frac{|\alpha|^4}{2}\left[\frac{\mathrm{ch}|\alpha|^2(1+\cos 4\theta) - \cos|\alpha|^2(1-\cos 4\theta)}{\mathrm{ch}|\alpha|^2 + \cos|\alpha|^2}\right], \tag{18a}$$

$$:\Delta Y_2^2: = \frac{|\alpha|^4}{2}\left[\frac{\mathrm{ch}|\alpha|^2(1-\cos 4\theta) - \cos|\alpha|^2(1+\cos 4\theta)}{\mathrm{ch}|\alpha|^2 + \cos|\alpha|^2}\right]; \tag{18b}$$

$m = 1$

$$:\Delta Y_1^2: = \frac{|\alpha|^4}{2}\left[\frac{\mathrm{sh}|\alpha|^2(1+\cos 4\theta)-\sin|\alpha|^2(1-\cos 4\theta)}{\mathrm{sh}|\alpha|^2+\sin|\alpha|^2}\right], \tag{18c}$$

$$:\Delta Y_2^2: = \frac{|\alpha|^4}{2}\left[\frac{\mathrm{sh}|\alpha|^2(1-\cos 4\theta)-\sin|\alpha|^2(1+\cos 4\theta)}{\mathrm{sh}|\alpha|^2+\sin|\alpha|^2}\right]; \tag{18d}$$

$m=2$

$$:\Delta Y_1^2: = \frac{|\alpha|^2}{2}\left[\frac{\mathrm{ch}|\alpha|^2(1+\cos 4\theta)+\cos|\alpha|^2(1-\cos 4\theta)}{\mathrm{ch}|\alpha|^2-\cos|\alpha|^2}\right], \tag{18e}$$

$$:\Delta Y_2^2: = \frac{|\alpha|^4}{2}\left[\frac{\mathrm{ch}|\alpha|^2(1-\cos 4\theta)+\cos|\alpha|^2(1+\cos 4\theta)}{\mathrm{ch}|\alpha|^2-\cos|\alpha|^2}\right]; \tag{18f}$$

$m=3$

$$:\Delta Y_1^2: = \frac{|\alpha|^4}{2}\left[\frac{\mathrm{sh}|\alpha|^2(1+\cos 4\theta)+\sin|\alpha|^2(1-\cos 4\theta)}{\mathrm{sh}|\alpha|^2-\sin|\alpha|^2}\right], \tag{18g}$$

$$:\Delta Y_2^2: = \frac{|\alpha|^4}{2}\left[\frac{\mathrm{sh}|\alpha|^2(1-\cos 4\theta)+\sin|\alpha|^2(1+\cos 4\theta)}{\mathrm{sh}|\alpha|^2-\sin|\alpha|^2}\right]. \tag{18h}$$

由(18)诸式易见,只要适当选择相角θ的取值, a^4 的4个正交归一本征态在 Y_1 和 Y_2 两个方向上都能够存在振幅平方压缩,压缩存在的条件为

$$2n\pi+\frac{3}{2}\pi<|\alpha|^2<2(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}, \quad (m=0);$$

$$2n\pi<|\alpha|^2<(2n+1)\pi \qquad (m=1);$$

$$2n\pi+\frac{\pi}{2}<|\alpha|^2<2n\pi+\frac{3}{2}\pi, \quad (m=2);$$

$$(2n+1)\pi<|\alpha|^2<2(n+1)\pi, \quad (m=3);$$

$$\theta=\begin{cases}\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}, & (Y_1\ 方向);\\[2ex] \dfrac{n\pi}{2}, & (Y_2\ 方向),\end{cases}$$

式中 $n=0,1,2,\cdots$。

不难证明,仅当 $k=4$ 时, a^4 的本征态可存在振幅平方压缩;当 $k\neq 4$ 时,由于有

$${}_k\langle a^{+4}\rangle_k={}_k\langle a^4\rangle_k={}_k\langle a^{+2}\rangle_k={}_k\langle a^2\rangle_k=0,$$

有

$${}_k\langle\psi_m|:\Delta Y_1^2:|\psi_m\rangle_k={}_k\langle\psi_m|:\Delta Y_2^2:|\psi_m\rangle_k$$

$$=\begin{cases}\dfrac{|\alpha|^4}{2}\dfrac{A_{k+m-2}}{A_m}, & (m=0,1);\\[2ex] \dfrac{|\alpha|^4}{2}\dfrac{A_{m-2}}{A_m}, & (m=2,3,\cdots,(k-1)),\end{cases} \tag{19}$$

即 Y_1 和 Y_2 在 $a^k(k\neq 4)$ 的 k 个本征态中是等起伏的,但决不可能存在振幅平方压缩。

四、$|\psi_m\rangle_k$ 的振幅 N 次方压缩

类似于对 a^2 定义 Y_1 和 Y_2,可定义两个由光子湮没算符N次方 a^N 及其共轭算符

a^{+N} 构成的自轭算符[2,4]

$$F_{1(N)}=\frac{1}{2}(a^N+a^{+N}),\ F_{2(N)}=\frac{1}{2i}(a^N-a^{+N}), \tag{20}$$

它们分别对应于光场复振幅N次方的实部和虚部[2]. 已经知道，光子湮没算符N次方 a^N 的N个正交归一本征态是算符 $F_{1(N)}$ 和 $F_{2(N)}$ 的最小测不准态[2].

利用算符公式[5]

$$a^n a^{+m}=\sum_{l=0}^{\min(m,n)}\frac{m!n!a^{+m-l}a^{n-l}}{l!(m-l)!(n-l)!}, \tag{21}$$

不难证明算符 $F_{1(N)}$ 和 $F_{2(N)}$ 满足的对易关系为

$$[F_{1(N)},F_{2(N)}]=\frac{i}{2}[a^N,a^{+N}]$$

$$=\frac{i}{2}W_{(N)}, \tag{22}$$

其中

$$W_{(N)}=\sum_{l=1}^{N}\frac{(N!)^2a^{+N-l}a^{N-l}}{l![(N-l)!]^2}, \tag{23}$$

(22)式导致的测不准关系为

$$\Delta F_{1(N)}\Delta F_{2(N)}\geqslant\frac{1}{4}\langle W_{(N)}\rangle. \tag{24}$$

如果 $F_{1(N)}$ 或 $F_{2(N)}$ 的起伏满足

$$\langle\Delta F_{j(N)}^2\rangle<\frac{1}{4}\langle W_{(N)}\rangle,\ (j=1,2) \tag{25}$$

或者

$$:\Delta F_{1(N)}^2:=\langle\Delta F_{1(N)}^2\rangle-\frac{1}{4}\langle W_{(N)}\rangle$$

$$=\frac{1}{4}[\langle 2a^{+N}a^N+a^{+2N}+a^{2N}\rangle-\langle a^{+N}+a^N\rangle^2]<0 \tag{26a}$$

$$:\Delta F_{2(N)}^2:=\langle\Delta F_{2(N)}^2\rangle-\frac{1}{4}\langle W_{(N)}\rangle$$

$$=\frac{1}{4}[\langle 2a^{+N}a^N-(a^{+2N}+a^{2N})\rangle+\langle a^{+N}-a^N\rangle^2]<0, \tag{26b}$$

称该光场存在N阶压缩[4].

如果将这种高阶压缩与振幅平方压缩的定义相比较，不难看出这种N阶压缩实际上是振幅平方压缩的自然推广. 事实上，当 $N=2$ 时，(24)和(25)式成为

$$\Delta F_{1(2)}\Delta F_{2(2)}\geqslant\left\langle\hat{N}+\frac{1}{2}\right\rangle \tag{27}$$

及

$$\langle\Delta F_{j(2)}^2\rangle<\left\langle\hat{N}+\frac{1}{2}\right\rangle,\ (j=1,2), \tag{28}$$

此即为振幅平方压缩的条件. 若取 $N=3$, 则(24)和(25)式成为

$$\Delta F_{1(3)}\Delta F_{2(3)} \geqslant \frac{1}{4}\langle 9\hat{N}^2 + 9\hat{N} + 6\rangle \tag{29}$$

和

$$\langle \Delta F_{j(3)}^2\rangle < \frac{1}{4}\langle 9\hat{N}^2 + 9\hat{N} + 6\rangle, \tag{30}$$

即光场呈振幅立方压缩[1]. 因此, 可以称由(20)—(26)式定义的这类高阶压缩为光场的振幅N次方压缩.

下面计算 $F_{1(N)}$ 和 $F_{2(N)}$ 在 $a^k(k\geqslant 3)$ 的k个正交归一本征态中的起伏. 对于确定的k值,由(14)和(15)式,有

$${}_k\langle \phi_m|a^N|\phi_m\rangle_k = \begin{cases}\alpha^N, (N=kn, n=1,2,\cdots),\\ 0, \text{其它};\end{cases} \tag{31a}$$

$${}_k\langle \phi_m|a^{2N}|\phi_m\rangle_k = \begin{cases}\alpha^{2N}, (2N=kn,\ n=1,2,\cdots),\\ 0, \text{其它}.\end{cases} \tag{31b}$$

由(26)和(31)式不难得到以下结论: 仅当k为偶数 ($k=2N$) 时, $a^k(k\geqslant 3)$ 的k个正交归一本征态 $|\phi_m\rangle_k$ 有可能存在振幅N次方压缩; 若 $N=kn$ ($n=1,2,\cdots$), 则 $|\phi_m\rangle_k$ 是 $F_{1(N)}$ 和 $F_{2(N)}$ 的最小测不准态, 但不存在振幅N次方压缩; 在其它情况下 ($k\neq 2N$), a^k 的k个正交归一本征态都不可能存在振幅N次方压缩.

当 $k=2N$ 时,由(16),(26)和(31)式可得

$${}_k\langle \phi_m|:\Delta F_{j(N)}^2:|\phi_m\rangle_k = \begin{cases}\dfrac{|\alpha|^{2N}}{2}\left[\dfrac{A_{k-N+m}}{A_m}\pm\cos(2N\theta)\right],\\ \qquad (m=0,1,2,\cdots,(N-1);\\ \dfrac{|\alpha|^{2N}}{2}\left[\dfrac{A_{m-N}}{A_m}\pm\cos(2N\theta)\right],\\ \qquad (m=N,N+1,\cdots,(k-1)),\end{cases} \tag{32}$$

式中 $j=1,2$; 且等号右端的"+"号对应于 $j=1$, "-"号对应于 $j=2$. 在k不很大的情况下,由(5)—(7)和(32)式不难得到 $F_{1(N)}$ 和 $F_{2(N)}$ 起伏的解析表达式.

现以 $k=6$ 为例进行讨论. 由(5)—(7)式,有

$$A_0 = \frac{1}{3}\operatorname{ch}|\alpha|^2 + \frac{2}{3}\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2, \tag{33a}$$

$$A_1 = \frac{1}{3}\operatorname{sh}|\alpha|^2 + \frac{1}{3}\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2, \tag{33b}$$

$$A_2 = \frac{1}{3}\operatorname{ch}|\alpha|^2 - \frac{1}{3}\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2, \tag{33c}$$

$$A_3 = \frac{1}{3}\operatorname{sh}|\alpha|^2 - \frac{2}{3}\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2, \tag{33d}$$

$$A_4=\frac{1}{3}\operatorname{ch}|\alpha|^2-\frac{1}{3}\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2, \tag{33e}$$

$$A_5=\frac{1}{3}\operatorname{sh}|\alpha|^2+\frac{1}{3}\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2. \tag{33f}$$

由(32)和(33)式，有

$m=0$

$$:\Delta F_{1(3)}^2:=\frac{|\alpha|^6}{2A_0}\left[\operatorname{sh}|\alpha|^2+\operatorname{ch}|\alpha|^2\cos 6\theta\right.$$

$$\left.-2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\left(\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}-\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\right)\right], \tag{34a}$$

$$:\Delta F_{2(3)}^2:=\frac{|\alpha|^6}{2A_0}\left[\operatorname{sh}|\alpha|^2-\operatorname{ch}|\alpha|^2\cos 6\theta\right.$$

$$\left.-2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\left(\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}+\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\right)\right]; \tag{34b}$$

$m=1$

$$:\Delta F_{1(3)}^2:=\frac{|\alpha|^6}{2A_1}\left[\operatorname{ch}|\alpha|^2+\operatorname{sh}|\alpha|^2\cos 6\theta-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\left(\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\right.\right.$$

$$\left.-\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\right)-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\left(\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\right)\right], \tag{34c}$$

$$:\Delta F_{2(3)}^2:=\frac{|\alpha|^6}{2A_1}\left[\operatorname{ch}|\alpha|^2-\operatorname{sh}|\alpha|^2\cos 6\theta-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\left(\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\right)-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\left(\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}+\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\right)\right]; \tag{34d}$$

$m=2$

$$:\Delta F_{1(3)}^2:=\frac{|\alpha|^6}{2A_2}\left[\operatorname{sh}|\alpha|^2+\operatorname{ch}|\alpha|^2\cos 6\theta+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\left(\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\right)-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\left(\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}-\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\right)\right], \tag{34e}$$

$$:\Delta F_{2(3)}^2:=\frac{|\alpha|^6}{2A_2}\left[\operatorname{sh}|\alpha|^2-\operatorname{ch}|\alpha|^2\cos 6\theta+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\left(\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\right.\right.$$

$$+\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\Big)-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\Big(\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}+\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\Big)\Big]; \tag{34f}$$

$m=3$

$$:\Delta F^2_{1(3)}:=\frac{|\alpha|^6}{2A_3}\Big[\operatorname{ch}|\alpha|^2+\operatorname{sh}|\alpha|^2\cos 6\theta$$

$$+2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\Big(\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}-\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\Big)\Big], \tag{34g}$$

$$:\Delta F^2_{2(3)}:=\frac{|\alpha|^6}{2A_3}\Big[\operatorname{ch}|\alpha|^2-\operatorname{sh}|\alpha|^2\cos 6\theta$$

$$+2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\Big(\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}+\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\Big)\Big]; \tag{34h}$$

$m=4$

$$:\Delta F^2_{1(3)}:=\frac{|\alpha|^6}{2A_4}\Big[\operatorname{sh}|\alpha|^2+\operatorname{ch}|\alpha|^2\cos 6\theta+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\Big(\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}-\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\Big)$$

$$+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\Big(\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}-\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\Big)\Big], \tag{34i}$$

$$:\Delta F^2_{2(3)}:=\frac{|\alpha|^6}{2A_4}\Big[\operatorname{sh}|\alpha|^2-\operatorname{ch}|\alpha|^2\cos 6\theta+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\Big(\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}$$

$$+\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\Big)+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\Big(\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}+\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\Big)\Big]; \tag{34j}$$

$m=5$

$$:\Delta F^2_{1(3)}:=\frac{|\alpha|^6}{2A_5}\Big[\operatorname{ch}|\alpha|^2+\operatorname{sh}|\alpha|^2\cos 6\theta-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\Big(\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}$$

$$-\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\Big)+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\Big(\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}$$

$$-\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\Big)\Big], \tag{34k}$$

$$:\Delta F^2_{2(3)}:=\frac{|\alpha|^6}{2A_5}\Big[\operatorname{ch}|\alpha|^2-\operatorname{sh}|\alpha|^2\cos 6\theta-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\Big(\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}$$

$$+\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\Big)+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\Big(\operatorname{sh}\frac{|\alpha|^2}{2}$$

$$+\operatorname{ch}\frac{|\alpha|^2}{2}\cos 6\theta\Big)\Big]. \tag{34l}$$

(34)式中的 A_0—A_5 由(33)式给出．由(34)式可知，只要适当选择相角 θ 的取值，a^6 的 6 个正交归一本征态在 $F_{1(3)}$ 和 $F_{2(3)}$ 两个方向上都能够存在振幅立方压缩．由定义(26)式可得到压缩存在的条件为

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(4n+3)\pi < |\alpha|^2 < \frac{\sqrt{3}}{3}(4n+5)\pi,\ (m=0);$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}n\pi < |\alpha|^2 < \frac{\sqrt{3}}{3}(4n+1)\pi,\ (m=1);$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(4n+1)\pi < |\alpha|^2 < \frac{2\sqrt{3}}{3}(2n+1)\pi,\ (m=2);$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(4n+1)\pi < |\alpha|^2 < \frac{\sqrt{3}}{3}(4n+3)\pi,\ (m=3);$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}(2n+1)\pi < |\alpha|^2 < \frac{\sqrt{3}}{3}(4n+3)\pi,\ (m=4);$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(4n+3)\pi < |\alpha|^2 < \frac{4\sqrt{3}}{3}(n+1)\pi,\ (m=5);$$

$$\theta=\begin{cases}\frac{1}{6}(2n+1)\pi, & (F_{1(3)}\ \text{方向});\\ \frac{n\pi}{3}, & (F_{2(3)}\ \text{方向}),\end{cases}$$

式中 $n=0,1,2,\cdots$。

当 k 为大于 6 的任意偶数时，亦可经由以上类似的计算求得 $F_{1(N)}$ 和 $F_{2(N)}(k=2N)$ 在 $|\phi_m\rangle_k$ 中的起伏。总之，一旦 k 值 $(k=2N)$ 确定，由(5)—(7)式可得到 $A_m(|\alpha|^2)$ $(m=0,1,2,\cdots,(k-1))$，代入(32)式，且对于 $F_{1(N)}$ 取 $\theta=(2n+1)\pi/k$，而对于 $F_{2(N)}$ 取 $\theta=2n\pi/k$，则总能发现 a^k 的 k 个正交归一本征态在 $F_{1(N)}$ 和 $F_{2(N)}$ 两个正交分量方向上都能够存在振幅 N 次方压缩。当然，随着 k 的增大，计算上将会变得很繁杂，但不存在原则上的困难。

五、结　　语

本文的研究结果表明，只要适当选择相角 θ 及相干态平均光子数 $|\alpha|^2$ 的取值，在 k 为偶数时，$a^k(k\geqslant 3)$ 的 k 个正交归一本征态总能存在着压缩效应。当 $k=4$ 时，a^4 的本征态在光场振幅平方的正交分量 Y_1 和 Y_2 两个方向上都存在着压缩，即光场存在振幅平方压缩。当 k 为大于 4 的任意偶数 $(k=2N)$ 时，a^k 的 k 个本征态在光场振幅 N 次方的正交分量 $F_{1(N)}$ 和 $F_{2(N)}$ 两个方向上也都存在着压缩效应，即光场存在振幅 N 次方压缩。这些结果揭示了 a^k 的正交归一本征态的非经典特性，可以肯定，对 a^k 的本征态的深入研究必将有助于人们加深对光场的量子特性的了解。

[1] 彭石安、郭光灿，物理学报，**39**(1990)，51.
[2] 王继锁，物理学报，**40**(1991)，547.
[3] M. Hillery, *Opt. Comm.*, 62(1987), 135; *Phys. Rev.*, **A36**(1987), 3796.
[4] Z. Zhang, L. Xu, J. Chai and F. Li, *Phys. Lett.*, **150A** (1990), 27.

[5] 范洪义、阮图南，中国科学（A 辑），(1)(1984)，62.

SQUEEZING PROPERTIES OF EIGENSTATES OF HIGH ORDER POWER OF PHOTON ANNIHILATION OPERATOR

ZHAN YOU-BANG

Department of Physics, Huaiyin Teachers College, Huaiyin 223001

(Received 12 August 1991)

ABSTRACT

In this paper, the squeezing properties of orthonormal eigenstates of high order power of photon annihilation operator a^k ($k \geqslant 3$) are studied. It is shown that the amplitude Nth-power squeezing ($k=2N$) can exist in the eigenstates when k is even.

PACC: 4250