

含外力项的广义 KdV 方程的类孤子解

朱 佐 农

江苏农学院基础部, 扬州 225001

1991 年 10 月 4 日收到

本文利用广义 KP 方程的 Bäcklund 变换, 获得了含外力项的广义 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + 6f(t)u = g(t) + \varepsilon(f' + 12f^2)^{11} \quad (1)$$

的类孤子解.

PACC: 0340K; 0290

一、引 言

众所周知, 对非线性演化方程的 Painlevé 性质分析是一件重要的事情. 一方面, 方程的 Painlevé 性质和方程的可积性有着密切的联系^[1-3], 另一方面, 方程若具有 Painlevé 性质, 则很自然地可得到方程的 Bäcklund 变换. 我们曾研究了系数依赖于时间的广义 KP 方程^[2]

$$u_{xt} + 6f_1(t)(u_t^2 + uu_{xx}) + f_2(t)u_{xxxx} + 6f(t)u_x + g^2(t)u_{yy} + f_3(t) = 0 \quad (2)$$

的 Painlevé 性质和 Bäcklund 变换. 得到以下结论: 若

$$f_1(t) = f_2(t), \quad (3)$$

$$f_3(t) = \frac{ff'_1 - f'f_1 - 12f^2 \cdot f_1}{f_1}, \quad (4)$$

$$g(t) = \exp\left(\int \frac{f_1 - 24f \cdot f_1}{2f_1} dt\right), \quad (5)$$

则广义 KP 方程(2)具有 Painlevé 性质, 且方程(2)的 Bäcklund 变换为

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \phi(x, y, t) + u_2, \quad (6)$$

其中 u, u_2 是方程(2)的解, ϕ 和 u_2 满足方程组

$$(3\phi_{xx}^2 - 4\phi_x\phi_{xxx})f_1(t) - \phi_x\phi_t - g^2\phi_y^2 - 6f_1(t)\phi_x^2u_2 = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &\phi_{xt} + 6f(t)\phi_x + \frac{3\phi_{xx}\phi_t}{\phi_x} + 3\phi_{xt} + f_1(t) \\ &\cdot \left[6\phi_{xx}u_2 + \phi_{xxxx} - \frac{3\phi_{xx}\phi_t}{\phi_x} - 3\phi_{xt} \right] + g^2(t)\phi_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

1), 2) 朱佐农, 系数依赖于时间的广义 KP 方程的 Painlevé 性质和 Bäcklund 变换, 已投物理学报.

方程(2)是物理学家和数学家感兴趣的诸多方程的统一和推广。如取 $f_1=1$, 则(2)式成为

$$u_{xt} + 6u_x^2 + 6uu_{xx} + u_{xxxx} + 6f(t)u_x + g^2(t)u_{yy} - (f' + 12f^2) = 0. \quad (9)$$

这是 1+2 维模型, 若设 u 与 y 无关, 则(9)式成为

$$u_{xt} + 6u_x^2 + 6uu_{xx} + u_{xxxx} + 6f(t)u_x - (f' + 12f^2) = 0. \quad (10)$$

(10)式称为广义 KdV 方程^[1,3]。若取 $f=0$, 则(9)式约化为众所周知的 KP 方程^[6]

$$u_{xt} + 6u_x^2 + 6uu_{xx} + u_{xxxx} + u_{yy} = 0. \quad (11)$$

方程(11)有着广泛的物理背景, 它在流体力学、等离子体物理、气体动力学等领域有重要应用。对于广义 KdV 方程(10), 由(5)式, 其 Bäcklund 变换为

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \phi(x, t) + u_2, \quad (12)$$

其中 u, u_2 是方程(10)的解。 ϕ 和 u_2 满足方程组

$$3\phi_{xx}^2 - 4\phi_x\phi_{xxx} - \phi_x\phi_t - 6\phi_x^2u_2 = 0, \quad (13)$$

$$\phi_{xt} + 6f(t)\phi_x + \phi_{xxxx} + 6\phi_{xx}u_2 = 0. \quad (14)$$

从(13), (14)式消去 u_2 , 得推广的 KdV 方程的奇性流形方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \{\phi; x\} + \left(\frac{\phi_t}{\phi_x} \right)_x + 6f(t) = 0, \quad (15)$$

其中 Schwartz 导数定义为

$$\{\phi; x\} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right)^2. \quad (16)$$

本文的目的便是借助于(12)–(16)式研究带外力项的广义 KdV 方程(1)的精确解。当 $f(t), g(t)$ 取不同形式时, 得到了带外力项的 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = g(t). \quad (17)$$

系数依赖于时间的带外力项的 KdV 方程

$$u_t + 6b(t)uu_x + b(t)u_{xxx} = g(t), \quad (18)$$

以及带外力项的柱 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{1}{2t}u = g(t) \quad (19)$$

的类孤子解。

二、含外力项的广义 KdV 方程的精确解

对于方程(10), 可以证明其奇性流形方程(15)有解:

$$\phi(x, t) = 1 + \exp[\lambda a(t)(x + q(t))], \quad (20)$$

其中 λ 是任意实常数, $q(t)$ 是 t 的任意可导函数,

$$a(t) = \exp\left(-6 \int f(t) dt\right). \quad (21)$$

从(14)式(或(13)式)可确定出 u_2

$$u_2 = f(t)x - \frac{\lambda^2}{6} a^2(t) - \frac{1}{6a(t)} (a(t)q(t))'. \quad (22)$$

容易证明 u_2 是广义 KdV 方程(10)的解, 故由 Bäcklund 变换(12)式得方程(10)的另一解

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \phi(x, t) + u_2 = \frac{\lambda^2 a^2(t)}{2} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\lambda a(t)}{2} (x + q(t)) \right\} + u_2. \quad (23)$$

注意到方程(10)关于 x 积分一次得含外力项 $g(t) + x(f' + 12f^2)$ 的广义 KdV 方程(1), (1)式中 $f(t)$, $g(t)$ 是任意给定的函数, 由(23)式, 我们探求方程(1)具有下列形式的解:

$$u = \frac{\lambda^2 a^2(t)}{2} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\lambda a(t)}{2} (x + q(t)) \right\} + f(t)x + f_1(t), \quad (24)$$

其中 $a(t)$ 如(21)式所示, $f_1(t)$, $q(t)$ 是可选择函数. 将(24)式代入(1)式, 得

$$\begin{aligned} & -6\lambda^2 a^2 f \operatorname{sech}^2 V + \frac{\lambda^3 a^2}{2} (6a(t)f(t)x - (a(t)q(t))') \operatorname{sech}^2 V \cdot \operatorname{th} V \\ & + f'(t)x + f_1' + 6 \left(\frac{\lambda^2 a^2}{2} \operatorname{sech}^2 V + f(t)x + f_1(t) \right) \\ & \cdot \left(f(t) - \frac{\lambda^3 a^3(t)}{2} \operatorname{sech}^2 V \operatorname{th} V \right) + \frac{\lambda^5 a(t)^5}{2} [2 \operatorname{sech}^2 V \operatorname{th} V - 3 \operatorname{sech}^2 V \operatorname{th}^3 V] \\ & + 6f(t) \left[\frac{\lambda^2 a^2}{2} \operatorname{sech}^2 V + f(t)x + f_1(t) \right] - x(f' + 12f^2) - g(t), \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$V = \frac{\lambda a(t)}{2} (x + q(t)). \quad (26)$$

(25)式即为

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\lambda^5 a^5}{2} - \frac{6\lambda^3 a^3 f_1}{2} - \frac{\lambda^3 a^2}{2} (a(t)q(t))' \right) \operatorname{sech}^2 V \cdot \operatorname{th} V \\ & = g(t) - f_1' - 12ff_1. \end{aligned} \quad (27)$$

故若选择 $f_1(t)$, $q(t)$, 使其满足以下两式:

$$f_1' + 12ff_1 = g(t), \quad (28)$$

$$q' - 6fq = -(6f_1 + \lambda^2 a^2), \quad (29)$$

则(27)式是恒等式. 故对含外力项的广义 KdV 方程(1)我们求得下述解:

$$u = \frac{\lambda^2 a^2(t)}{2} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\lambda a(t)}{2} (x + q(t)) \right\} + f(t)x + f_1(t), \quad (30)$$

其中

$$f_1(t) = \exp \left(-12 \int f(t) dt \right) \left[\int g(t) \exp \left(12 \int f(t) dt \right) dt + C_1 \right], \quad (31)$$

$$q(t) = \exp \left(6 \int f(t) dt \right) \left[- \int (6f_1 + \lambda^2 a^2) \exp \left(- \int 6f(t) dt \right) dt + C_2 \right]. \quad (32)$$

三、含外力项的 KdV 方程以及柱 KdV 方程的类孤子解

在方程(1)中若取 $f(t) = 0$, 则(1)式即为方程(17), 从(30)至(32)式我们获得方程(17)的解为

$$u = \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\lambda}{2} \left(x - \lambda^2 t - 6 \int f_1(t) dt \right) \right\} + \int g(t) dt + C_1, \quad (33)$$

其中

$$f_1(t) = \int g(t) dt + C_1. \quad (34)$$

特别地, 对于 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (35)$$

有解

$$u = C_1 + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\lambda}{2} (x - \lambda^2 t - 6C_1 t) \right\}. \quad (36)$$

方程(35)在变换 $u \rightarrow -u$ 下成为

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (37)$$

故 KdV 方程(37)有解:

$$u = -C_1 - \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\lambda}{2} (x - \lambda^2 t - 6C_1 t) \right\}. \quad (38)$$

若令 $-C_1 = C_0$, $\lambda^2 = V - 6C_1$, 则(36)式正是文献[7]中用稍加修改的 Bargmann 势方法^[7]得到的解。

对于方程(18), 作变换:

$$\bar{t} = \int b(t) dt \triangleq B(t), \quad (39)$$

且设函数(39)式的反函数是 $t = B^{-1}(\bar{t})$, 则(18)式成为

$$u_{\bar{t}} + 6uu_x + u_{xxx} = \frac{g(t)}{b(t)} \Big|_{t=B^{-1}(\bar{t})} \triangleq K(\bar{t}), \quad (40)$$

故方程(36)存在下述解:

$$u = \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\lambda}{2} \left(x - \lambda^2 \int b(t) dt - 6 \int f_1(\bar{t}) d\bar{t} \right) \right\} + \int K(\bar{t}) d\bar{t} + C_1$$

即为

$$u = \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\lambda}{2} \left(x - \lambda^2 \int b(t) dt - 6 \int f_1(t) dt \right) \right\} + \int g(t) dt + C_1, \quad (41)$$

其中

$$f_1(t) = \int g(t) dt + C_1.$$

在方程(1)中取 $f' + 12f^2 = 0$, 即

$$f = \frac{1}{12t}, \quad (42)$$

则(1)式成为带外力项的柱 KdV 方程(19),从(30)至(32)式,得方程(19)的解为

$$u = -\frac{\lambda^2}{2t} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\lambda(x + q(t))}{2\sqrt{t}} \right\} + \frac{x}{12t} + f_1(t), \quad (43)$$

其中

$$f_1 = \frac{1}{t} \left[\int t g(t) dt + C_1 \right], \quad (44)$$

$$q(t) = \sqrt{t} \left[- \int \left(6f_1(t) + \frac{\lambda^2}{t} \right) \frac{dt}{\sqrt{t}} + C_2 \right]. \quad (45)$$

特别地若取 $g(t) = 0$, 则得到柱 KdV 方程的解为

$$u = -\frac{\lambda^2}{2t} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} (x + C_1\sqrt{t} + 2(6C_1 + \lambda^2)) \right\} + \frac{x}{12t} + \frac{C_1}{t}. \quad (46)$$

四、结 语

本文借助于推广的 KdV 方程的 Bäcklund 变换及其奇性流形方程的解, 获得可推广的 KdV 方程的精确解, 并进一步获得含外力项的广义 KdV 方程的类孤波解, 方法是独特的. 可以期望, 当奇性流形方程的解取其它形式时, 我们将获得方程(1)的其它类型的解, 这是值得进一步研究探讨的.

注记 众所周知, 方程(37)有孤波解

$$u = -\frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\lambda}{2} (x - \lambda^2 t), \quad (47)$$

而方程(37)是 Galilean 不变的, 即在变换

$$u \rightarrow u - C_0, \quad x \rightarrow x + 6C_0 t \quad (48)$$

下方程(37)不变. 故由(47), (48)式立即得解(38)式. 这一事实说明: 从 KdV 方程(37)的多孤子解出发, 通过变换(48)式, 又可获得方程(37)的依赖于自由参数 C_0 的新的多孤子解. 这比文献[7]中采用的稍加修改的 Bargmann 势方法更简明直接.

- [1] J. Weiss, *J. Math. Phys.*, 24(1983), 1405; J. Weiss *et al.*, *ibid.*, 24(1983), 522.
- [2] T. C. Bountis, *Singularities and Dynamical Systems*, Math. Stud. No. 103, edited by S. N. Penevmatikos (North-Holland, New York, 1985).
- [3] W. H. Steeb *et al.*, *Found Phys.*, 15(1985), 677.
- [4] Tian Chou, *J. Phys. A*, 20(1987), 359.
- [5] 楼森岳, 中国科学(A辑), (6)(1991), 622.
- [6] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili, *Sov. Phys. Dokl.*, 15(1970), 539.
- [7] 楼森岳, 物理学报, 40(1991), 8.
- [8] V. Bargmann, *Rev. Mod. Phys.*, 21(1949), 488.

SOLITON-LIKE SOLUTIONS OF GENERALIZED KdV EQUATION WITH EXTERNAL FORCE TERM

ZHU ZUO-NONG

Department of Basic Science, Jiangsu Agricultural College, Yangzhou 225001

(Received 4 October 1991)

ABSTRACT

In this paper, by means of Bäcklund transformation of generalized KP equation, soliton-like Solutions of generalized KdV equation with external force term are obtained.

PACC: 0340K; 0290