

吸收型双光子光学双稳态的时间行为*

汪映海 胡成生 汪志诚

兰州大学物理系, 兰州 730001

1991年9月23日收到

利用多重时间尺度微扰分析方法, 研究了一个半经典吸收型双光子光学双稳系统的时间演化行为. 一级近似结果表明, 在高透射分支附近, 系统的长时间行为由输出场振幅的方程所支配, 其它动力学量除绝热地跟随场振幅变化而外, 还有快速振荡. 而在低透射分支附近, 所有动力学变量都通过长时间尺度变化, 没有与短时间尺度相联系的振荡行为. 稳定态在高透射分支与低透射分支之间的跃变可以由简单的方程描述.

PACC: 4250; 4265G

一、引 言

在量子光学系统中, 为了简化计算, 通常采用绝热消除的近似方法^[1]. 但是, 当原子和光场的衰减率数值相差不大时, 衰减率之比不能用来作为一个小参数, 因而一般的绝热消除不再适用, 必须采用别的处理方法, 多重时间尺度微扰分析就是其中之一^[2]. 这个问题在有关单光子光学双稳态和单光子激光的研究中已有讨论^[2,3]. 本文在充分发展滞后循环和光场、原子的所有衰减率大小可以比较的极限下, 利用多重时间尺度微扰分析方法^[4], 研究一个由半经典理论描述的吸收型双光子光学双稳系统的动力学响应.

我们考虑原子均匀展宽的环形腔吸收型双光子光学双稳系统, 且为单模、实场. 在平均场近似下, 该系统的无量纲半经典 Maxwell-Bloch 方程为^[5]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\bar{\epsilon}(x - y + 2C_p x), \\ \dot{p} &= -p + x^2 d, \\ \dot{d} &= -\tilde{\gamma}(x^2 p + d - 1),\end{aligned}\tag{1}$$

式中 y, x, d, p 分别为输入场、输出场、原子布居数之差和原子极化的规范化变量, C 与原子和场的有效耦合常数成比例, $\bar{\epsilon}$ 为标度腔的弛豫率, $\tilde{\gamma}$ 为原子的纵向和横向弛豫率之比, 符号“ $\dot{}$ ”表示对无量纲时间 τ 微商. 方程组(1)的定态解为

$$d = \frac{1}{1 + x^2},\tag{2}$$

$$p = \frac{x^2}{1 + x^2}.\tag{3}$$

* 国家自然科学基金及甘肃省自然科学基金资助的课题.

$$y = x + \frac{2Cx^3}{1+x^4}. \quad (4)$$

由(4)式可以分析多重定态的状况, 当参数 $C > 2.71$ 时, 该系统出现双光子光学双稳态^[6], 如图1所示. 在 $C \gg 1$ 的情形下, 通过求极值可得临界点的近似值

$$x_M \approx 3^{\frac{1}{4}}, y_M \approx 1.14C, z_M \approx 1.14C, \quad (5)$$

$$x_m \approx (2C)^{\frac{1}{4}}, y_m \approx (8C)^{\frac{1}{4}}, z_m \approx (2/C)^{\frac{1}{4}}. \quad (6)$$

我们的渐近分析的目的在于, 在充分发展滞后循环(即参数 $C \gg 1$) 的情况下, 当系统开始处于低透射分支或高透射分支附近时, 近似描述系统的时间行为. 于是, 我们将考虑标度(5)和(6)式, 求出方程组(1)依赖于时间的解.

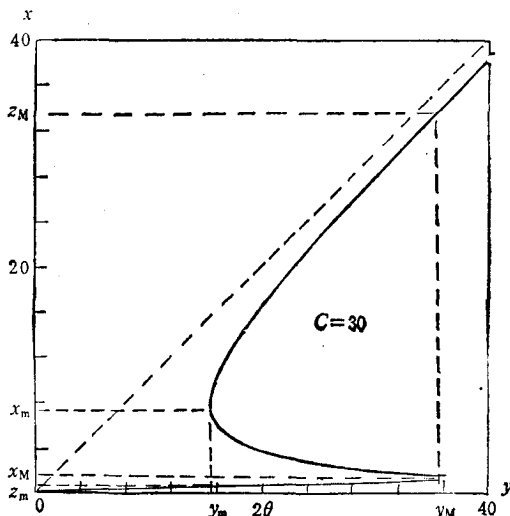


图1 双光子光学双稳态及其临界点

二、高透射分支

首先研究 $C \gg 1$ 极限下定态高透射分支附近系统的时间演化. 基于稳态标度(5)和(6)式, 可考虑高分支的两个区域: 包含点 (x_m, y_m) 的区域和包含点 (x_M, y_M) 的区域.

1. 临界点 (x_m, y_m) 附近的区域

该区域内定态各个量的数量级为

$$\begin{aligned} x &= O(C^{\frac{1}{4}}), \quad y = O(C^{\frac{1}{4}}), \\ p &= O(C^{-1}), \quad d = O(C^{-2}), \end{aligned} \quad (7)$$

因而定义

$$\begin{aligned} x &= C^{\frac{1}{4}}X, \quad y = C^{\frac{1}{4}}Y, \\ p &= C^{-1}P, \quad d = C^{-2}D. \end{aligned} \quad (8)$$

使 X, Y, P, D 为同一数量级 $O(1)$, 并引入

$$\epsilon = C^{-1} \ll 1, \quad (9)$$

系统的方程组(1)便可写成

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\bar{\kappa}(X - Y + 2XP), \\ \dot{P} &= -P + X^2D, \\ \dot{D} &= -\bar{\gamma}(\epsilon^{-2}X^2P + D - \epsilon^{-2}). \end{aligned} \quad (10)$$

为方便起见, 还可化成下列两个动力学方程:

$$-\epsilon^2 \frac{1}{\bar{\gamma}} \dot{D} + \epsilon^2 \left(-1 - \frac{1}{\bar{\gamma}} + \frac{2}{\bar{\gamma}} \frac{\dot{X}}{X} \right) \dot{D}$$

$$+ \left(\varepsilon^2 \frac{2\dot{X}}{X} - \varepsilon^2 - X^4 \right) D - \frac{2\dot{X}}{X} + 1 = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}} \dot{X} + \frac{2}{X} \left(1 - \varepsilon^2 D - \varepsilon^2 \frac{1}{\tilde{\gamma}} \dot{D} \right) + X + Y = 0. \quad (12)$$

对(10)式的定态解作线性稳定性分析,得到如下特征值:

$$\begin{aligned} \lambda_s &\approx -\tilde{\kappa} \left(1 - \frac{2}{X^2} \right) + O(\varepsilon), \\ \lambda_{\pm} &\approx -\frac{1}{2} \left(1 + \tilde{\gamma} + \frac{4\tilde{\kappa}}{X^2} \right) \pm i\varepsilon^{-1} \tilde{\gamma}^{\frac{1}{2}} X^2 + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (13)$$

由特征值具有虚部,可以预料该系统将会出现振荡行为.另外,特征值的数量级为

$$\operatorname{Re} \lambda \sim O(1), \operatorname{Im} \lambda \sim O(\varepsilon^{-1}),$$

可见在该系统中出现有两个自然的时间尺度,它们分别与特征值的实部和虚部有关.这就启示我们,可以利用多重时间尺度微扰方法进行处理.因此,引入时间变量

$$t = \tau, \quad T = \varepsilon^{-1} \omega(t, \varepsilon), \quad (14)$$

设微扰展开形式:

$$\begin{aligned} X(T, t, \varepsilon) &= X_0(T, t) + \varepsilon X_1(T, t) + \cdots, \\ D(T, t, \varepsilon) &= D_0(T, t) + \varepsilon D_1(T, t) + \cdots, \\ \omega(t, \varepsilon) &= \omega_0(t) + \varepsilon \omega_1(t) + \cdots, \end{aligned} \quad (15)$$

用以求解上述动力学方程(11)和(12).

按照非线性微分方程微扰解法的正规程序^[4],借助于独立变量 T 和 t 写出方程(11)和(12),消去长期解(即随着 T 趋于无穷大而发散的解),并假定 Y 仅以慢时间尺度变化,即 $Y = Y(t)$,最后得到下列结果:

$$X_0(T, t) = X_0(t), \quad (16)$$

$$\dot{X}_0 = \tilde{\kappa}(Y - X_0 - 2/X_0), \quad (17)$$

$$D_0(T, t) = \frac{1}{X_0^4} \left(1 - \frac{2\dot{X}_0}{X_0} \right) + A_0(t)e^{iT} + A_0^*(t)e^{-iT}. \quad (18)$$

式中 $A_0^*(t)$ 为 $A_0(t)$ 的复共轭,并且

$$T = \varepsilon^{-1} \omega_0(t) = \varepsilon^{-1} \tilde{\gamma}^{\frac{1}{2}} \int^t X_0^2(s) ds, \quad (19)$$

$$A_0(t) = -\frac{1}{2} \dot{A}_0(t) \left(1 + \tilde{\gamma} + \frac{4\tilde{\kappa}}{X_0^2} \right). \quad (20)$$

2. 在临界点 (z_M, y_M) 附近的区域

由于

$$\begin{aligned} x &= O(C), \quad y = O(C), \\ p &= O(C^{-2}), \quad d = O(C^{-4}), \end{aligned} \quad (21)$$

引入

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon x, \quad Y = \varepsilon y, \\ P &= \varepsilon^{-2} p, \quad D = \varepsilon^{-4} d, \end{aligned} \quad (22)$$

系统的方程组成为

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\bar{\kappa}(X - Y + \epsilon^2 X P), \\ \dot{P} &= -P + X^2 D, \\ \epsilon^4 \dot{D} &= -\tilde{\gamma}(X^2 P + \epsilon^4 D - 1),\end{aligned}\quad (23)$$

或者

$$\begin{aligned}\epsilon^4 X \left(\dot{D} + \frac{1}{\tilde{\gamma}} \ddot{D} \right) - \epsilon^4 (2\dot{X} - X) \left(D + \frac{1}{\tilde{\gamma}} \dot{D} \right) + 2\dot{X} - X + X^2 D &= 0, \\ \dot{X} + \bar{\kappa}(X - Y) + \frac{2\bar{\kappa}}{X} \left[\epsilon - \epsilon^5 \left(D + \frac{1}{\tilde{\gamma}} \dot{D} \right) \right] &= 0.\end{aligned}\quad (24)$$

线性稳定性分析的特征值为

$$\begin{aligned}\lambda_a &\approx -\bar{\kappa}, \\ \lambda_{b,c} &\approx -\frac{1}{2}(1 + \tilde{\gamma} + \epsilon 2\bar{\kappa}\tilde{\gamma}) \pm i\epsilon^{-2}\tilde{\gamma}^{\frac{1}{2}}X^2,\end{aligned}\quad (25)$$

因此设

$$t = \tau, \quad T = \epsilon^{-2}\omega(t, \epsilon), \quad (26)$$

$$X(T, t, \epsilon) = X_0(T, t) + \epsilon^2 X_1(T, t) + \dots$$

$$D(T, t, \epsilon) = D_0(T, t) + \epsilon^2 D_1(T, t) + \dots \quad (27)$$

$$\omega(t, \epsilon) = \omega_0(t) + \epsilon \omega_1(t) + \dots$$

最后得到

$$X_0(T, t) = X_0(t), \quad (28)$$

$$\dot{X}_0 = \bar{\kappa}(Y - X_0), \quad (29)$$

$$D_0 = \frac{1}{X_0^2} \left[1 + 2\bar{\kappa} \left(1 - \frac{Y}{X_0} \right) \right] + A_0(t)e^{iT} + A_0^*(t)e^{-iT}, \quad (30)$$

式中

$$T = \epsilon^{-2}\tilde{\gamma}^{\frac{1}{2}} \int_0^t X_0^2(s) ds, \quad (31)$$

$$\dot{A}_0(t) = -\frac{1}{2}(1 + \tilde{\gamma})A_0(t). \quad (32)$$

三、低透射分支

本节求参数 $C \gg 1$ 的极限下, 低透射分支附近系统方程依赖于时间的解。考虑包含点 (x_M, y_M) 的区域及包含点 (z_m, y_m) 的区域, 并采用与上同样的方法进行处理。

1. 临界点 (x_M, y_M) 附近的区域

定态各个量的数量级为

$$\begin{aligned}x &= O(1), \quad y = O(C), \\ p &= O(1), \quad d = O(1).\end{aligned}\quad (33)$$

为引入小参量, 并使 x, p, d, y 为同一数量级, 定义

$$\sigma = C^{-1} \ll 1, \quad Y = C^{-1}y, \quad (34)$$

系统的方程组可写成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\bar{\kappa}(x - \sigma^{-1}Y + \sigma^{-1}2xp), \\ \dot{p} &= -p + x^2d, \\ \dot{d} &= -\tilde{\gamma}(x^2p + d - 1), \end{aligned} \quad (35)$$

或

$$\begin{aligned} \sigma \ddot{x} + \sigma \dot{x} + \bar{\kappa}y \frac{\dot{x}}{x} - \sigma \frac{\dot{x}^2}{x} + 2\bar{\kappa}x^3d + \sigma \bar{\kappa}x - \bar{\kappa}y - \bar{\kappa}\dot{y} &= 0, \\ \frac{1}{\tilde{\gamma}} \dot{d} + d - 1 + \frac{1}{2}xy - \frac{\sigma}{2} \left(x^2 + \frac{1}{\bar{\kappa}} \dot{x}x \right) &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

线性稳定性分析的特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_s &\approx -\sigma^{-1}2\bar{\kappa}x^2d - (\bar{\kappa} - 2), \\ \lambda_{y,e} &\approx -\frac{1}{2}(3 + \tilde{\gamma}) \pm \tilde{\gamma}^{\frac{1}{2}}x^2, \end{aligned} \quad (37)$$

求得一级近似的解满足

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 \left(1 + \frac{y}{y} \right) - \frac{2}{y} x_0^2 d_0, \\ d_0 &= \tilde{\gamma} \left(1 - d_0 - \frac{1}{2} y x_0 \right). \end{aligned} \quad (38)$$

2. 临界点 (x_m, y_m) 附近的区域

由于

$$\begin{aligned} x &= O(C^{-\frac{1}{2}}), \quad y = O(C^{\frac{1}{2}}), \\ d &= O(1), \quad p = O(C^{-\frac{1}{2}}), \end{aligned} \quad (39)$$

与前同理, 引入

$$\begin{aligned} \sigma &= C^{-1} \ll 1, \quad Y = \sigma^{\frac{1}{2}}y, \\ X &= \sigma^{-\frac{1}{2}}x, \quad P = \sigma^{-\frac{1}{2}}p, \end{aligned} \quad (40)$$

系统的方程组成为

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\kappa(X - \sigma^{-\frac{1}{2}}Y + \sigma^{-\frac{1}{2}}2XP), \\ \dot{P} &= -P + X^2d, \\ \dot{d} &= -\tilde{\gamma}(\sigma^{\frac{1}{2}}X^2P + d - 1), \end{aligned} \quad (41)$$

或

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\bar{\kappa}} \ddot{X}X + \frac{1}{\bar{\kappa}} \dot{X}(\dot{X} - X - \bar{\kappa}\sigma^{-\frac{1}{2}}Y) \\ + X[\sigma^{-\frac{1}{2}}(\dot{Y} + Y) - X - \sigma^{-\frac{1}{2}}2X^3d] &= 0, \\ \frac{1}{\tilde{\gamma}} \dot{d} + d - 1 + \sigma^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}XY - \sigma^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{\kappa}} \dot{X}X + X^2 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

线性稳定性分析的特征值为

$$\begin{aligned}\lambda_a &\approx -\tilde{\gamma}, \\ \lambda_{b,c} &\approx -\frac{1}{2}(1+\tilde{\kappa}), -\frac{1}{2}(1+\tilde{\kappa}) - e^{-\frac{2}{3}}2\tilde{\kappa}x^2d, \end{aligned} \quad (43)$$

求得一级近似的解满足

$$\begin{aligned}\dot{X}_0 &= X_0 \left(1 + \frac{\dot{Y}}{Y}\right) - \frac{2}{Y} x_0^4 d_0, \\ \dot{d}_0 &= \tilde{\gamma}(1 - d_0). \end{aligned} \quad (44)$$

四、结果讨论

高透射分支的一级近似结果表明, 输出光场 X_0 由单个微分方程(17)或(29)给出, 仅与慢时间变量 t 有关, 它以封闭的形式描述场的长时间演化, 且没有振荡行为. 原子布居数之差 D_0 借助依赖于时间的函数由(18)或(30)式明显地给出, 它包含两个性质不同的贡献: 其中第一项对应于绝热地跟随场的行为, 是一个由输入场感应的慢变化 (正比于 Y); 第二项表示在不同的时间尺度上衰减的快速振荡. 由(19)和(31)式可见, 这些振荡有一个正比于 e^{-1} 或 e^{-2} 的频率; 由(20)和(32)式可见, 这振荡的振幅由 $A(t)$ 给出, 它通过长时间尺度而衰减. 由上所述, 在高透射分支附近, 系统的行为由光场振幅的方程所支配, 它决定系统的长时间演化.

低透射分支的一级近似结果(38)和(44)式表明, 输出光场 X_0 和原子布居数之差 d_0 都没有快速振荡行为, 仅为依赖于时间变量 t 的缓慢变化. 这与单光子过程的结果不同. 在单光子光学双稳态的低透射分支附近, 一级近似下 d_0 没有振荡, 而 X_0 包含一个绝热地跟随 d_0 的慢变化和一个快速振荡变化^[3].

由(17)式可得高透射分支上点 (x_m, y_m) 附近区域的定态解

$$X = X_{\pm} = \frac{1}{2} Y \pm \frac{1}{2} (Y^2 - 8)^{\frac{1}{2}}, \quad (45)$$

然后作依赖于时间的方程的分析, 考虑到 $X = C^{-\frac{1}{2}}x$, $Y = C^{-\frac{1}{2}}y$, 以及 $x_m = (2C)^{\frac{1}{2}}$, $y_m = (8C)^{\frac{1}{2}}$, 如果系统的初始状态是 $X(0) > X_-$, 且 $Y > \sqrt{8}$, 则随着 $t \rightarrow \infty$, 有 $X \rightarrow X_+$, 方程(17)描述系统趋于定态 X_+ . 反之, 如果 $X(0) < X_-$ 或 $Y < \sqrt{8}$, 则系统跃变到低透射分支的定态了. 同理, 从(38)式得到低透射分支上点 (x_M, y_M) 附近区域的定态方程

$$x_0^4 - \frac{2}{Y} x_0^2 + 1 = 0, \quad (46)$$

其定态解

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Y} + A \right) \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{Y} + A \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{2Y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{YA} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (47)$$

其中 $A = \left[2 \left(\frac{1}{2Y^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{Y^2} \right]^{\frac{1}{2}}$. 考虑到 $Y = C^{-\frac{1}{2}}y$, $x_M \approx 3^{\frac{1}{2}}$, $y_M \approx 1.14C$, 数字计算结果表明, 如果 $x(0) < x_-$, $Y < 1.14$, 则 $x \rightarrow x_-$, 系统趋于低透射分支定态. 如果

$x(0) > x_-$ 或 $Y > 1.14$, 则系统跃变到高透射分支的定态了。可见, 高透射分支与低透射分支之间的跃变可以用简单的方程来描述。

- [1] H. Haken, *Synergetics: An Introduction* (Springer, New York, 1983).
- [2] L. A. Lugiato, P. Mandel, L. M. Narducci, *Phys. Rev.*, **A29**(1984), 1438.
- [3] T. Erneux, P. Mandel, *Phys. Rev.*, **A28**(1983), 896; **A33**(1986), 1777.
- [4] A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods* (Wiley, New York, 1973).
- [5] P. Galatola, L. A. Lugiato, M. Vadicchino, *Opt. Commun.*, **69**(1989), 414.
- [6] P. T. Arecchi, A. Politi, *Lett. Nuovo Cimento*, **23**(1978), 65.

TEMPORAL ASPECTS OF ABSORPTIVE TWO-PHOTON OPTICAL BISTABILITY

WANG YING-HAI HU CHENG-SHENG WANG ZHI-CHENG

Department of Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730001

(Received 23 September 1991)

ABSTRACT

We investigate the temporal aspects of absorptive two-photon optical bistability described by a semiclassical theory in the limit of a fully developed hysteresis cycle and when all decay rates have comparable magnitude. We show by multiple time-scale perturbation analysis that near the high-transmission branch the behavior of the system is governed by an equation for the field amplitude which determines the long-time evolution of the system, whereas, near the low-transmission branch all dynamical variables vary on the long time scale, and it is possible to describe the transition between the two stable branch by simple equations.

PACC: 4250; 4265G