

Duffing 方程的分叉结构及其标度特性*

朱 顺 泉

西南师范大学物理系, 重庆 630175

谢 发 根

北京师范大学物理系, 北京 100875

胡 岗

北京师范大学物理系, 北京 100875;

中国科学院理论物理研究所, 北京 100080

1991 年 10 月 17 日收到

对称三次幂的 Duffing 方程经标度变换可化为三参数方程。在小周期强迫力的条件下, 负线性项的 Duffing 方程具有封闭的分叉结构, 且分叉区域随着线性系数的增大而缩小。在大周期强迫力的条件下, 方程具有一系列自相似分叉结构, 并呈现标度特性。利用一维映射对此标度特性进行了讨论, 理论结果与计算机结果符合很好。

PACC: 6460

一、三参量 Duffing 方程

Duffing 方程的一般形式可表为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx^3 + \beta x^2 + \nu x + a = F \cos(\omega t). \quad (1)$$

对 x 和 t 进行标度变换及对 x 坐标平移, 可将(1)式变为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x^3 + Ex + d = F \cos t. \quad (2)$$

方程(2)相应的势函数为

$$V(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{Ex^2}{2} + dx. \quad (3)$$

当 $d \neq 0$ 时, 势函数不对称。文献[4]对这种非对称势情况作了些讨论。在此, 我们只讨论具有对称势的 Duffing 方程, 因此, 方程(2)变为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x^3 + Ex = F \cos t. \quad (4a)$$

无强迫项时方程约化为

* 国家自然科学基金资助的课题。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x^3 + Ex = 0. \quad (4b)$$

方程(4)相应的势函数为

$$V(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{Ex}{2}. \quad (5)$$

方程(4a)就是一般的三参量对称势的 Duffing 方程。其中 k 为系统的耗散系数, F 为周期强迫力的振幅, E 为决定非线性系统的吸引域结构系数。这三个系数反应了对方程具有重大影响的三个本质方面: 外加强迫力, 内部耗散和内部势结构, 这三者的竞争和协作产生了极为丰富的分叉行为。全面分析这三个控制参量对 Duffing 方程动力学行为的影响, 显然很有必要。人们利用各种方法对方程(1)的各种参量作不同的简化, 进行了广泛的研究, 并成功地解释了许多有意义的现象。例如, 通过连续地改变参量, 系统经对称破缺, 连续倍周期分叉到混沌, 吸引域边界的分维结构等^[1-9]。然而, 这些研究几乎都局限在小参数范围内。文献[1]对无线性项 Duffing ($E = 0$) 在大 F 参数范围内的分叉结构的自相似性展开了一些讨论。以往文献曾经对固定 E 的 k - F 参数空间和固定 k 的 E - F 参数空间的分叉行为进行过分析。本文将全面分析 k - E - F 三参数空间内分叉行为的特征。首先对双势阱和弱强迫力的 Duffing 方程的分叉结构进行讨论, 从中可看出多吸引域势结构对系统的分叉行为的影响, 然后, 我们用计算机模拟了大 F 参数条件下 Duffing 方程的分叉结构, 最后, 利用一维映射对大 F 参数范围的分叉结构的标度特性进行了解析讨论, 并指出了一些尚未解决的问题。值得强调的是: 本文集中讨论在各种参数条件下分叉区域的分布情况, 对分叉区域内的分叉细节及各种分叉行为的具体性质在本文中不加讨论。

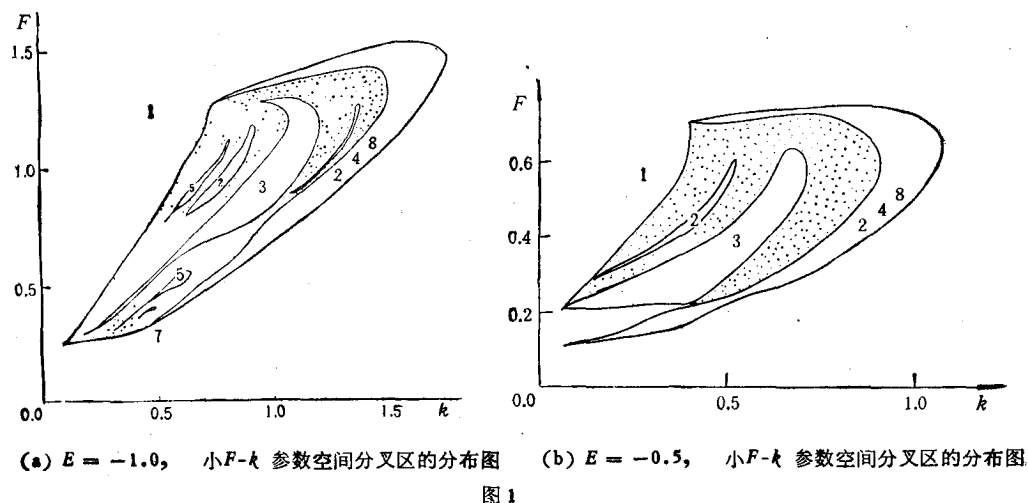
二、弱强迫力情况下分叉区域的分布

对于方程(4a), 当强迫力的振幅很小时, 线性项起着重要的作用。根据线性稳定性分析, 方程(4b)的奇点可分两种情况:

当 $E \geq 0$ 时, 方程有唯一的稳定奇点 $(0, 0)$, 且势函数为单阱。当 $E < 0$ 时, 有不稳定鞍点 $(0, 0)$ 以及两个稳定的奇点 $(\pm\sqrt{-E}, 0)$, 势函数此时为对称双阱, 并在鞍点 $(0, 0)$ 处取极大值 $V_{\max} = 0$, 而在 $(\pm\sqrt{-E}, 0)$ 处取极小值 $V_{\min} = -E^2/4$ 。

当 $E \geq 0$ 时, 方程(4b)加一个小的周期强迫力, 系统最后趋于绕 $(0, 0)$ 作单周期对称轨道运动(即轨道对于 $x, y, t \rightarrow -x, -y, t + \pi$ 变换具有不变性)。当强迫力增加到很大时, 系统轨道首先必须出现对称性破缺分叉, 然后, 各种更复杂的分叉行为将进一步出现。但是, 当 $E < 0$ 时, 情况就完全不一样, 此时系统的动力学行为要丰富得多。由于方程(4b)有两个稳定的奇点, 当周期强迫力很小时, 系统最后被吸引到其中一个奇点附近作单周期运动, 而且运动完全被单势阱控制。系统最后吸引到哪个势阱, 决定于初值。值得指出的是: 在小 F 下, 一开始轨道就已经对称破缺, 所以系统不必绕过对称性破缺分叉再进入其它类型分叉(如倍周期分叉等)。随着 F 的增大, 系统将越过势垒进入另一个势阱, 并在两个势阱里往返运动。在系统往返于两个势阱之中的运动时, 系统轨道出现了十

分复杂的行为: 首先是倍周期分叉及通过倍周期分叉到混沌。在混沌区内会发现各种周期窗口等等。随着 F 的进一步增大, 系统轨道又恢复对称, 在更大范围内围绕两个势阱作单周期运动。图1(a), (b) 分别为 $E = -1.0, -0.5$ 时, k - F 参数空间的分叉区的分布图。我们把运动轨道不是单周期的参数区称为分叉区。分叉区中数字分别指该区域的轨道周期数(以强迫力的周期为1), 黑点区表示混沌运动区。从图1中明显地看出, 倍周期分叉和混沌运动在分叉区里占主导地位。随着 E 的增大, 封闭的分叉区面积不断缩小, 并且当 $E = -0.088$ 时, 整个分叉区基本消失。由此可见, 这一分叉区域完全是方程(4)的多势阱结构带来的。 E 从负到正, 系统由多势阱变为单势阱, 这一分叉区也就完全消失了。



三、大 F 范围的分叉区分布结构及其标度特性

令 $dx/dt = y$, 方程(4a)可变为如下方程:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (6a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky - Ex - x^3 - F \cos t. \quad (6b)$$

对方程(6)作变换 $S: (x, y, t) \rightarrow (-x, -y, t + \pi)$. 在 S 变换下, (6)式不变。也就是说, 如果 ϕ 是(6)式的解, 则 $S\phi$ 也是(6)式的解。而且, 如果 ϕ 本身对称, 我们就可证明 $S\phi = \phi$, 且 ϕ 不包含偶频项。为了便于用几何特性来描述分叉结构, 引入符号 $P_-(m, n)$, $P_+^*(m, n)$ 和 B , 它们分别表示对称单周期轨道、非对称单周期轨道以及分叉区, 其中 m 表示单周期轨道从正 y 到负 y 穿过负 x 轴的次数, n 表示单周期轨道从负 y 到正 y 穿过正 x 轴的次数, “ $\pm$ ”表示由变换 S 相联的一对解。很显然, $P_-(m, n)$ 为 ϕ , 则 $P_+^*(n, m)$ 为 $S\phi$. m, n 越大, 在一个周期中轨道绕原点的绕数越多, 所以, m, n 逐步增大的过程也可看作绕数分叉的过程, 尽管在绕数分叉中轨道的周期总不改变。

通过计算机模拟, 我们看到: 在 k - F 参数空间及 E - F 参数空间中, 随着 F 的增加,

单周期区和分叉区交替出现。在不同的单周期区里, m, n 也在有规律地变化。在相空间中分叉区中各种分叉具有复杂的几何特性。对此, 这里不作详细讨论, 而重点给出分叉区在参数空间的分布状况。

固定 $E = -1.0$, 图 2(a) 给出 $k-F$ 参数空间的分叉区的分布图。当 k 很小时(见图 2(a) 直线 AB), 分叉过程为双分叉过程:

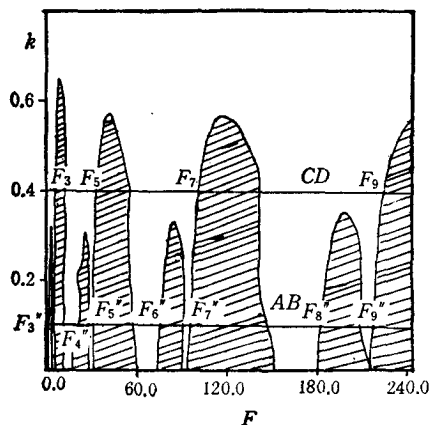
$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow P_i(n, n) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_i^+(n, n) \\ P_i^-(n, n) \end{array} \right\}_I \rightarrow B \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_i^+(n, n+1) \\ P_i^-(n+1, n) \end{array} \right\} \\ \rightarrow B \rightarrow P_i(n+1, n+1) \rightarrow \cdots \end{aligned} \quad (7)$$

即系统从对称的单周期区经两个分叉区才恢复左右绕数都增加 1 的对称单周期区。当 k 相对大些时(见图 2(a) 直线 CD), 分叉过程为单分叉过程:

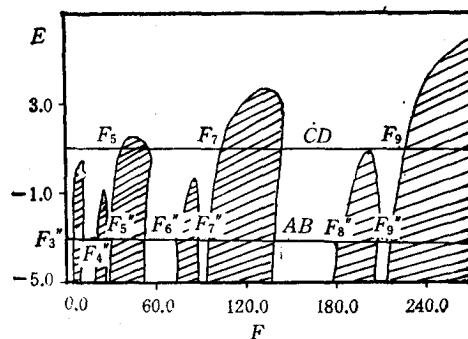
$$\cdots \left\{ \begin{array}{l} P_i^+(n, n+1) \\ P_i^-(n+1, n) \end{array} \right\}_I \rightarrow B \rightarrow P_i(n+1, n+1) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_i^+(n+1, n+2) \\ P_i^-(n+2, n+1) \end{array} \right\} \rightarrow \cdots \quad (8)$$

即系统从非对称的单周期区经单分叉区到达另一左右绕数都增加 1 的非对称单周期区。在(7)和(8)式中, I 表示倍周期分叉, 方括号表示两解共存。经过(7)或(8)式一个过程, 单周期轨道在一个周期内绕原点的左右绕数各增加 1, 不断增大 F , 绕数会逐一地不断增加。

固定 $k = 0.3$, 图 2(b) 给出 $E-F$ 参数空间的分叉区的分布图。随着 E 的增大, 双分叉过程将会变成单分叉过程, 并且不断增大 $E (> 0)$, 所有分叉区都将依次消失。



(a) $E = -1.0$, $k-F$ 参数空间分叉区的分布图



(b) $k = 0.3$, $E-F$ 参数空间分叉区的分布图

图 2 阴影部分为分叉区(非单周期区);其余部分为单周期区; AB, CD 分别为双分叉过程和单分叉过程; F_m, F_m^* 均为分叉区 F 的起始值, m 为分叉区之前单周期态的左右绕数之和

固定 k , 每个倍周期分叉参数 F 的起点值 F_m , 即分叉区的起始值(见图 2(a)) 随着 E 的增大而增大。

图 3 为 $k = 0.3, E = -1.0$ 时, 锁相区中不同 F 的单周期相轨迹(图 2 中不同单周期带)。从图 3 很清楚地看到, 随着 F 增大, 单周期轨道的绕数在逐一地增加。图 4 为 $k = 0.3, E = -1.0$ 时, 增大 F 时, 系统从单周期态 $P_i(2, 3)$ 经倍周期分叉到混沌的过程。

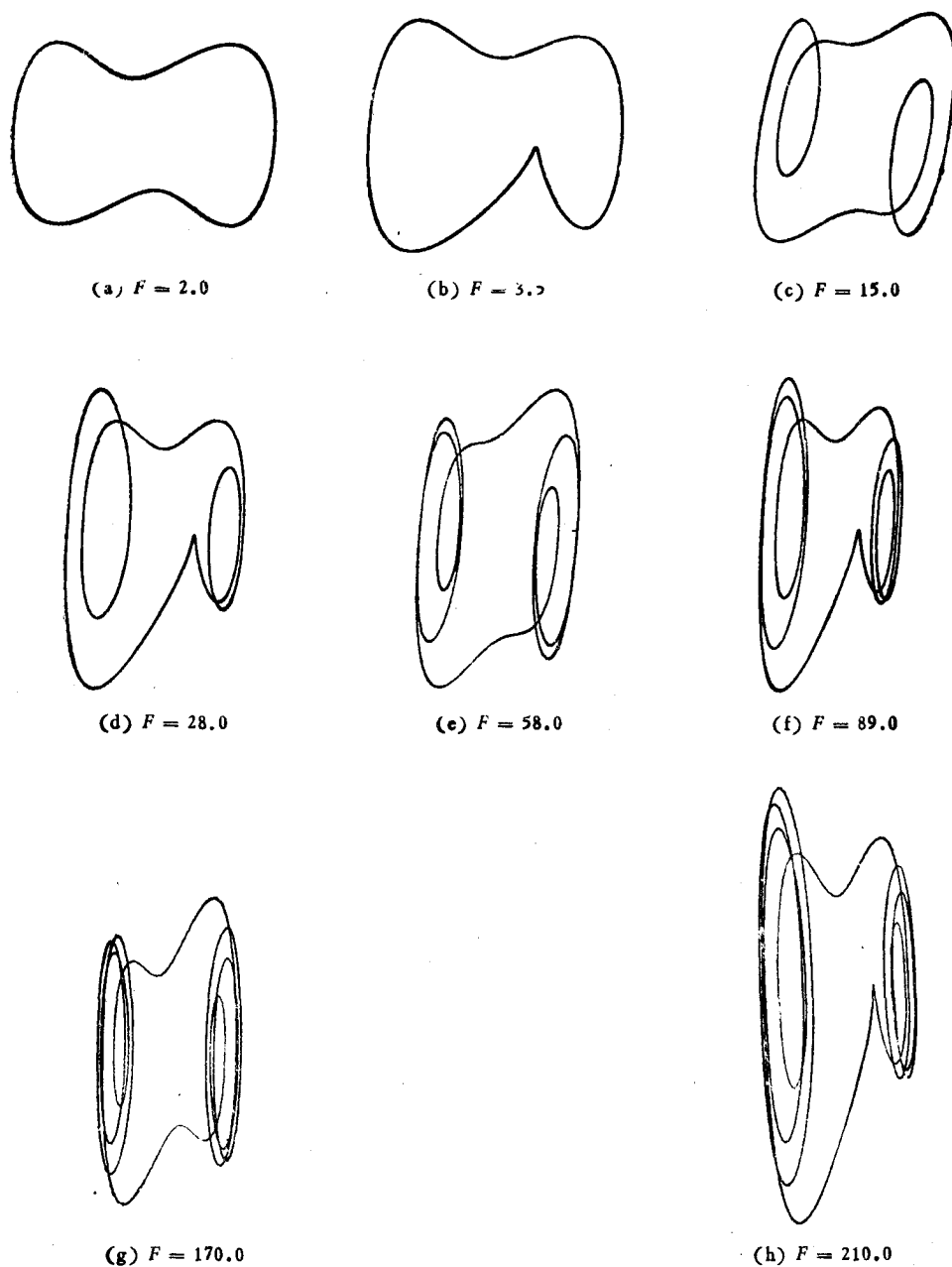


图3 $k = 0.3, E = -1.0$, 锁相区不同 F 的单周期相轨道

图5为 $F = 120.0$ 时, k - Z 参数空间的分叉区的分布图。阴影部分为分叉区, 其余为单周期区。值得指出的是: 分叉区里有着丰富而又复杂的结构, 我们在此没有讨论。有意义的是这一分叉区呈非对称的双峰分布。在 $E < 0$ (双势阱) 一侧的分叉区要比 $E > 0$ (单势阱) 一侧的分叉区大得多, 而分叉行为也更复杂, 这说明即使在强迫力非常大时, 系统的多势阱结构也仍然对系统的分叉行为产生重大影响。

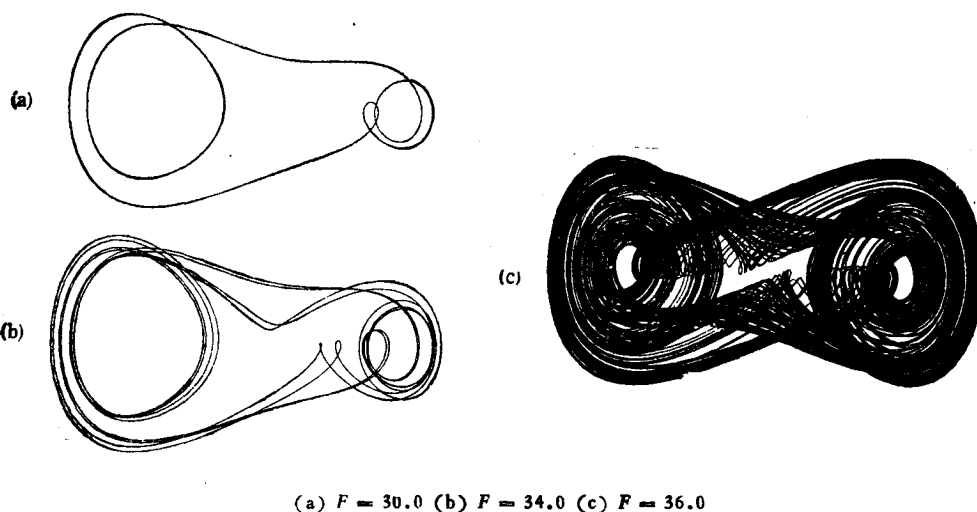


图4 $k = 0.3, E = -1.0$, 系统从单周期态经倍周期分叉到混沌运动的过程

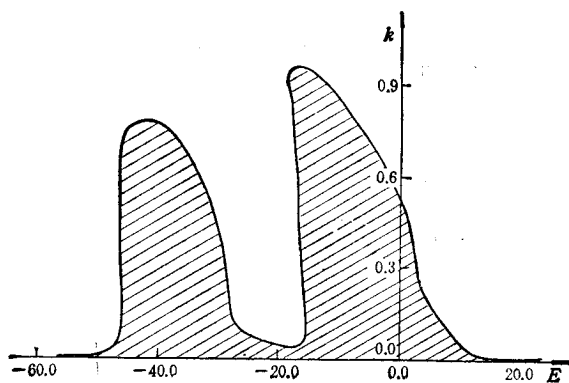


图5 $F = 120.0, k-E$ 参数空间分叉区的分布图

四、分叉区标度律的解析讨论

从图 2(a) 和 (b) 可以看到: 分叉区与分叉区之间的单周期区呈自相似的条带状结构, 并呈现标度特性。图 6 为不同 E 的 $\log F_m$ 和 $\log m$ 函数关系图。图中各圆点处标的数字均为 E 的值。这里 F_m 为单周期态 $P_0(n, n+1)$ 到分叉区的分叉起点的参数 F 值, m 为单周期轨道左右绕数之和, 即 $m = 2n + 1$ 。

现在利用一维映射来讨论分叉区的标度律。首先简单地介绍系统的一维映射。

令 $\varphi = (x, y, z)$ 为 (6) 式的解, 依据“取 x 的最大绝对值点”^[1], 对系统作 Poincaré 映射。若 x 的最大绝对值点为 $\varphi(x, 0, z)$, 则可有两种情况:

1. $x > 0, \frac{d^2x}{dt^2} < 0$;

$$2. x < 0, \frac{d^2x}{dt^2} > 0.$$

令 $\varphi_n = (x_n, 0, t_n)$, $\varphi_{n+1} = (x_{n+1}, 0, t_{n+1})$ 为两个连续的最大绝对值点, 由此可得一个离散映射:

$$\tau: \varphi_n \rightarrow \varphi_{n+1}. \quad (9)$$

下面集中讨论在大 F 条件下这一映射的具体形式. 当 F 很大时, 在小区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 上, 方程(4a) 可线性化为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + (3x_n^2 + E)x = F \cos t. \quad (10)$$

只要 $[t_n, t_{n+1}]$ 足够小, 即 F 和 x_n 很大, 方程(10)有效. 一般来说, $(3x_n^2 + E) > k^2/4$, 方程(10)的解为

$$x(t) = A \exp\left(-\frac{k}{2} t\right) \cos(\omega_n t + \delta_1) + \frac{F}{[(3x_n^2 + E - 1)^2 + k^2]^{1/2}} \cos(t + \delta_2), \quad (11)$$

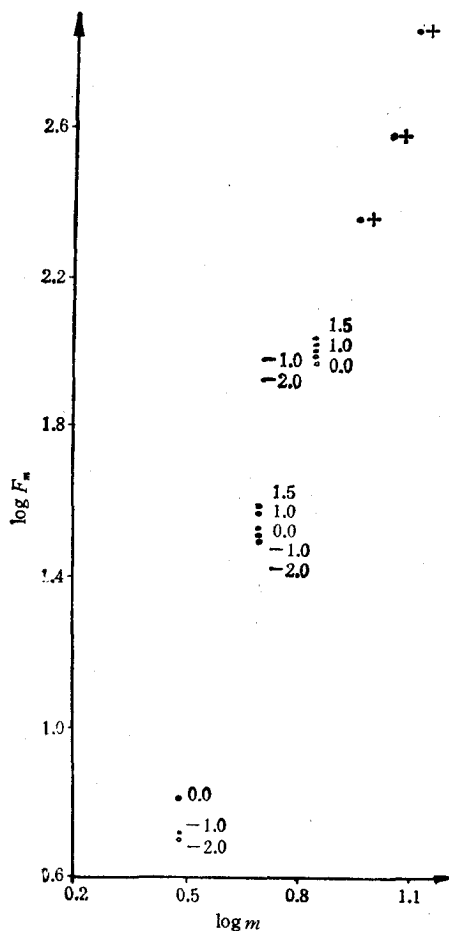


图6 $\log F_n(E) - \log(m)$ 关系图 + 表示各 E 重合

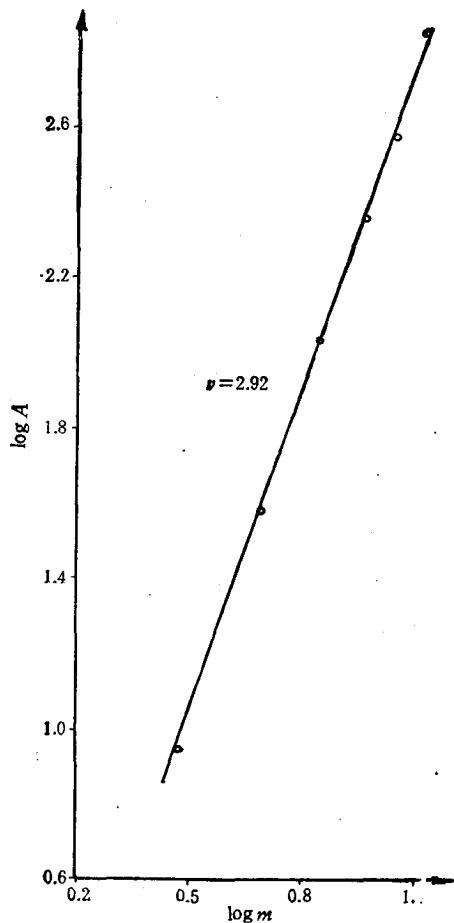


图7 $\log A - \log m$ 关系图

$$A = F_n \left[1 + \frac{(2-E)}{3F_n(2/3)} \right]^{3/2}; \nu \text{ 为斜率}$$

$$\delta_2 = \tan^{-1} \left[\frac{k}{(3x_n^2 + E - 1)} \right], \quad \omega_n = \left(3x_n^2 + E - \frac{k^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}},$$

A, δ_1 由初值条件决定. 根据映射 τ 的定义, φ_n 取最大 x_n 绝对值, 即 $\varphi_n = (x_n, 0, t_n)$, 所以初条件为 $x_n(t_n) = x_n, \frac{dx(t_n)}{dt} = 0$. 由于我们在 t 的小区间上进行讨论, 可作如下近似:

$$\theta_{n+1} \approx \theta_n + \frac{1}{\omega_n}, \quad (12a)$$

$$x_{n+1} \approx x \left(2\pi\theta_n + \frac{2\pi}{\omega_n} \right), \quad (12b)$$

$$\theta_n = t_n/2\pi, \text{ mod}(1).$$

当 F 和 $x_n \gg k$ 时, 方程(12)可写为

$$\theta_{n+1} \approx \theta_n + \frac{1}{(3x_n^2 + E)^{\frac{1}{2}}}, \quad (13a)$$

$$x_{n+1} \approx x_n - \frac{2\pi F}{(3x_n^2 + E)^{\frac{1}{2}} (3x_n^2 + E - 1)} \sin(2\pi\theta_n). \quad (13b)$$

进一步可将(13)式近似为步长 $d\tau$ 的微分方程, 即

$$\frac{d\theta}{d\tau} \approx \frac{1}{(3x_n^2 + E)^{\frac{1}{2}}}, \quad (14a)$$

$$\frac{dx}{d\tau} \approx - \frac{2\pi F}{(3x_n^2 + E)^{\frac{1}{2}} (3x_n^2 + E - 1)} \sin(2\pi\theta_n). \quad (14b)$$

由(14)式可直接积分, 得

$$x^3 + (E - 1)x = F \cos(2\pi\theta). \quad (15)$$

将(15)式代入 (14a) 式, 则有如下近似微分方程:

$$\frac{d\theta}{d\tau} \approx [3|F \cos(2\pi\theta)|^{\frac{2}{3}} + 2 - E]^{-\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

积分(16)式, 得

$$\begin{aligned} T &= \int_0^1 d\tau = \int_0^1 \sqrt{3|F \cos(2\pi\theta)|^{\frac{2}{3}} + 2 - E} d\theta \\ &\approx \sqrt{3} \left\{ F \left[1 + \frac{2-E}{3F^{\frac{2}{3}}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

T 为(16)式的周期. 在绕数为 m 的周期态中, 显然有 $T \propto m$, 这就最终导出 F_m 与 m 之间的标度律, 即

$$A(F_m, E) = F_m \left[1 + \frac{(2-E)}{3F_m^{2/3}} \right]^{\frac{1}{2}} \propto m^3. \quad (18)$$

将计算机模拟的 F_m 和 E 的值代入(18)式, 并作出 $\log A$ 与 $\log m$ 的关系, 如图 7 所示. 我们看到在图 6 中所有不同 E 对应的点在图 7 中都收缩为同一点. $\log A$ 和 $\log m$ 有很好的线性关系, 斜率为 2.92, 很接近理论值 3, 所以我们的解析讨论和实际符合很好.

从我们所有计算结果来看, 在 k - F , E - F 参数空间的分叉图中, 随着 F 的增大, 单周

期区域和分叉区域交替变化,并呈现标度特性。在小 F 区域里,线性项起着重要的作用。当 E 为负时,势函数为对称双势阱,在 k - F 参数空间中存在封闭的分叉结构,当 E 从负变正时,这一分叉结构消失。在大 F 情况下, E 对参数空间的分叉区也有很强的影响。当正 E 不断增加时,所有分叉区都将依次消失,对此原因我们尚不清楚。在 k - F 分叉区的分布图中,有一最大 k_c ,当 $k > k_c$ 时,就不存在分叉。这一最大耗散如何解析确定也不清楚。值得指出的是分叉区的有规律的变化应当可以用符号动力学来解释^[10]。这正是我们进一步要做的工作。

- [1] Shin-ichi Sato, Masaki Sano and Yasuji Sawada, *Phys. Rev.*, **28A**(1983), 1664.
- [2] Hu Gang and Hao Bai-lin, *Phys. Rev.*, **42A**(1990), 3335.
- [3] Yao Huang KAO, Jeun Chyuan HUANG and Yih Shun GOU, *Phys. Lett.*, **131A**(1988), 91.
- [4] R. Rätty J. Von Boehm and H. M. Isomäki, *Phys. Rev.*, **34A**(1986), 4310.
- [5] R. G. Frehlich and S. Novak, *Phys. Rev.*, **26A**(1982), 3660.
- [6] R. Rätty J. Von Boehm and H. M. Isomäki, *Phys. Lett.*, **103A**(1984), 289.
- [7] F. C. Moon and Guang-Xuan LI, *Physica*, **17D**(1985), 99.
- [8] E. W. Jacobs, A. R. Bulsara and W. C. Schieve, *Physica*, **34D**(1989), 439.
- [9] P. Holmes and D. Whitley, *Physica*, **7D**(1983), 111.
- [10] Zheng Wei-Mou and HAO Bai-Lin, *Int. J. Mod. Phys.*, **3B**(1989), 1183.

BIFURCATION STRUCTURE AND SCALING PROPERTY OF DUFFING'S EQUATION

ZHU SHUN-QUAN

Department of Physics, Southwest Normal University, Chongqing 630175

XIE FA-GENG

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875

HU GANG

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875;

Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing 100080

(Received 17 October 1991)

ABSTRACT

Symmetric cubic Duffing's equation can be identified to three-parameter equation by using scaling transformation. Duffing's equation with negative linear term has a closed bifurcation region under weak periodic force, the bifurcation areas contract with increasing the linear coefficient. The equation has a set of self-similar bifurcation regions under strong periodic force. The scaling property of this regions is found and discussed in terms of a one-dimensional map, the theoretical result is in good agreement with the computational result.

PACC: 6460