

KdVB 方程行波解的渐近分析

吕 威 青

山东教育学院数理系, 济南, 250013

1991 年 3 月 25 日收到

本文利用奇异摄动的理论和方法, 研究 $\nu^2 \gg 4\mu$ 时 KdVB 方程的行波解. 得到行波解的三阶渐近展开式的显式. 同时得到行波解的一般渐近展开式的表达式: $u \approx u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots + \varepsilon^n u^{(n)} + \dots$; 并且证明 $u^{(j)} (j = 1, 2, \dots, n, \dots)$ 都是有界函数.

PACC: 0290;0365

一、引 言

方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0, \quad (1)$$

其中 $\nu > 0, \mu > 0$.

(1) 式简称为 KdVB 方程, 它结合耗散项与弥散项于一个方程, 因此能说明较只有耗散项的 Burgers 方程及只有弥散项的 KdV 方程更多的物理现象, 引起国内外学者很大的兴趣. 有些学者对该方程的行波解作了深入而细致全面的定性分析^[1,4]. Johnson 对 $\nu^2 \ll 4\mu$ 情形进行了研究^[3]. Jeffrey 等人对 $\nu^2 \gg 4\mu$ 情形进行过研究, 给出行波解的一阶渐近展开式, 但没有说明展开式是否有效^[2]. 本文进一步研究 $\nu^2 \gg 4\mu$ 情形, 得到行波解的三阶渐近展开式的显式, 推导出渐近展开式的一般表达式, 并且就一般表达式得到很有趣的结论.

二、渐近展开式

对于方程 (1), 当 $\nu^2 \gg 4\mu$ 时, 存在行波解^[4]. 本文的目的是寻求在 $\nu^2 \gg 4\mu$ 时, 方程 (1) 行波解的渐近展开式的显式.

设

$$u = u(x) = u(z - \lambda t),$$

其中 $x = \frac{1}{2\nu} (u_- - u_+)(z - \lambda t)$, u_- , u_+ 分别为 $u(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 和 $x \rightarrow +\infty$ 时的值^[4],

且 $u_- > u_+$.

记 $u_- - u_+ = \omega > 0$, 则 $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\omega}{2\nu} u_z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\omega}{2\nu} u_z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^2 u_{zz}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} =$

$$\left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^3 u_{xxxx}.$$

将上述结果代入方程(1)中,化简整理得

$$-\lambda u_x + uu_x = \frac{1}{2} \omega u_{xx} - \frac{1}{2} \varepsilon \omega u_{xxx}, \quad (2)$$

其中 $\varepsilon = \omega \mu / 2\nu^2$. 由于 $\nu^2 \gg 4\mu$, 故 $\varepsilon \ll 1$. 由此将含有两个参数的问题化成单参数奇异摄动问题.

对方程(2)进行首次积分,得

$$-\lambda u + \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} \omega u_x - \frac{1}{2} \varepsilon \omega u_{xx} + c, \quad (3)$$

其中 c 为积分常数.

行波解在无穷远点的值决定行波速度 λ 与积分常数 c 的值^[1]. 即

$$\lambda = \frac{1}{2} (u_-^2 + u_+^2), \quad c = -\frac{1}{2} u_- u_+.$$

所以方程(3)变为

$$u^2 - (u_-^2 + u_+^2)u + u_- u_+ = \omega u_x - \varepsilon \omega u_{xx}. \quad (4)$$

要求出方程(4)的满足如下初值条件的解:

$$u(0) = \frac{1}{2} (u_-^2 + u_+^2). \quad (5)$$

$$\text{设 } u = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u^{(i)} \text{ 则 } u_x = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_x^{(i)}, \quad u_{xx} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_{xx}^{(i)}.$$

将其代入方程(4)中,并按 ε 的幂次展开得

$$[u^{(0)}]^2 - (u_-^2 + u_+^2)u^{(0)} + u_- u_+ = \omega u_x^{(0)} \quad (6a)$$

$$2u^{(0)}u^{(1)} - (u_-^2 + u_+^2)u^{(1)} = \omega u_x^{(1)} - \omega u_{xx}^{(0)}, \quad (6b)$$

$$2u^{(0)}u^{(2)} - (u_-^2 + u_+^2)u^{(2)} + [u^{(1)}]^2 = \omega u_x^{(2)} - \omega u_{xx}^{(1)}, \quad (6c)$$

$$2u^{(0)}u^{(3)} - (u_-^2 + u_+^2)u^{(3)} + 2u^{(1)}u^{(2)} = \omega u_x^{(3)} - \omega u_{xx}^{(2)}, \quad (6d)$$

.....

$$2u^{(0)}u^{(n)} - (u_-^2 + u_+^2)u^{(n)} + H_n = \omega u_x^{(n)} - \omega u_{xx}^{(n-1)}, \quad (6e)$$

其中

$$H_n = \begin{cases} [u^{(k)}]^2 + 2 \sum_{i=1}^k u^{(i)} u^{(n-i)} & (n = 2k), \\ 2 \sum_{i=1}^k u^{(i)} u^{(n-i)} & (n = 2k+1). \end{cases}$$

初始条件(5)式则相应变为

$$\begin{aligned} u^{(0)}(0) &= \frac{1}{2} (u_-^2 + u_+^2), \\ u^{(j)}(0) &= 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

经过计算,可依次求出

$$u^{(0)} = \frac{1}{2} (u_-^- + u_+^+) - \frac{1}{2} (u_-^- - u_+^+) \tanh(x/2).$$

这是 Burgers 方程行波解^[2].

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \frac{\omega e^x}{(1+e^x)^2} \eta, \\ u^{(2)} &= \frac{\omega e^x}{(1+e^x)^2} \left[\frac{e^x-1}{2(1+e^x)} \eta^2 - \frac{e^x-1}{1+e^x} \eta + \frac{3(e^x-1)}{1+e^x} - x \right], \\ u^{(3)} &= \frac{\omega e^x}{(1+e^x)^2} \left[\frac{e^{2x}-4e^x+1}{6(1+e^x)^2} \eta^3 - \frac{e^{2x}-3e^x+1}{(1+e^x)^2} \eta^2 + \frac{7e^x-8e^x+7}{(1+e^x)^2} \eta \right. \\ &\quad \left. - \frac{8e^{2x}-16e^x+8}{(1+e^x)^2} - x\eta \frac{e^x-1}{1+e^x} + x \frac{e^x-1}{1+e^x} \right], \end{aligned}$$

其中

$$\eta = x - 2 \ln \left(\frac{2e^x}{1+e^x} \right).$$

由此得到渐近展开式的直到 3 阶的明确表达式

$$u \approx u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \cdots + \varepsilon^3 u^{(3)}.$$

很明显, 由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} u^{(j)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(j)}(x) = 0$, ($j = 1, 2, 3$).

所以 $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ 都是有界函数.

三、一般渐近展开式

根据 (6e) 式, 得到 $u^{(n)}$ 的方程

$$u_x^{(n)} + \frac{e^x-1}{e^x+1} u^{(n)} = u_{xx}^{(n-1)} + \frac{1}{\omega} H_n, \quad (8)$$

其中

$$H_n = \begin{cases} [u^{(k)}]^2 + 2 \sum_{i=1}^k u^{(i)} u^{(n-i)} & (n = 2k); \\ 2 \sum_{i=1}^k u^{(i)} u^{(n-i)} & (n = 2k+1). \end{cases}$$

可以求出 $u^{(n)}$ 的满足初始条件 (7) 式的解为

$$u^{(n)} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \int_0^x \frac{(1+e^x)^2}{e^x} \left[u_{xx}^{(n-1)} + \frac{1}{\omega} H_n \right] dx. \quad (9)$$

至此已得到 $u(x)$ 的一般渐近展开式

$$u(x) \approx u^{(0)}(x) + \varepsilon u^{(1)}(x) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x) + \cdots + \varepsilon^n u^{(n)}(x) + \cdots,$$

其中

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2\nu} (u_-^- - u_+^+) \left[z - \frac{1}{2} (u_-^- + u_+^+) z \right] \\ \varepsilon &= \frac{\mu}{2\nu^2} (u_-^- - u_+^+). \end{aligned}$$

这里 u_-^-, u_+^+ 分别为 $u(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 和 $x \rightarrow +\infty$ 时的值, 并且 $u_-^- - u_+^+ > 0$.

对上述的 $u^{(n)}$, 可以证明它是有界函数. 为了证明这个结论, 先给出以下几个引理:

引理 1: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续的导函数, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

引理 2: 若 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 并且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \int_0^x \frac{(1+e^x)^2}{e^x} F(x) dx \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \int_0^x \frac{(1+e^x)^2}{e^x} F(x) dx = 0. \end{aligned}$$

引理 3: 若 $G(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 并且

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0,$$

则

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \int_0^x G(x)(e^x + e^{-x}) dx \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \int_0^x G(x)(e^x + e^{-x}) dx = 0. \end{aligned}$$

这几个引理都简单易证, 证明从略.

$u^{(n)}(x)$ 为有界函数的证明如下:

由 (9) 式可得

$$\begin{aligned} u_x^{(n)} &= u_{xx}^{(n-1)} - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} u_{xx}^{(n-1)} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \int_0^x u_{xx}^{(n-1)}(e^x + e^{-x}) dx \\ &+ \frac{1}{\omega} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \int_0^x \frac{(1+e^x)^2}{e^x} H_n(x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

显然, 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} u^{(j)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(j)}(x) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n-1$,

则 $\lim_{x \rightarrow -\infty} H_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} H_n(x) = 0$.

根据 (10) 式, 利用上述引理, 有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(n)}(x) = 0.$$

由于 $u^{(n)}(x)$ 为连续函数, 所以 $u^{(n)}(x)$ 为有界函数.

已知

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u^{(j)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(j)}(x) = 0 \quad j = 1, 2, 3.$$

以上又证明了递推关系

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} u^{(j)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(j)}(x) = 0 \\ j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} u^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(n)}(x) = 0.$$

所以有如下结论:

$u^{(j)}(x) (j = 1, 2, \dots, n, \dots)$ 都为有界函数.

至此, 可以看到, 利用奇异摄动的理论和方法求 KdVB 方程行波解的过程中, 长期项是不出现的. 是否可以认为, 当 $v^2 \gg 4\mu$ 时, KdVB 方程的行波解用相应的 Burgers 方程行波解来近似时, 结果是一致有效的? 从而可以说此奇异摄动问题由于非线性项的

作用,可以用正则摄动来解决? 本人正继续努力,期望对上述问题得到确切的回答。

- [1] 管克英、高歌,中国科学(A辑), (1)(1987),64.
- [2] A. Jeffery and T. Kawahara, *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory*, Pitman, London, (1982).
- [3] R. S. Johnson, *J. Fluid Mech.*, 42(1970), 49.
- [4] Wenjiang Fu, Ji-min Zhang, Fuquan Pu, *Reprint of Applied Mathematics*, Tsinghua University, Beijing, China.

AN ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE TRAVELLING WAVE SOLUTION OF THE KdV-BURGERS EQUATION

LU XIAN-QING

Department of Mathematics and Physics, Shandong Education College, Jinan, 250013

(Received 25 March 1991)

ABSTRACT

By applying the theory and method of singular perturbations, we investigate the travelling wave solution of the KdVB equation under the assumption $v^2 \gg 4\mu$. We get the explicit expression of the travelling wave solution up to the third order at first. Then, we obtain the general asymptotic expansion: $u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots + \varepsilon^n u^{(n)} + \dots$ and prove that $u^{(j)} (j = 1, 2, \dots, n, \dots)$ are bounded functions.

PACC: 0290; 0365