

非共振 Jaynes-Cummings 模型中强相干光的长时间挤压行为*

曹 昌 祺 丁 小 宏

北京大学物理系, 北京 100871

1991 年 7 月 15 日收到

利用 Jaynes-Cummings (缩写为 J-C) 模型研究了失谐情况下强相干光的长时间挤压行为, 其中原子与光场的作用包括单光子跃迁和双光子跃迁两种情况. 给出大 N 极限下挤压度的解析表达式. 研究结果表明: 对单光子跃迁, 失谐(非共振)时的挤压行为定性上与共振时相似, 小的失谐对挤压只有小的影响. 双光子跃迁时情况不同, 失谐起着重要作用. 共振时不出现挤压, 失谐时才出现挤压, 被压缩的不确定度准周期地出现极小, 在大 N 极限下, 此极小值系列并趋于零.

PACC: 4250

一

关于 J-C 模型中相干光所受的挤压, 已有不少研究, 但主要都局限在弱光或短(作用)时间 ($gt \leq 1$, g 为原子与光子的耦合常数) 的情况, 得到的挤压度不大. 从 Rabi 振荡看, 当光场强度大时, 系统中原子的长时间 ($gt \sim \sqrt{N}$, N 为初始相干光场的平均光子数) 行为, 出现了新的特征: 振荡准周期性地衰退与复苏^[1]. 由此可以想到, 强光场挤压度的长时间行为亦可能与其短时间行为有质的不同. 1988 年 Kuklinski 与 Madajczyk 对此进行了研究^[2], 果然得出, 压缩度也具有准周期的变化行为, 从而出现一系列极小值. 在大 N 极限下, 此极小值数列并趋于零(完全压缩).

在本文中先将 Kuklinski 与 Madajczyk 的工作推广到非共振(失谐)的情况, 得出相应的大 N 极限下压缩度的解析表达式, 并求出极小点处的渐近值, 然后再研究双光子跃迁的情况, 同样可导出压缩度的解析公式. 从这些表达式立即看出, “失谐”在上述两种情况中起着很不相同的作用³⁾.

二

先来考察非共振单光子跃迁的情况.

* 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目.

1) 本文主要结果曾于 1991 年 4 月在中国科学院上海光学精密机械研究所量子光学开放研究实验室学术会议上报告过.

在作用图象中, 单个二能级原子与单模光场的相互作用哈密顿量在作旋转波近似后即为

$$\hat{H}_{int}(t) = \hbar g(S + d e^{i\Delta t} + S_- d^+ e^{-i\Delta t}), \quad (1)$$

其中

$$\Delta = \omega_s - \omega, \quad (2)$$

ω_s 与 ω 分别为原子跃迁和光场的圆频率, g 为原子与光子的电偶极耦合常数.

通过求解原子-光场总体的状态所满足的方程, 得到总体状态的密度矩阵, 再对原子自由度求迹, 即可求出光场状态的密度矩阵. 若原子初始时处在激发态, 腔内光场初始时为相干态, 其振幅参量(即光子吸收算符 d 的本征值)为 α , 则求出的光场密度矩阵元为

$$\begin{aligned} \rho_{m,n}(t) = e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^m (\alpha^*)^n}{\sqrt{m!n!}} & \left[\left(\cos Q_m t - i \frac{\Delta}{2Q_m} \sin Q_m t \right) \left(\cos Q_n t \right. \right. \\ & \left. \left. + i \frac{\Delta}{2Q_n} \sin Q_n t \right) + \frac{g^2 m n}{|\alpha|^2 Q_{m-1} Q_{n-1}} (\sin Q_{m-1} t) (\sin Q_{n-1} t) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$Q_n = \sqrt{g^2(n+1) + \frac{1}{4}\Delta^2}. \quad (4)$$

令

$$\begin{aligned} d &= d_1 + i d_2, \\ d_\phi &= d_1 \cos \phi + d_2 \sin \phi = \frac{1}{2} (d e^{-i\phi} + d^+ e^{i\phi}), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 d_ϕ 代表吸收算符在任意方向上的分量; δ_ϕ^2 为 d_ϕ 的方差,

$$\delta_\phi^2 = \langle d_\phi^2 \rangle - \langle d_\phi \rangle^2;$$

δ_1^2 和 δ_2^2 分别为 d_1 和 d_2 的方差, 则不难得出

$$\begin{aligned} \delta_\phi^2 &= \frac{1}{2} (\delta_1^2 + \delta_2^2) + \frac{1}{2} (\delta_1^2 - \delta_2^2) \cos 2\phi \\ &+ \frac{1}{2} (\langle d_1 d_2 + d_2 d_1 \rangle - 2\langle d_1 \rangle \langle d_2 \rangle) \sin 2\phi. \end{aligned} \quad (6)$$

于是极值出现的方向由下式确定:

$$\tan 2\phi = \frac{\langle d_1 d_2 + d_2 d_1 \rangle - 2\langle d_1 \rangle \langle d_2 \rangle}{\delta_1^2 - \delta_2^2}. \quad (7)$$

利用(3)式不难求出(7)式等号右方各量, 为简便计取 α 为正实数, 这时有

$$\begin{aligned} \langle d_1 \rangle &= \sum_n \sqrt{n+1} \operatorname{Re}[\rho_{n,n+1}(t)] \\ &= \frac{1}{2} \alpha \sum_n P_n \left[\left(1 + \frac{Q_{n+1}}{Q_n} \right) \cos(Q_{n+1} - Q_n)t \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{Q_{n+1}}{Q_n} \right) \cos(Q_{n+1} + Q_n)t \right], \\ \langle d_2 \rangle &= - \sum_n \sqrt{n+1} \operatorname{Im}[\rho_{n,n+1}(t)] \end{aligned} \quad (8a)$$

$$= -\frac{1}{4}\alpha\Delta \sum_n P_n \frac{1}{Q_{n+1}} \left[\left(1 + \frac{Q_{n+1}}{Q_n}\right) \sin(Q_{n+1} - Q_n)t \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{Q_{n+1}}{Q_n}\right) \sin(Q_{n+1} + Q_n)t \right], \quad (8b)$$

$$\langle \hat{d}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_n \sqrt{(n+1)(n+2)} \operatorname{Re} [\rho_{n,n+2}(t)] + \frac{1}{4} \sum_n (2n+1) \rho_{n,n}(t) \\ - \frac{1}{4} \alpha^2 \sum_n P_n \left[\left(1 + \frac{Q_{n+2}}{Q_n}\right) \cos(Q_{n+2} - Q_n)t \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{Q_{n+2}}{Q_n}\right) \cos(Q_{n+2} + Q_n)t \right] \\ + \frac{1}{4} (2\alpha^2 + 1) + \frac{1}{4} \sum_n P_n \frac{g^2(n+1)}{Q_n^2} (1 - \cos 2Q_n t), \quad (8c)$$

$$\langle \hat{d}_2^2 \rangle = -\frac{1}{2} \sum_n \sqrt{(n+1)(n+2)} \operatorname{Re} [\rho_{n,n+2}(t)] + \frac{1}{4} \sum_n (2n+1) \rho_{n,n}(t) \\ - \frac{1}{4} \alpha^2 \sum_n P_n \left[\left(1 + \frac{Q_{n+2}}{Q_n}\right) \cos(Q_{n+2} - Q_n)t \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{Q_{n+2}}{Q_n}\right) \cos(Q_{n+2} + Q_n)t \right] \\ + \frac{1}{4} (2\alpha^2 + 1) + \frac{1}{4} \sum_n P_n \frac{g^2(n+1)}{Q_n^2} (1 - \cos 2Q_n t), \quad (8d)$$

$$\langle \hat{d}_1 \hat{d}_2 + \hat{d}_2 \hat{d}_1 \rangle = -\sum_n \sqrt{(n+1)(n+2)} \operatorname{Im} [\rho_{n,n+2}(t)] \\ - \frac{1}{4} \alpha^2 \Delta \sum_n P_n \frac{1}{Q_{n+2}} \left[\left(1 + \frac{Q_{n+2}}{Q_n}\right) \sin(Q_{n+2} - Q_n)t \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{Q_{n+2}}{Q_n}\right) \sin(Q_{n+2} + Q_n)t \right], \quad (8e)$$

其中

$$P_n = e^{-\alpha^2} \frac{\alpha^{2n}}{n!} = e^{-N} \frac{N^n}{n!},$$

$N = \alpha^2$ 代表原相干光场的平均光子数。

大 N 近似是指: N 很大 t 也很大, 而

$$\tau = \frac{gt}{\sqrt{N}} \quad (9)$$

为有限值的情况。当 N 大时, (8) 式中求和的主要范围在 N 附近, 例如

$$N - 2\sqrt{N} < n < N + 2\sqrt{N},$$

这时 (8a)–(8e) 式中各式等号右方第一项是稳相项, 因中心项与其相邻项的相位差量级 $\sim \tau/N$ 。这样即使累加到上述主要范围的边缘, 总相位差亦不过 $\tau/\sqrt{N}$, 仍是一个小量。(8a)–(8e) 式中各式等号右方第二项则不同, 中心项与其相邻项相位差量级为 τ , 是一有限值, 因而是非稳相项。(8c) 和 (8d) 式等号右方最后一项中含 $\cos 2Q_n t$ 的部份亦属非稳相项, 而含 1 (即 $\cos 0$) 的部份为稳相项。

对于稳相项,可将其中 n 的函数在 $n = N$ 处作展开,因为在上述的主要求和范围内,它们的改变为小量.然后利用

$$\sum_n P_n(n - N) = 0, \quad \sum_n P_n(n - N)^2 = N,$$

即可求出大 N 近似下各稳相项的贡献,并由此得出

$$\delta_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \frac{\tau}{(1 + \lambda)^{3/2}} \sin \frac{\tau}{\sqrt{1 + \lambda}} + \frac{\tau^2}{16(1 + \lambda)^3} \sin^2 \frac{\tau}{2\sqrt{1 + \lambda}} + D_1, \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \delta_2^2 = & \frac{1}{4} + \frac{\tau^2}{16(1 + \lambda)^3} + \frac{\tau}{8(1 + \lambda)^{5/2}} \left[\frac{3 - 2\lambda}{2(1 + \lambda)} - 4 - \lambda \right] \sin \frac{\tau}{\sqrt{1 + \lambda}} \\ & + \frac{1}{1 + \lambda} \left[N + \frac{1 + 4\lambda}{2(1 + \lambda)} - \frac{2 + \lambda}{16(1 + \lambda)^3} \tau^2 \right] \sin^2 \frac{\tau}{2\sqrt{1 + \lambda}} \\ & + D_2, \end{aligned} \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta_1 \delta_2 + \delta_2 \delta_1 \rangle - 2\langle \delta_1 \rangle \langle \delta_2 \rangle = & \frac{1}{2(1 + \lambda)} \left[\frac{\tau^2}{8(1 + \lambda)^2} \right. \\ & \cdot \left. \sqrt{\frac{\lambda}{1 + \lambda}} - 1 \right] \sin \frac{\tau}{\sqrt{1 + \lambda}} \\ & + \frac{\sqrt{\lambda}}{4(1 + \lambda)^3} \tau \sin^2 \frac{\tau}{2\sqrt{1 + \lambda}} + D, \end{aligned} \quad (10c)$$

其中 λ 为无量纲的失谐因子,

$$\lambda = \frac{\Delta^2}{4g^2 N}. \quad (11)$$

τ 由(9)式定义,为无量纲的时间变量. D_1 , D_2 和 D 为非稳相项或交叉项的贡献,它们可化为

$$\begin{aligned} D_1 = & \frac{1}{4(1 + \lambda)} \sum_n P_n \left[2 \cos \frac{\tau}{2\sqrt{1 + \lambda}} \cos(\varrho_{n+1} + \varrho_n)t \right. \\ & \left. - \cos(\varrho_{n+2} + \varrho_n)t - \cos 2\varrho_n t \right], \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} D_2 = & \frac{1}{4(1 + \lambda)} \sum_n P_n \left[\cos(\varrho_{n+2} + \varrho_n)t - \cos 2\varrho_n t \right. \\ & \left. + \frac{2\lambda}{1 + \lambda} \sin \frac{\tau}{2\sqrt{1 + \lambda}} \sin(\varrho_{n+1} + \varrho_n)t \right], \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} D = & \frac{\sqrt{\lambda}}{2(1 + \lambda)^{3/2}} \sum_n P_n \left[\sin(\varrho_{n+2} + \varrho_n)t - \cos \frac{\tau}{2\sqrt{1 + \lambda}} \right. \\ & \left. \cdot \sin(\varrho_{n+1} + \varrho_n)t - \sin \frac{\tau}{2\sqrt{1 + \lambda}} \cos(\varrho_{n+1} + \varrho_n)t \right], \end{aligned} \quad (12c)$$

其中的 $\varrho_{n+2} + \varrho_n$ 可改写成 $(\varrho_{n+2} - \varrho_{n+1}) + (\varrho_{n+1} + \varrho_n)$, $2\varrho_n$ 可改写成 $(\varrho_{n+1} + \varrho_n) - (\varrho_{n+1} - \varrho_n)$, 然后利用三角函数和差化积的公式,在大 N 近似下将 $\cos 2\varrho_n t$ 化成 $\cos \frac{\tau}{2\sqrt{1 + \lambda}} \cos(\varrho_{n+1} + \varrho_n)t + \sin \frac{\tau}{2\sqrt{1 + \lambda}} \sin(\varrho_{n+1} + \varrho_n)t$, 将 $\cos(\varrho_{n+2} + \varrho_n)t$

$Q_n)t$ 化成

$$\cos \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}} \cos(Q_{n+1} + Q_n)t - \sin \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}} \sin(Q_{n+1} + Q_n)t.$$

对 $\sin(Q_{n+2} + Q_n)t$ 亦可类似处理. 代回(12)式后即得

$$D_1 = D = 0,$$

$$D_2 = -\frac{1}{2(1+\lambda)^2} \sin \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}} \sum_n P_n \sin(Q_{n+1} + Q_n)t.$$

在求和的主要范围内, $\sin(Q_{n+1} + Q_n)t$ 相邻项的相位差 $\approx \tau/\sqrt{1+\lambda}$, 因而只当 $\tau/\sqrt{1+\lambda}$ 近似等于 2π 整数倍时, $\sum P_n \sin(Q_{n+1} + Q_n)t$ 才显著不为零(数量级为1). 但这时求和号前的因子 $\sin \tau/2\sqrt{1+\lambda}$ 近似为零. 因此 D_2 亦不重要. 实际上, 当 $\sin \tau/2\sqrt{1+\lambda}$ 不在零附近时, δ_2^2 中可只保留一项, 即 $(N/1+\lambda)\sin^2(\tau/2\sqrt{1+\lambda})$, 而当 $\sin \tau/2\sqrt{1+\lambda}$ 在零附近时, 只需再多保留 $1/4 + \tau^2/16(1+\lambda)^3$ 的项. 这样(10)式即化为

$$\delta_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{\tau}{8(1+\lambda)^{3/2}} \sin \frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda}} + \frac{\tau^2}{16(1+\lambda)^3} \sin^2 \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}}, \quad (13a)$$

$$\delta_2^2 = \frac{N}{1+\lambda} \sin^2 \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}} + \frac{1}{4} + \frac{\tau^2}{16(1+\lambda)^3}, \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_1 \rangle - 2\langle \hat{a}_1 \rangle \langle \hat{a}_2 \rangle &= \frac{1}{2(1+\lambda)} \left[\frac{\tau^2}{8(1+\lambda)^2} \sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda}} - 1 \right] \\ &\quad \cdot \sin \frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{4(1+\lambda)^3} \tau \sin^2 \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}}. \end{aligned} \quad (13c)$$

这就是所需要的基本公式, 推导时假定 τ/N , τ^2/N 都是小量. 当 $N \rightarrow \infty$ (τ 保持有限)时, 上式代表准确的结果, 而当 N 为有限的大数时, 则 τ 的取值不能太大, 以保持 τ/N , τ^2/N 都比1小得多.

三

从(7)和(13)式看到, 无论 $\tau/\sqrt{1+\lambda}$ 是否在 $2k\pi$ (k 为整数)附近, 在大 N 近似下都有

$$\tan 2\phi = 0. \quad (14)$$

从而极值出现在 $\phi = 0$ 和 $\pi/2$ 处. 从(6)式不难看出前者对应于极小而后者对应于极大. 这表明在大 N 极限下最小不确定度总出现在相干光场振幅 α 的方向上, 其值即由(13a)式表示. 当 N 有限时, 两者间将出现偏角, 其值 ϕ 并随时间改变.

δ_1^2 随 τ 的变化具有准周期性性质 (其中 $\sin^2(\tau/2\sqrt{1+\lambda})$ 可化成 $1/2 - (1/2)\cos \tau/\sqrt{1+\lambda}$), 定性上与共振情况相似, 从而会出现一系列的极小. 从

$$\frac{d}{d\tau} \delta_1^2 = 0$$

可得极值点满足的方程为

$$\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2} \tau(1+2\lambda) \cos \frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda}} + \sqrt{1+\lambda} \cdot \left[1 + \lambda + \frac{\tau^2}{4(1+\lambda)} \right] \sin \frac{\tau}{\sqrt{1+\lambda}} = 0. \quad (15)$$

由此解出其根分为两个系列:

$$1) \quad \tan \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}} = \frac{\sqrt{1+\lambda}}{\lambda\tau} \left(\left[1 + \lambda + \frac{\tau^2}{4(1+\lambda)} \right] + \sqrt{\left[1 + \lambda + \frac{\tau^2}{4(1+\lambda)} \right]^2 + \lambda\tau^2} \right), \quad (16a)$$

$$2) \quad \tan \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}} = \frac{\sqrt{1+\lambda}}{\lambda\tau} \cdot \left(\left[1 + \lambda + \frac{\tau^2}{4(1+\lambda)} \right] - \sqrt{\left[1 + \lambda + \frac{\tau^2}{4(1+\lambda)} \right]^2 + \lambda\tau^2} \right) \\ = -\tau\sqrt{1+\lambda} / \left\{ 1 + \lambda + \frac{\tau^2}{4(1+\lambda)} + \sqrt{\left[1 + \lambda + \frac{\tau^2}{4(1+\lambda)} \right]^2 + \lambda\tau^2} \right\}. \quad (16b)$$

从 δ_i^2 对 τ 的二次微商可以证明, 对于根系 (16a) 式,

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \delta_i^2 < 0,$$

从而根系 (16a) 式为极大点系列; 而根系 (16b) 式使

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \delta_i^2 > 0,$$

从而为极小点系列。

如果令曲线 I 表示

$$Y = \tan \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}},$$

曲线 II 表示

$$Y = -\tau\sqrt{1+\lambda} / \left[1 + \lambda + \frac{\tau^2}{4(1+\lambda)} + \sqrt{\left[1 + \lambda + \frac{\tau^2}{4(1+\lambda)} \right]^2 + \lambda\tau^2} \right],$$

则极小点系列 τ_k 即为此两曲线的交点, 参见图 1。

当 τ 大时, (16b) 式可近似成

$$\tan \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}} \approx -\frac{2(1+\lambda)^{3/2}}{\tau} \left[1 - \frac{4(1+\lambda)^3}{\tau^2} \right]. \quad (17)$$

保留一修正项是为了下面计算极小点处 δ_i^2 的需要。由图 1 或 (17) 式可知, 第 k 个极小点 τ_k 在 k 大时趋近于 $2k\pi\sqrt{1+\lambda}$ 。值得指出的是, 根据 (13a) 式, 当 τ 严格取 $2k\pi\sqrt{1+\lambda}$ 时, δ_i^2 等于 $1/4$, 即无压缩。从图 1 可见, 极小点位于 $2k\pi\sqrt{1+\lambda}$ 的左侧。

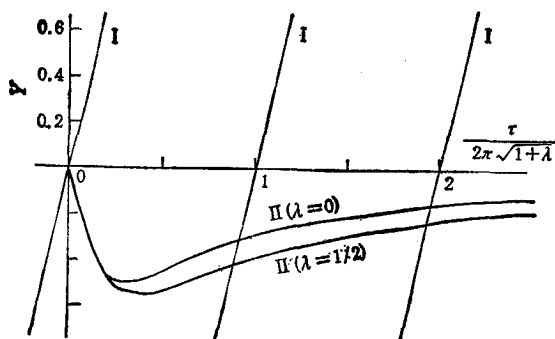


图 1

为了计算极小点处 δ_i^2 的渐近表示式, 先将 (13a) 式写成

$$\delta_i^2 = \frac{1}{4} + \frac{\tau}{4(1+\lambda)^{3/2}} \cos^2 \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}} \tan \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}} \cdot \left[1 + \frac{\tau}{4(1+\lambda)^{3/2}} \tan \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}} \right]. \quad (18)$$

然后将其中 $\tan \tau/2\sqrt{1+\lambda}$ 和 $\cos^2(\tau/2\sqrt{1+\lambda})$ 用 (17) 式及

$$\cos^2 \frac{\tau}{2\sqrt{1+\lambda}} \approx 1 - \frac{4(1+\lambda)^3}{\tau^2} \quad (19)$$

代入。由此化出第 k 个极小点 τ_k 处 δ_i^2 的表达式

$$(\delta_i^2)_k \approx \frac{1}{\tau_k^2} (1+\lambda)^3. \quad (20)$$

经此处理后, τ_k 才可取成 (对大 k) 其渐近值 $2k\pi\sqrt{1+\lambda}$ 。于是得

$$(\delta_i^2)_k \approx \frac{(1+\lambda)^2}{4k^2\pi^2} \quad k \gg 1+\lambda. \quad (21)$$

随着 k 的增大, δ_i^2 很快地趋于零。

从 (20) 式可以看出, 要得到大的压缩, τ^2 必须比 $(1+\lambda)^3$ 大得多, 亦即

$$g\tau \gg (1+\lambda)^{3/2} \sqrt{N}.$$

这表明 N 愈大需要的作用时间愈长, 并要准时将原子引出, 才能得到深度挤压的光场。

从本节的结果可以看到, 当失谐增大时, $\tau_k (\sim 2k\pi\sqrt{1+\lambda})$ 和 $(\delta_i^2)_k$ 都增大。即失谐对提高压缩度和减少作用时间都起着不利影响。

以上考虑的是大 N 极限的情况。当 N 有限时, 由于 (13) 式的成立要求 $\tau^2 \ll N$, 故 (21) 式只适用于

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{N}{1+\lambda}} \gg k \gg 1$$

的范围。 δ_i^2 最小值的量级 $\sim 1/N$ 。

四

再来研究双光子跃迁的情况。

在旋转波近似下, 相互作用哈密顿量 (作用图象中) 为

$$\hat{H}_{int}(t) = \hbar g' (S_+ \hat{a}^2 e^{i\Delta t} + S_- \hat{a}^{+2} e^{-i\Delta t}), \quad (22)$$

其中

$$\Delta = \omega_a - 2\omega_s.$$

如果仿照单光子跃迁的情况来分析共振时的 Rabi 振荡, 就会得出: 当 N 大时, 求和级数中相邻项的相位差达到 2π 的时间为 $t = \pi/g'$, 此值与 N 具体取值无关 (只要足够大)。而且到 $t = 2\pi/g'$ 时, 各项本身都近似还原到初值。下面将看到, 光场的密度矩阵元也有类似的性质。

同样, 通过求解总体状态所满足的方程, 以及将总体状态的密度矩阵对原子自由度求

迹,可求出光场状态的密度矩阵元 $\rho_{mn}(t)$ 。当原子初始为激发态,腔内光场初始为相干态时 (α 取为实数),

$$\begin{aligned} \rho_{mn}(t) = e^{-\alpha^2} \frac{\alpha^{m+n}}{\sqrt{m!n!}} & \left[\left(\cos Q_m t - \frac{i\Delta}{2Q_m} \sin Q_m t \right) \right. \\ & \cdot \left(\cos Q_n t + \frac{i\Delta}{2Q_n} \sin Q_n t \right) \\ & \left. + \frac{g'^2 mn(m-1)(n-1)}{\alpha^4 Q_{m-2} Q_{n-2}} \sin Q_{m-2} t \sin Q_{n-2} t \right], \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$Q_n = \sqrt{g'^2(n+1)(n+2) + \frac{1}{4}\Delta^2}.$$

当 $\Delta = 0$ 而且 N 大时,对重要的 n ,

$$Q_n \approx \left(n + \frac{3}{2}\right) g' t,$$

于是当 t 增加 $2\pi/g'$ 时,如前所述 ρ_{mn} 将近似还原。

从 $\rho_{mn}(t)$ 即得

$$\begin{aligned} \langle d_1 \rangle = \frac{1}{2} \alpha \sum_n P_n & \left[\left(1 + \frac{Q_{n+1}}{Q_n} \right) \cos(Q_{n+1} - Q_n)t \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{Q_{n+1}}{Q_n} \right) \cos(Q_{n+1} + Q_n)t \right], \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} \langle d_1^2 \rangle = \frac{1}{4} N \sum_n P_n & \left[\left(1 + \frac{Q_{n+2}}{Q_n} \right) \cos(Q_{n+2} - Q_n)t \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{Q_{n+2}}{Q_n} \right) \cos(Q_{n+2} + Q_n)t \right] + \frac{1}{4} (2N + 1) \\ & + \sum_n P_n \frac{g'^2(n+1)(n+2)}{Q_n^2} \sin^2 Q_n t, \end{aligned} \quad (24b)$$

$$\begin{aligned} \langle d_2 \rangle = -\frac{1}{4} \alpha \Delta \sum_n P_n \frac{1}{Q_{n+1}} & \left[\left(1 + \frac{Q_{n+1}}{Q_n} \right) \sin(Q_{n+1} - Q_n)t \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{Q_{n+1}}{Q_n} \right) \sin(Q_{n+1} + Q_n)t \right], \end{aligned} \quad (24c)$$

$$\begin{aligned} \langle d_1^2 \rangle = -\frac{1}{4} N \sum_n P_n & \left[\left(1 + \frac{Q_{n+2}}{Q_n} \right) \cos(Q_{n+2} - Q_n)t \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{Q_{n+2}}{Q_n} \right) \cos(Q_{n+2} + Q_n)t \right] + \frac{1}{4} (2N + 1) \\ & + \sum_n P_n \frac{g'^2(n+1)(n+2)}{Q_n^2} \sin^2 Q_n t, \end{aligned} \quad (24d)$$

$$\begin{aligned} \langle d_1 d_2 + d_2 d_1 \rangle = -\frac{1}{4} N \Delta \sum_n P_n \frac{1}{Q_{n+2}} & \left[\left(1 + \frac{Q_{n+2}}{Q_n} \right) \sin(Q_{n+2} - Q_n)t \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{Q_{n+2}}{Q_n} \right) \sin(Q_{n+2} + Q_n)t \right]. \end{aligned} \quad (24e)$$

当 N 大时,可仿前求出

$$\delta_1^2 = \frac{1}{4} - \frac{\tau'\lambda'}{4(1+\lambda')^{3/2}} \sin \frac{\tau'}{\sqrt{1+\lambda'}} + \frac{\tau'^2\lambda'^2}{4(1+\lambda')^3} \sin^2 \frac{\tau'}{2\sqrt{1+\lambda'}}, \quad (25a)$$

$$\delta_2^2 = \frac{1}{4} + \frac{\tau'^2\lambda'^2}{4(1+\lambda')^3} + \frac{N}{1+\lambda'} \sin^2 \frac{\tau'}{2\sqrt{1+\lambda'}}, \quad (25b)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_1 \rangle - 2\langle \hat{a}_1 \rangle \langle \hat{a}_2 \rangle &= \sqrt{\frac{\lambda'}{1+\lambda'}} \left[\frac{1}{1+\lambda'} + \frac{\tau'^2\lambda'^2}{4(1+\lambda')^3} \right] \\ &\cdot \sin \frac{\tau'}{\sqrt{1+\lambda'}} - \frac{\tau'\lambda'^{5/2}}{2(1+\lambda')^3} \cos \frac{\tau'}{\sqrt{1+\lambda'}}, \end{aligned} \quad (25c)$$

其中 τ' 为无量纲的时间因子, λ' 为无量纲的失谐因子,

$$\tau' = 2g't, \quad (26a)$$

$$\lambda' = \frac{\Delta^2}{4g'^2N^2}. \quad (26b)$$

(6)和(7)式对双光子跃迁情况仍适用,将(25)式代入(7)式即可求出不确定度极值所在的方位角. 在大 N 近似下同样有极小值出现在 $\phi = 0$ 方位上, 即与 α 同方位. 于是(25a)式就给出最小不确定度的值.

图 2 给出 $N = 80$, $\Delta/g' = 100$ 时 δ_1^2 随 τ' 的变化. 图 2 中曲线 I 代表准确值(未作大 N 近似, 即由 (24a) 和 (24b) 式直接计算求出), 曲线 II 是根据大 N 近似下求出的 δ_1^2 解析表达式 (25a) 计算的结果. 可以看到在图 2 中所示的 τ' 范围, 两者符合很好.

从(25a)式可以看出, 在共振情况 ($\lambda' = 0$)

$$\delta_1^2(t) = \frac{1}{4},$$

即无压缩¹⁾. 只有在失谐情况, 才可能出现压缩. 这是双光子跃迁情况与单光子跃迁重要不同之处.

δ_1^2 随 τ' 变化曲线中, 亦有一系列极小. 从

$$\frac{d}{d\tau'} \delta_1^2 = 0$$

可得极小值系列为

$$\tan \frac{\tau'}{2\sqrt{1+\lambda'}} = \frac{\sqrt{1+\lambda'}}{\tau'(1+\lambda')} \left[\left(1 + \lambda' - \frac{\tau'^2\lambda'}{2(1+\lambda')} \right) \right]$$

1) 这是指大 N 近似下而言.

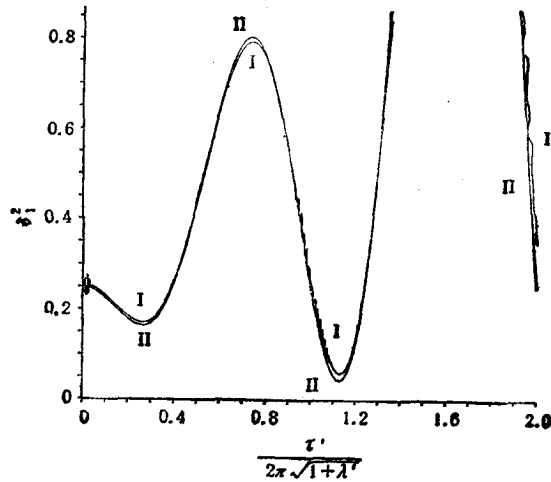


图 2
曲线 I 代表准确值; 曲线 II 代表 (25a) 式

$$+ \sqrt{\left(1 + \lambda' - \frac{\tau'^2 \lambda'}{2(1 + \lambda')}\right)^2 + \tau'^2(1 + 3\lambda')}. \quad (27)$$

当 τ' 大时, 上式可近似成

$$\tan \frac{\tau'}{2\sqrt{1 + \lambda'}} = \frac{(1 + \lambda')^{3/2}}{\tau' \lambda'} - \frac{(1 + \lambda')^{5/2}}{\tau'^3 \lambda'^3}. \quad (28)$$

δ_1^2 可改写成

$$\delta_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{\tau'^2 \lambda'^2}{4(1 + \lambda')^3} \cos^2 \frac{\tau'}{2\sqrt{1 + \lambda'}} \tan \frac{\tau'}{2\sqrt{1 + \lambda'}} \cdot \left[\tan \frac{\tau'}{2\sqrt{1 + \lambda'}} - \frac{2(1 + \lambda')^{3/2}}{\tau' \lambda'} \right], \quad (29)$$

再利用(28)式即可化出第 k 个极小点处的 δ_1^2 的渐近表达式

$$(\delta_1^2)_k \approx \frac{(1 + \lambda')^3}{4\tau_k'^2 \lambda'^2}, \quad k \gg \frac{1 + \lambda'}{\pi \lambda'}, \quad (30)$$

其中 τ_k' 并可取成其渐近值

$$\frac{\tau_k'}{2\sqrt{1 + \lambda'}} \approx k\pi.$$

将上式代入(30)式后即将它化为

$$(\delta_1^2)_k \approx \frac{(1 + \lambda')^2}{16k^2 \pi^2 \lambda'^2}, \quad k \gg \frac{1 + \lambda'}{\pi \lambda'}. \quad (31)$$

在双光子跃迁情况, 同样需要作用时间足够地大才有可能得到深度压缩. 由(30)式, $(\delta_1^2)_k \ll 1$, 要求

$$g' \gg \frac{(1 + \lambda')^{3/2}}{\lambda'}. \quad (32)$$

由于 g' 很小而上式右方大于(或等于) $\frac{1}{2} \sqrt{27}$, 故上式要求 λ' 为很大的值. 还可以看到, 当失谐量 $\Delta \rightarrow 0$ 时, 上式右方趋于无穷大, 与前述不出现压缩相一致. 最佳失谐量(使上式右方取极小)为

$$\Delta_m = 2\sqrt{2} g' N.$$

它可能为一小值(当 N/V 不太大时, 因 g' 与 V 成反比). 这表明, 在双光子跃迁情况下, 小的失谐可以产生重大的影响, 此结果是始料不及的.

校后注: 作者在看校样时了解到 V. Bužek 最近亦对失谐对双光子跃迁情况下失谐的影响进行了讨论. 参见 V. Bužek, *Phys. Lett.*, **A151**(1990), 234.

- [1] J. H. Eberly, N. B. Narozhny and J. J. Sanchez-Mondragon *Phys. Rev. Lett.*, **40**(1980), 1323.
 [2] J. R. Kuklinski and J. L. Madajczyk, *Phys. Rev.*, **A37**(1988), 3175.

LONG-TIME BEHAVIOR OF SQUEEZING OF COHERENT LIGHT IN OFF-RESONANCE JAYNES-CUMMINGS MODEL

CAO CHANG-QI DING XIAO-MING

Department of Physics, Peking University, Beijing 100871

(Received 15 July 1991)

ABSTRACT

The long-time behavior of squeezing of intense coherent light is studied with off-resonance Jaynes-Cummings model. The interaction between field and atom includes both one-photon transition type and two-photon transition type. The analytical formulae for quadrature variances are obtained. In one-photon transition case, small detuning only has small effect on squeezing. For two-photon transition, however, the situation is quite different. No squeezing will occur in resonance case. Only detuning can cause squeezing. Then a series of minimum appear in the suppressed quadrature variance during time evolution. In large N limit this series tends to zero.

PACC:4250