第 41 卷 第 12 期　　物 理 学 报　　Vol. 41 No. 12
1992 年 12 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Dec., 1992

狭窄波束型高频引力辐射与电磁场的作用效应

李 芳 昱
重庆大学应用物理系，重庆 630044
唐 孟 希
中山大学物理系，广州 510275
赵 鹏 飞
雷州师范专科学校物理系，湛江 524048
1991 年 2 月 25 日收到

从弱引力场的 Einstein-Maxwell 方程出发，讨论了晶体空间阵列的狭窄波束型高频引力辐射与电磁场的作用效应，并给出了扰动解. 计算表明，在 TT (Transvese Traceless) 坐标系中，最优辐射方向的引力波束是纯十型极化的，并可使同频的电磁波产生倍频的扰动效应，使静态电磁场产生与时间成线性关系的累积扰动效应. 对于任意方向上的引力辐射波束，在垂直于引力波矢的平面内仍然是纯十型极化的. 在高频辐射和实验室典型尺度条件下，TT 坐标系与 Fermi 坐标系的差异是可以忽略的.

PACC: 0430; 0440

一、引　言

引力辐射的电磁产生和电磁探测曾为一些作者研究过[1]. 由于引力波脉冲天体源的随机性和连续天体源的低频性，使之给研究带来很大困难，因而实验室引力辐射的直接激发和探测显然具有特别的意义. 对于高频引力辐射，电磁探测可直接通过引力波引起的扰动电磁场来显示，并可望获得比 Weber 型天线更高的精度.

Grishchuk 等人曾提出用电磁谐振腔激发引力辐射及其电磁探测的设想[2]. 为了在波区产生 $10^{-7}\mathrm{erg}\cdot\mathrm{cm}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 的辐射能流，需要发射源的体积达 $10^{9}\mathrm{cm}^{3}$，其中电磁场的能量密度达 $10^{10}\mathrm{erg}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$. Braginsky 等人讨论过用电磁环型波导对天体高频平面引力波探测的方案[3]，这种方案要求引力波的传播方向必须严格垂直于环型波导，并且在假定引力波频率已知的前提下，要求波导中电磁波的振荡频率、旋转频率同引力波频率满足苛刻的频率条件. Boccaletti 等人讨论过平面引力波同静态均匀电磁场的作用效应以及相反过程的效应[4]. Papini, Sabbata 等人讨论过平面引力波与非均匀电磁场（库仑场、磁偶极场）相互作用的电磁-引力转换问题[5]. Денисов 讨论过天体引力波与旋转磁偶极场的

作用效应[6]. 陶福臻等人用经典微扰法，讨论过天体平面引力波对同频电磁波、电磁驻波及静态电磁场的作用效应[7].

本文则以文献[8，9]中提出的晶体空间阵列的狭窄波束型高频引力辐射为电磁探测对象，讨论了它与电磁场的作用效应. 由于晶体阵列的方位、振荡频率、振荡位相是可以人为控制的，这就大大减少了引力波电磁探测中的不确定因素. 当然，由于辐射的非平面波特征带来了一定的复杂性，但通过适当的坐标选择和规范条件，仍然可以得到比较简洁的结果. 本文的所有结果均具有明显的物理效应.

二、弱场条件下的 Einstein-Maxwell 方程

预期的实验室引力波振幅 h 的数量级为 10^{-30}—10^{-38} 左右[1,10]，故用弱场解讨论是适宜的. 按照传统的引力理论，在此条件下的纯引力场的能量-动量赝张量为[10]

$$t^{\mu\nu}\sqrt{-g}=\frac{c^4}{64\pi G}\left[2\phi^{\alpha\beta,\mu}\phi^{\nu}_{\alpha\beta}-\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}-\delta^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\phi_{,\rho}\phi^{,\rho}-\phi_{\alpha\beta,\rho}\phi^{\alpha\beta,\rho}\right)\right]. \tag{1}$$

这时 Einstein 方程退耦为线性方程

$$\Box\phi^{\mu\nu}=-\frac{16\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}, \tag{2}$$

且有

$$\phi^{\mu\nu}_{,\nu}=0, \tag{3}$$

$$\phi^{\mu\nu}=h^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}\approx\frac{4G}{c^4}\int\frac{(T^{\mu\nu})_t}{r}\,\mathrm{d}^3x', \tag{4}$$

其中 $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ 为 Lorentz 度规，$h^{\mu\nu}$ 为引力场对平直时空的一级修正，$T^{\mu\nu}$ 为物质的能量-动量张量. (4) 式中的 $\phi^{\mu\nu}$ 与电动力学中的推迟势有完全相同的形式. 这时方程的线性特征表明，$\phi^{\mu\nu}$ 的任意线性迭加仍然是方程(2)的解. DeDonder 规范条件(3)式容许人们用 ϕ^{ij} 去计算引力辐射能流(拉丁字母表 1，2，3，希腊子母表 0,1,2,3). 若(1)式中的 $\phi^{\mu\nu}$ 对应于文献[8,9]中晶体阵列中单个辐射基元的引力势，则由(1)，(2)式自然可得由这种晶体辐射基元组成的矩形晶体空间阵列的引力辐射的总能流密度为

$$\begin{aligned}T^{r}_{a}&=\frac{n^r c^5}{64\pi G}[2\phi^{\alpha\beta,0}\phi^{,r}_{\alpha\beta}-\phi^{,0}\phi^{,r}][f(\theta,\varphi)]^2\\&=\frac{n^r c^5}{64\pi G}[2\phi^{\alpha\beta,0}_{a}\phi^{,r}_{\alpha\beta_a}-\phi^{,0}_{a}\phi^{,r}_{a}]\\&=t^{0r}n^r[f(\theta,\varphi)]^2,\end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\phi^{\alpha\beta}_{a}=\phi^{\alpha\beta}f(\theta,\varphi), \tag{6}$$

$f(\theta,\varphi)$ 为阵列的辐射角分布因子. 对于文献[8,9]中的行波型引力辐射，显然应有

$$\phi^{\alpha\beta}_{a}=\phi^{\alpha\beta}\left\{\frac{1-\sin(iN_x kl_x\sin\theta\cos\varphi)}{1-\sin(ikl_x\sin\theta\cos\varphi)}\right\}$$

$$\cdot\left\{\frac{1-\sin[iN_ykl_y(1-\sin\theta\sin\varphi)]}{1-\sin[ikl_y(1-\sin\theta\sin\varphi)]}\right\}\left\{\frac{1-\sin(iN_xkl_x\cos\theta)}{1-\sin(ikl_x\cos\theta)}\right\}, \tag{7}$$

其中 $N_xN_yN_z$ 为总基元数，l_x,l_y,l_z 分别为 x,y,z 三个方向上相邻基元的平均距离，k 为引力波矢．由于晶格均沿 z 方向振荡，由文献[8]知

$$\ddot{D}^{11}=\ddot{D}^{22}=-\frac{1}{2}\ddot{D}^{33},$$

且有

$$\phi^{ij}=-\frac{2G}{3c^4r}\begin{pmatrix}\ddot{D}^{11} & & 0\\ & \ddot{D}^{22} & \\ 0 & & \ddot{D}^{33}\end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中 D^{ij} 为单个晶体辐射基元与时间相关的四极矩张量．由(5)，(7)和(8)式确定的引力辐射能流是无迹的，但不是横向的．下面选择 TT 规范，对于这里的非平面波型的引力辐射，应采用 TT 规范的一般形式[11]

$$h^{ij}_{TT}=\left[(\delta^{ik}-n^in^k)(\delta^{jl}-n^jn^l)-\frac{1}{2}(\delta^{ij}-n^in^j)(\delta^{kl}-n^kn^l)\right]\phi^{kl}_a, \tag{9}$$

其中 $n^1=\sin\theta\cos\varphi, n^2=\sin\theta\sin\varphi, n^3=\cos\theta$．由(7)—(9)式可得 TT 规范下 h^{ij}_{TT} 各分量为

$$h^{11}_{TT}=\frac{1}{2}(1-\sin^2\theta\cos^2\theta)\phi^{11}_a+\frac{1}{2}(\sin^4\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\cos^2\theta)\phi^{22}_a$$
$$+\frac{1}{2}\sin^2\theta(\cos^2\theta\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\phi^{33}_a,$$

$$h^{22}_{TT}=\frac{1}{2}(\cos^2\theta+\sin^4\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\phi^{11}_a+\frac{1}{2}(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)^2\phi^{22}_a$$
$$+\frac{1}{2}\sin^2\theta(\cos^2\theta\sin^2\varphi+\sin^2\varphi-1)\phi^{33}_a,$$

$$h^{33}_{TT}=\frac{1}{2}\sin^2\theta(\cos^2\theta\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\phi^{11}_a$$
$$+\frac{1}{2}\sin^2\theta(\cos^2\theta\sin^2\varphi^2-\cos^2\varphi)\phi^{22}_a+\frac{1}{2}\sin^4\theta\phi^{33}_a,$$

$$h^{12}_{TT}=h^{21}_{TT}=\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi(\sin^2\theta\cos^2\varphi-1)\phi^{11}_a$$
$$+\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\phi\sin\varphi(\sin^2\theta\sin^2\varphi-1)\phi^{22}_a$$
$$+\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi(1+\cos^2\theta)\phi^{33}_a,$$

$$h^{13}_{TT}=h^{31}_{TT}=\frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\theta\cos\varphi(\sin^2\vartheta\cos^2\varphi-1)\phi^{11}_a$$
$$+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\vartheta\cos\varphi(\sin^2\theta\sin^2\varphi+1)\phi^{22}_a-\frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\vartheta\cos\varphi\phi^{33}_a,$$

$$h^{23}_{TT}=h^{32}_{TT}=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\vartheta\sin\varphi(1+\sin^2\theta\cos^2\varphi)\phi^{11}_a$$

$$+\frac{1}{2}(\sin^2\theta\sin^2\varphi-1)\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\phi_a^{22}-\frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\phi_a^{33}. \tag{10}$$

对于最优辐射方向(y 方向,即 $\theta=\varphi=\pi/2$),由(1),(8)和(10)式得 h_{TT}^{ij} 的非零分量为

$$h_{TT}^{ij}=\begin{pmatrix} h_{TT}^{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & h_{TT}^{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\phi_a^{11}-\phi_a^{33}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\phi_a^{33}-\phi_a^{11})\end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中 $h_{TT}^{11}=-h_{TT}^{33}=\frac{h_+}{y}\cos k(ct-y)$,$h_+/y$ 为晶体阵列高频引力辐射在波区的基频引力波的振幅. (11)式表明,最优辐射方向的引力波束是纯十型极化的. 将(11)式代入 TT 规范下能流密度的 Landan-Lifshitz 形式

$$\langle T_{TT}^{\tau}\rangle=\frac{c^5}{32\pi G}\langle h_{TT}^{ij,0}h_{TT}^{ij,0}\rangle, \tag{12}$$

可算得最优辐射上的能流密度与(5)式的结果完全相同.

下面分别就最优辐射方向和任意辐射方向引力波对电磁场的扰动效应进行讨论.

1. 最优辐射方向的扰动解

从弯曲时空中的 Maxwell 方程出发,即

$$g^{\nu\alpha}F_{\mu\nu;\alpha}=0, \tag{13}$$

$$F_{[\mu\nu,\alpha]}=0, \tag{14}$$

其中

$$F_{\mu\nu;\alpha}=F_{\mu\nu,\alpha}-\Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma}F_{\sigma\nu}-\Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma}F_{\mu\sigma}, \tag{15}$$

$$F_{[\mu\nu,\alpha]}=F_{\mu\nu,\alpha}+F_{\alpha\mu,\nu}+F_{\nu\alpha,\mu}, \tag{16}$$

$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ 为克氏联络,分号表示协变微商,逗号表示普通微商. 将(11)式代入(13)式有

$$\begin{aligned} &g^{11}F_{01;1}+g^{22}F_{02;2}+g^{33}F_{03;3}=0,\\ &g^{00}F_{10;0}+g^{22}F_{12;2}+g^{33}F_{13;3}=0,\\ &g^{00}F_{20;0}+g^{11}F_{21;1}+g^{33}F_{23;3}=0,\\ &g^{00}F_{30;0}+g^{11}F_{31;1}+g^{22}F_{32;2}=0. \end{aligned} \tag{17}$$

Boccaletti 等人曾证明,对于探测电磁场,沿引力波传播方向的电磁场分量不发生变化[4]. 故只考虑垂直于引力波束的横向分量. 现用微扰法求解,将横向电磁场分量 E_1,E_3,H_1,H_3 按 h 量级展开成

$$\begin{aligned} &E_1=\overset{(0)}{E}_1+\overset{(1)}{E}_1+O(h^2),\quad E_3=\overset{(0)}{E}_3+\overset{(1)}{E}_3+O(h^2),\\ &H_1=\overset{(0)}{H}_1+\overset{(1)}{H}_1+O(h^2),\quad H_3=\overset{(0)}{H}_3+\overset{(1)}{H}_3+O(h^2), \end{aligned} \tag{18}$$

其中 $\overset{(0)}{E}_1$,$\overset{(0)}{E}_3$,$\overset{(0)}{H}_1$,$\overset{(0)}{H}_3$ 为无引力波时平直时空中的电磁场;$\overset{(1)}{E}_1$,$\overset{(1)}{E}_3$,$\overset{(1)}{H}_1$,$\overset{(1)}{H}_3$ 为引力波出现时的一级扰动项. 将(18)式代入(14),(17)式有

$$\Box\overset{(0)}{E}_1 = 0, \quad \Box\overset{(0)}{H}_1 = 0,$$
$$\Box\overset{(0)}{E}_3 = 0, \quad \Box\overset{(0)}{H}_3 = 0 \tag{19}$$

和

$$\overset{(1)}{E}_{1,0} - \overset{(1)}{H}_{3,2} = -h[(A_0 + D_0) + 2a_1\cos k_0(ct + y) + 2b_1\sin k_0(ct + y)],$$
$$\overset{(1)}{E}_{3,0} + \overset{(1)}{H}_{1,2} = h[(B_0 - C_0) + 2a_3\cos k_0(ct + y) + 2b_3\sin k_0(ct + y)],$$
$$\overset{(1)}{E}_{1,2} - \overset{(1)}{H}_{3,0} = 0, \quad \overset{(1)}{E}_{3,2} + \overset{(1)}{H}_{1,0} = 0, \tag{20}$$

其中 $\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$；$a_1$、$a_3$、$b_1$、$b_3$ 为沿 y 辐反方向传播的电磁波基波的振幅；k_0 为电磁波矢；A_0, B_0, C_0, D_0 分别为 $\overset{(0)}{E}_1$, $\overset{(0)}{E}_3$, $\overset{(0)}{H}_1$, $\overset{(0)}{H}_3$ 中的常数场分量。(19)式表明，$\overset{(0)}{F}_{\mu\nu}$ 满足一维齐次波动方程，故应有一静态常数场解和平面波解。而(20)式表明，与引力波束同向传播的电磁波不受引力波的影响，只有反向传播的电磁波和常数电磁场才受到引力波束的扰动，这与 Codina 等人用矢势方程对平面引力波计算的结果是一致的[12]。下面仅就反向传播的电磁波和静态电磁场的情况，讨论引力波束的作用效应。对于只有反向传播电磁波的情况，可令(20)式中的 $A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = 0$。对于纯波动一级扰动场，可引入下面的尝试解：

$$\overset{(1)}{F}_{\mu\nu} = \frac{u}{y} = \frac{1}{y}\sum_n u_{0n}\cos nk_0(ct \pm y), \tag{21}$$

$\sum_n$ 表示对所有可能的解求和，n 为整数。考虑到文献[8,9]中波区的典型距离 $r = 3\times\times 10^2$cm 和高频引力波参量 ($\nu = 10^{11}$Hz, $\lambda = 0.3$cm, $k = 20.93$cm^{-1})，至少有

$$\left|\frac{u}{y^3}\right| : \left|\frac{1}{y^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right| : \left|\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \approx \frac{1}{y^2} : \frac{k}{y} : k^2 \approx 1 : 6\times 10^3 : 4\times 10^7, \tag{22}$$

故

$$\frac{\partial^2\overset{(1)}{F}_{\mu\nu}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{u}{y}\right) = 2\frac{u}{y^3} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

于是(20)式变为

$$\Box\overset{(1)}{E}_1 = -\frac{kk_0h_+}{y}[a_1\sin k_0(ct + y) - b_1\cos k_0(ct + y)]\sin k(ct - y)$$
$$+ \frac{k^2h_+}{y}[a_1\cos k_0(ct + y) + b_1\sin k_0(ct + y)]\cos k(ct - y),$$
$$\Box\overset{(1)}{E}_3 = \frac{kk_0h_+}{y}[a_3\sin k_0(ct + y) - b_3\cos k_0(ct + y)]\sin k(ct - y)$$
$$- \frac{k^2h_+}{y}[a_3\cos k_0(ct + y) + b_3\sin k_0(ct + y)]\cos k(ct - y),$$
$$\Box\overset{(1)}{H}_1 = -\frac{kk_0h^+}{y}[a_3\sin k_0(ct + y) - b_3\cos k_0(ct + y)]\sin k(ct - y)$$
$$- \frac{k^2h_+}{y}[a_3\cos k_0(ct + y) + b_3\sin k_0(ct + y)]\cos k(ct - y),$$

$$\Box\overset{(1)}{H}_3 = -\frac{kk_0h_+}{y}[a_1\sin k_0(ct+y) - b_1\cos k_0(ct+y)]\sin k(ct-y)$$

$$+\frac{k^2h_+}{y}[a_1\cos k_0(ct+y) + b_1\sin k_0(ct+y)]\cos k(ct-y). \tag{23}$$

为突出物理图象和简单起见，这里只考虑同频电磁波的情况，即 $k_0 = k$. 利用(22)式和初始条件

$$\overset{(1)}{F}_{\mu\nu}|_{t=0} = 0,\ \overset{(1)}{E}_{1,0}|_{t=0} = -\frac{kh_+}{y}(a_1\cos ky + b_1\sin ky)\sin ky,$$

$$\overset{(1)}{E}_{3,0}|_{t=0} = -\frac{kh_+}{y}(a_3\cos ky + b_3\sin ky)\sin ky,$$

$$\overset{(1)}{H}_{1,0}|_{t=0} = \overset{(1)}{H}_{3,0}|_{t=0} = 0,$$

由黎曼函数法，经过冗长而平凡的计算，对(23)式解得

$$\overset{(1)}{E}_1 = -\frac{a_1h_+}{4y} + \frac{a_1h_+}{8y}\cos 2k(ct-y) - \frac{b_1h_+}{8y}\sin 2k(ct-y) - \frac{a_1h_+}{8y}\cos 2k(ct+y)$$

$$-\frac{b_1h_+}{8y}\sin 2k(ct+y) + \frac{1}{4y}(b_1h_1\sin 2\omega t + a_1h_+\cos\omega t),$$

$$\overset{(1)}{E}_3 = \frac{a_3h_+}{4y} - \frac{a_3h_+}{8y}\cos 2k(ct-y) + \frac{b_3h_+}{8y}\sin 2k(ct-y) + \frac{a_3h_+}{8y}\cos 2k(ct+y)$$

$$+\frac{b_3h_+}{8y}\sin 2k(ct+y) - \frac{1}{4y}(b_3h_+\sin 2\omega t + a_3h_+\cos 2\omega t),$$

$$\overset{(1)}{H}_1 = -\frac{a_3h_+}{8y}\cos 2k(ct-y) + \frac{b_3h_+}{8y}\sin 2k(ct-y) - \frac{a_3h_+}{8y}\cos 2k(ct+y)$$

$$-\frac{b_3h_+}{8y}\sin 2k(ct+y) + \frac{1}{4y}(b_3h_+\sin 2ky + a_3h_+\cos 2ky),$$

$$\overset{(1)}{H}_3 = -\frac{a_1h_+}{8y}\cos 2k(ct-y) + \frac{b_1h_+}{8y}\sin 2k(ct-y) - \frac{a_1h_+}{8y}\cos 2k(ct+y)$$

$$-\frac{b_1h_+}{8y}\sin 2k(ct+y) + \frac{1}{4y}(b_1h_+\sin 2ky + a_1h_+\cos 2ky). \tag{24}$$

(24)式表明，扰动项 $\overset{(1)}{F}_{\mu\nu}$ 可分成两种线偏振模式 $(\overset{(1)}{E}_1, \overset{(1)}{H}_3)$ 和 $(\overset{(1)}{E}_3, \overset{(1)}{H}_1)$，两种模式都是横波，并具有 2ω 的频率，其振幅量级为 $h_+\overset{(0)}{F}_{\mu\nu}/y$. 对电场分量还包含一频率为 2ω 的交变场，磁场分量还包含一空间频率为 $2k$ 的附加场. 需要指出的是，由于晶体阵列引力辐射的非平面波特征，以上各扰动分量除了与方向有关外，且均随离波源距离的一次方而衰减.

对于只有静态探测电磁场的情况，可令(20)式中的 $a_1 = a_3 = b_1 = b_3 = 0$，于是用上面类似的方法算得扰动解为

$$\overset{(1)}{E}_1 = -\frac{kh_+}{4y}(A_0 + D_0)ct\sin k(ct-y) + \frac{h_+}{8y}(A_0 + D_0)\cos k(ct-y)$$

$$-\frac{h_+}{8y}(A_0 + D_0)\cos k(ct+y),$$

$$\overset{(1)}{E}_3 = -\frac{kh_+}{4y}(B_0 - C_0)ct\sin k(ct-y) - \frac{h_+}{8y}(B_0 - C_0)\cos k(ct-y)$$
$$+\frac{h_+}{8y}(B_0 - C_0)\cos k(ct+y)$$
$$\overset{(1)}{H}_1 = -\frac{kh_+}{4y}(B_0 - C_0)ct\sin k(ct-y) + \frac{h_+}{8y}(B_0 - C_0)\cos k(ct-y)$$
$$-\frac{h_+}{8y}(B_0 - C_0)\cos k(ct+y),$$
$$\overset{(1)}{H}_3 = -\frac{kh_+}{4y}(A_0 + D_0)ct\sin k(ct-y) + \frac{h_+}{8y}(A_0 + D_0)\cos k(ct-y)$$
$$-\frac{h_+}{8y}(A_0 + D_0)\cos k(ct+y). \tag{25}$$

特别需要注意的是(25)式中含有与时间成线性关系的累积效应项，该项表征的扰动场只沿 y 轴正方向传播，它们与其它项的振幅比为

$$\left|\frac{kh_+}{4y}(A_0 + D_0)ct\right| : \left|\frac{h_+}{8y}(A_0 + D_0)\right| = 2kct. \tag{26}$$

对于高频引力辐射，这显然是一个具有明显物理效应的扰动项. 考虑实验效应时，可略去其它项的贡献.

2. 任一辐射方向的扰动效应

(10)式表明，任一辐射方向上 h^{ij}_{TT} 一般有 6 个分量，直接求解显然比较复杂. 为此，选一新坐标系 $\tilde{\Sigma}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$，它是由旧坐标系 $\Sigma(x,y,z)$ 在 yz 平面内转 $(\pi/2-\theta)$ 角，再在 xy 平面内转 $(\pi/2-\phi)$ 角而至，故新旧关系为

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\varphi & -\cos\varphi & 0\\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ -\cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \tag{27}$$

即 $\tilde{\Sigma}$ 系中的 $\tilde{y}$ 方向正是 Σ 系中的 r 方向（即任一辐射方向）. 于是，新旧坐标中张量 ϕ^{ij}_a 的关系为

$$\tilde{\phi}^{ij}_a = \alpha^i_k\alpha^j_l\phi^{kl}_a, \tag{28}$$

α^i_k 即(27)式中的变换矩阵. 由(28)式不难算得

$$\tilde{\phi}^{ij}_a = \begin{pmatrix}\phi^{11}_a & 0 & 0\\ 0 & (1-3\cos^2\theta)\phi^{11}_a & \frac{3}{4}\sin 2\theta\phi^{33}_a\\ 0 & \frac{3}{4}\sin 2\theta\phi^{33}_a & \frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)\phi^{33}_a\end{pmatrix}. \tag{29}$$

将(29)式代入(9)式可算得 $\tilde{\Sigma}$ 系中 $\tilde{y}$ 方向的 $\tilde{h}^{ij}_{\mathrm{TT}}$ 分量为

$$\tilde{h}^{ij}_{\mathrm{TT}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\tilde{\phi}^{11}_a - \tilde{\phi}^{33}_a) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\tilde{\phi}^{33}_a - \tilde{\phi}^{11}_a)\end{pmatrix}. \tag{30}$$

这个结果与(11)式在形式上完全相同，这表明沿任一辐射方向的引力波束，在垂直于引力波矢的平面内仍然是纯十型极化的，故完全可按前面的方法求解. 例如，对于沿 (θ, φ) 方向传播的引力波，如果探测电磁场为沿 y 轴反方向传播的电磁波，可算得扰动电磁场中的 $(\overset{(1)}{E}_3, \overset{(1)}{H}_1)$ 模式为

$$\begin{aligned}
\overset{(1)}{E}_3 = & \left[\frac{a_3\tilde{h}_+}{4r} - \frac{a_3\tilde{h}_+}{8r}\cos 2k(ct-r) + \frac{b_3\tilde{h}_+}{8r}\sin 2k(ct-r) + \frac{a_3\tilde{h}_+}{8r}\cos 2k(ct+r)\right. \\
& \left. + \frac{b_3\tilde{h}_+}{8r}\sin 2k(ct+r) - \frac{1}{4r}(b_3\tilde{h}_+\sin 2\omega t + a_3\tilde{h}_+\cos 2\omega t)\right]\sin\theta, \\
\overset{(1)}{H}_1 = & \left[-\frac{a_3\tilde{h}_+}{8r}\cos 2k(ct-r) + \frac{b_3\tilde{h}_+}{8r}\sin 2k(ct-r) - \frac{a_3\tilde{h}_+}{8r}\cos 2k(ct+r)\right. \\
& \left. - \frac{b_3\tilde{h}_+}{8r}\sin 2k(ct+r) + \frac{1}{4r}(b_3\tilde{h}_+\sin 2kr + a_3\tilde{h}_+\cos 2kr)\right] \\
& \cdot\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\varphi}\,, \qquad (31)
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{h}_+$ 满足 $\tilde{h}^{11}_{TT} = -\tilde{h}^{33}_{TT} = \frac{\tilde{h}_+}{r}\cos k(ct-r)$，$\tilde{h}^{ij}_{TT}$ 和 h^{ij}_{TT} 的关系由(10)，(11)，(29)和(30)式表征.

3. TT 坐标系和 Fermi 坐标系中的电磁场张量

Fortini 等人对引力波电磁探测中的 TT 坐标系与 Fermi 坐标系间的关系作过详细的讨论[13]，并且证明在通常情况下，TT 坐标系并不是一个物理坐标系. 但在文献[13]的基础上可进一步证明 TT 坐标系与物理的 Fermi 坐标系中电磁场张量有如下关系[14]：

$$F_{\mu\nu}(x^\alpha) = \overset{(0)}{F}_{\mu\nu}(x^\alpha) + \overset{(1)}{F}^{TT}_{\mu\nu}(x^\alpha), \qquad (32)$$

即物理的 Fermi 坐标系中的 $F_{\mu\nu}(x^\alpha)$ 可简洁地表示为直接用 Fermi 坐标 x^α 表示的符合 TT 规范的一级扰动 $\overset{(1)}{F}^{TT}_{\mu\nu}$ 与无扰动时的 Ferml 量 $\overset{(0)}{F}_{\mu\nu}$ 之和. TT 坐标 x^λ_{TT} 与 Fermi 坐标 x^α 间的关系为

$$x^\lambda_{TT} = x^\mu\delta^\lambda_\mu + B^\lambda(x^\alpha), \qquad (33)$$

B^λ 为 h 的一级量. 由于 $k^\mu x_\mu$ 为不变量，故对于单色波总有[13]

$$[k(ct\pm y)]_{TT} = [k(ct\pm y)]_{Fermi}. \qquad (34)$$

对于(24)和(25)式中的 y，在 Fermi 坐标系中合理的选择只能是波区到晶体阵列的典型距离，它表示引力波振幅随距离衰减的合理规律. 若考虑文献[8]中的高频引力辐射，y 的典型值为 300cm，故由(33)式有

$$y_{TT} = y + B^y(x^\alpha) \approx y. \qquad (35)$$

这表明在高频辐射和实验室典型尺度条件下，对于一级扰动，实验室 Fermi 坐标系与 TT 坐标系的差异是可以忽略的，即两者的差异只能是 h 的二级量.

三、数值估算

现在估算文献[8，9]中行波型晶体空间阵列沿最优辐射方向的高频引力波束对静态电磁场的扰动效应．由(25),(32)和(35)式有

$$E_1 = \overset{(0)}{E}_1 + \overset{(1)}{E}_1 \approx A_0 - \frac{kh_+}{y}(A_0 + D_0)ct\sin k(ct - y),$$

$$H_3 = \overset{(0)}{H}_3 + \overset{(1)}{H}_3 \approx D_0 + \frac{kh_+}{y}(A_0 + D_0)ct\sin k(ct - y). \tag{36}$$

由此对应的电磁场的能流密度为

$$\begin{aligned}\langle|\boldsymbol{S}|\rangle &= \frac{c}{4\pi}\langle|\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_3|\rangle \\ &= \frac{c}{4\pi}\langle|\overset{(0)}{\boldsymbol{E}}_1 \times \overset{(0)}{\boldsymbol{H}}_3 + \overset{(0)}{\boldsymbol{E}}_1 \times \overset{(1)}{\boldsymbol{H}}_3 + \overset{(1)}{\boldsymbol{E}}_1 \times \overset{(0)}{\boldsymbol{H}}_3 + O(h^2)|\rangle \\ &= \frac{c}{4\pi}\langle|\overset{(0)}{\boldsymbol{S}} + \overset{(1)}{\boldsymbol{S}} + O(h^2)|\rangle,\end{aligned} \tag{37}$$

其中 $\overset{(0)}{\boldsymbol{S}}$ 为无引力波时的能流密度，$\overset{(1)}{\boldsymbol{S}}$ 为由引力波作用产生的一级扰动项．若令 $A_0 = 0, D_0 = 10^5\mathrm{G}$，并取文献 [8,9] 中晶体阵列引力辐射的实验室典型值 $h = h_+/y \approx 10^{-35}$，$\nu = 10^{11}\mathrm{Hz}$，信号积累时间取 $t = 60\mathrm{s}$，则由(36),(37)式得

$$\langle|\overset{(1)}{\boldsymbol{S}}|\rangle = \frac{c}{8\pi}\frac{kh_+}{4y}D_0^2ct = \frac{c}{8\pi}\frac{h_+}{4y}D_0^2\omega t \approx 1.13 \times 10^{-3}\mathrm{erg}\cdot\mathrm{cm}^{-2}\cdot\mathrm{s}^{-1}. \tag{38}$$

这个结果显然具有明显的物理效应．

最后需要指出的是，(38)式中的 t 不可能无限增长，原因是微扰法成立的条件必须是扰动场远小于原始场，即 $|\overset{(1)}{F}_{\mu\nu}| \ll |\overset{(0)}{F}_{\mu\nu}|$．事实上，当扰动电磁场随时间呈线性增长，上述近似条件势必不再满足．不过，本文的一级扰动场达到可以与原始场相比拟的时间至少在 $10^3\mathrm{s}$ 以上，因而(38)式中的 t 取 60s 是谨慎的．另外，引力辐射的相干原理是以弱场条件下线性化的 Einstein 方程为基础的．如何考察晶体阵列在一般情况下 Einstein 方程的严格辐射解和阵列的非线性相干效应，以及在这种情况下引力场相关的能量问题，显然是一个很有意义的工作，这些问题将另文给于讨论．

作者衷心感谢 V. D. Sabbata 教授非常有益的讨论和热情的帮助．

[1] D. Cuomo *et al.*, in International Symposium on Experimental Gravitational Physics (Guangzhou), P. F. Michelson ed. (World Scientific Press, 1988), p. 262.
[2] L. P. Grishchuk *et al.*, *Sov. Phy. JETP*, **41**(1975), 787;
L. P. Grishchuk, *Phys. Lett.*, **56A**(1976), 255.
[3] V. B Braginsky *et al.*, *Sov. Phys. JETP Lett.*, **13**(1971), 417; *Sov. Phys. JETP*, **38**(1973), 865.
[4] D. Boccaletti and V. D. Sabbata, *Nuovo Cimento*, **70B**(1970), 129.
[5] G. Papini *et al.*, *Phys. Rep. C*, **33**(1977), 51;
V. D. Sabbata *et al.*, *Acta Physica Polonica*, **A15**(1970), 13.
[6] В. И. Денисов *ЖЭТФ*, **74**(1978),401.

[7] 陶福臻、何志强，中山大学学报(自然科学版)，(2)(1984),27.
[8] 李芳昱、唐孟希，物理学报，12(1987),1570.
[9] 李芳昱、唐孟希， in International Symposium on Experimental Gravitational Physics, (Guangzhou), P. F. Michelson ed (World Scientific Press, 1988), p. 293.
[10] J. Weber, 广义相对论与引力波(科学出版社，北京，1977)，第91页.
[11] C. W. Misner, K. S. Thoren, J. A. Wheeler, Gravitation (San Francisco, 1973), p. 948.
[12] J. M. Condina *et al.*, *Phys. Rev.*, D21(1980), 2731.
[13] P. L. Fortini *et al.*, *Nuovo Cimento*, B71(1982), 37.
[14] G. Callegari, P. L. Fortini, *Nuovo Cimento*, B100(1987), 421.

INTERACTION BETWEEN NARROW WAVE BEAM-TYPE HIGH FREQUENCY GRAVITATIONAL RADIATION AND ELECTROMAGNETIC FIELDS

LI FANG-YU

Department of Applied Physics, Chongqing University, Chongqing 630044

TANG MENG-XI

Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275

ZHAO PENG-FEI

Department of Physics, Leizhou Teachers College, Zhanjiang 524048

(Received 25 February 1991)

ABSTRACT

Starting with the Einstein-Maxwell equations of weak gravitational field, we discussed the interaction between narrow wave beam-type high frequency gravitational radiation of crystal space array and electromagnetic fields. The perturbed solutions have been obtained. By our calculation, it is shown that this gravitational wave beam with optimal radiation direction is purely+type polarized in TT coordinate system, and it can make electromagnetic wave, which has the same frequency, to generate perturbed effects of frequency doubling, make static electromagnetic fields to generate cumulative effect linear in time. For the gravitational radiation wave beam with an arbitrary direction, it is also purely+type polarized in the plane perpendicular to the gravitational wave vector. Under the condition of high frequency radiation and laboratory's typical size, difference between TT coordinate and Fermi coordinate systems can be neglected.

PACC: 0430; 0440