

无规排列功率谱的有序孔径角*

钟 锡 华

北京大学物理系, 北京 100871

朱 亚 芬

北京大学地球物理系, 北京 100871

1992 年 1 月 13 日收到

无规排列功率谱与其单元功率谱的比值被称为干涉因子。根据统计数据实验, 研究了干涉因子的精细结构, 提出了受抑无规行走概念, 给出了与干涉因子取值从 N^2 降为 N 所对应的有序孔径角公式。公式表明, 有序孔径角与随机点源数目 N 值无关, 与随机点分布区间有反比关系, 其数值几倍于规则排列功率谱的角宽度。

PACC: 4280C; 0250

一、引 言

包含大量全同单元的衍射物, 大致地被分为规则结构与无规结构两种。在论及无规结构功率谱(夫琅和费衍射强度分布)时, 许多文献报道^[1-3], 当屏上光孔的分布无规则时, 在二重和中, m 和 n 取不同值时, m, n 不相同的那些项将在 $+1$ 和 -1 之间很快地起落, 结果这些项的和为零, 其余 $m = n$ 各项均为 1, 由此可知, 除局部涨落外, 总强度是单孔衍射光强度的 N 倍; 虽然这些大量点源是相干的, 但由于其空间排列是无序的, 致使它们产生的夫琅和费衍射强度分布回归到非相干迭加的结果, 处处是单一点源产生的强度的 N 倍。

粗略看上述结论是正确的, 但精细分析, 其失误是显然的。尽管各单元(横向)位置无规分布, 但它们的次波到达零级斑中心位置(即几何象点)是等光程的, 故相干迭加的结果是振幅 N 倍、强度 N^2 倍于单元衍射在此处的强度。这一点在文献 [4] 中已经指出。进而, 我们预测在零频邻近的低频(近轴)区域, 此倍率介于 N^2-N 之间; 只在稍高频区域, 此倍率在 N 值上下涨落。这里问题关键在于, 衍射屏上单元位移所导致的夫琅和费衍射场的相移量, 不仅决定于位移量本身, 还与衍射方向 (θ_1, θ_2) 有关。设无规结构中第 m 个单元(相对于中心单元)的位移量为 $r_m(x_m, y_m)$, 则其夫琅和费衍射场响应的相移量等于

$$\tilde{P}_m(\theta_1, \theta_2) = \exp[-ik(x_m \sin \theta_1 + y_m \sin \theta_2)], \quad (1)$$

故无规结构的功率谱可以表达为

* 国家自然科学基金资助的课题。

$$I(\theta_1, \theta_2) = \tilde{v}(\theta_1, \theta_2) \tilde{v}^*(\theta_1, \theta_2) = i(\theta_1, \theta_2) \left(\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \tilde{p}_m \tilde{p}_n^* \right), \quad (2)$$

其中 $i(\theta_1, \theta_2)$ 为单元功率谱。衍射方向 (θ_1, θ_2) 与空间频率的换算公式为

$$(\sin \theta_1, \sin \theta_2) = (\lambda f_x, \lambda f_y).$$

二、干涉因子与其精细结构

无规结构功率谱与其单元功率谱的比值为

$$F(\theta_1, \theta_2) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \tilde{p}_m(\theta_1, \theta_2) \cdot \tilde{p}_n^*(\theta_1, \theta_2), \quad (3)$$

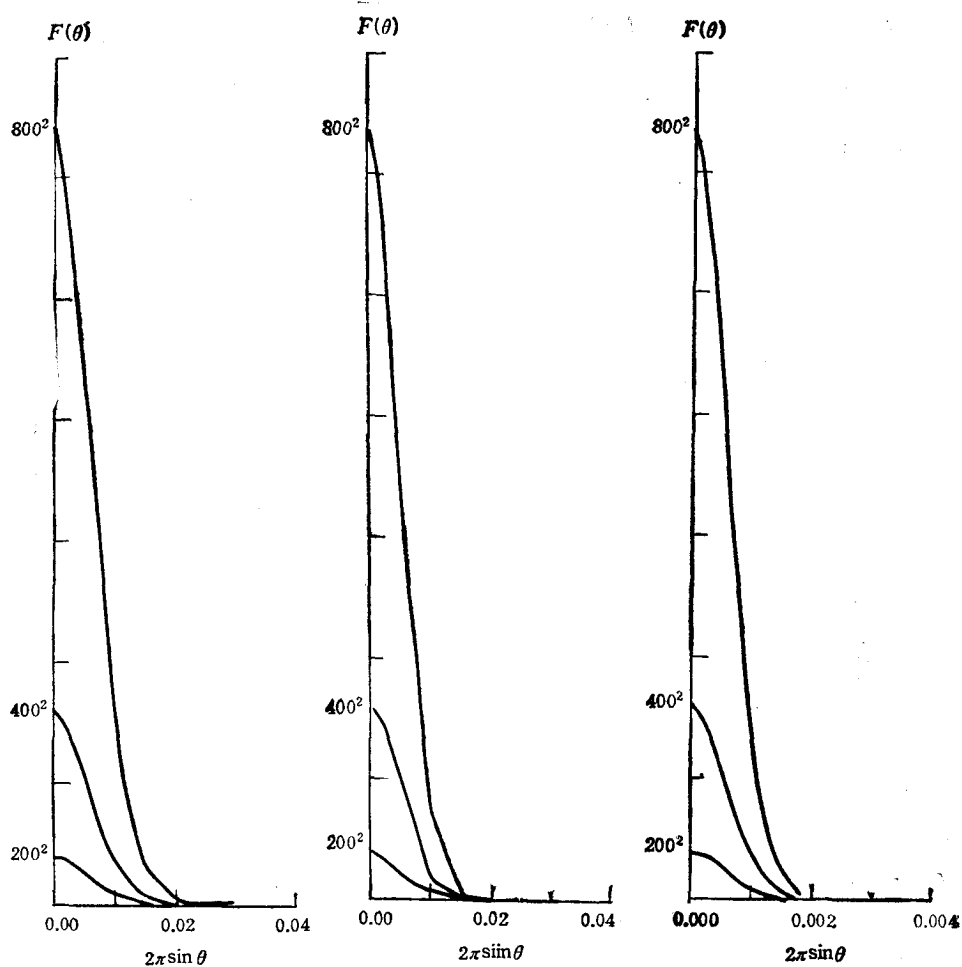
它被称为干涉因子。本文通过统计数据实验,显示干涉因子曲线,确定其值由 N^2 降为 N 值的角宽度。此角宽度被称之为有序孔径角。

讨论一维情形。图 1(a) 表示一组无规分布的相干点源,其干涉因子具有广泛的普遍性,适用于同样无规分布的一组任意形态的全同衍射单元的情形,例如一组无规分布的 N 条狭缝,或 N 个圆孔,或 N 个方孔等无规结构。它本身也可直接被视为一组干涉散斑。在一维情形下, (3) 式被简化为

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \cos(k(x_m - x_n) \sin \theta) \\ &= N + 2 \sum_{m=1}^N \sum_{n>m}^N \cos(k(x_m - x_n) \sin \theta) \\ &= \begin{cases} N^2, & \text{当 } \theta = 0; \\ N^2 - N, & \text{当 } \theta < \theta_0; \\ \sim N, & \text{当 } \theta > \theta_0. \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

上式等号右端第一项 N 值是自相干因子(常数),第二项是互相干因子。尽管 x_m 与 x_n 是完全不相关的,这也不足以保证互相干因子(即交叉余弦项)必定在 $(+1, -1)$ 之间无规涨落,因为其取值无规程度将受衍射方向 $\sin \theta$ 抑制。可以认为,这是一个“受抑无规行走”问题。只有当衍射角大于有序孔径角 θ_0 时,二重求和的交叉项才有近似的“零结果”。

统计数据实验是这样设计的。在区间 $D = 10^3 \lambda$ 内,分别调入 800, 400 和 200 个随机数,作为点源的位置坐标 x_m , 即这三组相干点源内部的平均间隔 $\overline{\Delta x} \approx 1.25\lambda, 2.5$ 和 5λ 。按(4)式计算并绘出其零频附近的干涉因子曲线,如图 1(b) 所示,其横坐标表示 $2\pi \sin \theta$ 值。在同样区间内,调入另一组 800, 400 和 200 个随机数,作为点源的位置坐标。计算并绘出其零频附近的干涉因子曲线,如图 1(c) 所示。将第一次实验的相干点群的平均间隔扩大 10 倍,即分布于 $D = 10^4 \lambda$ 区间内,其零频附近的干涉因子曲线如图 1(d) 所示。这三组曲线呈现同一线型,均由 N^2 值单调下降至 N 值附近,由此可以确定有序孔径角 θ_0 值。离开 θ_0 值的稍高频区域、直至甚高频段的干涉因子的变化,如图 2 所示,这三条曲线分别对应上述第一次调入的那三组相干点群。



(a) 一组无规分布的相干点群 (b) 在区间 $D = 10^3\lambda$, 调入第一组随机数, 分别取 $N = 200, 400, 800$ (c) 在区间 $D = 10^3\lambda$, 调入第二组随机数, 分别取 $N = 200, 400, 800$ (d) 区间扩大 10 倍, $D = 10^4\lambda$, 调入第一组随机数

图 1 决定有序孔径角的干涉因子曲线(横坐标表示 $2\pi\sin\theta$)

三、分析与结论

1. 受抑无规行走 (4)式中的二重求和项表现了一种无规行走的行为。其中($x_n - x_*$)是与横向点源位置相联系的无规取值, $\sin\theta$ 是纵向衍射方向, 它是一个参量。正是由于这个参量的作用, 使无规行走的方向受到不同程度的抑制。当 $\theta = 0$ 时, 它受到完

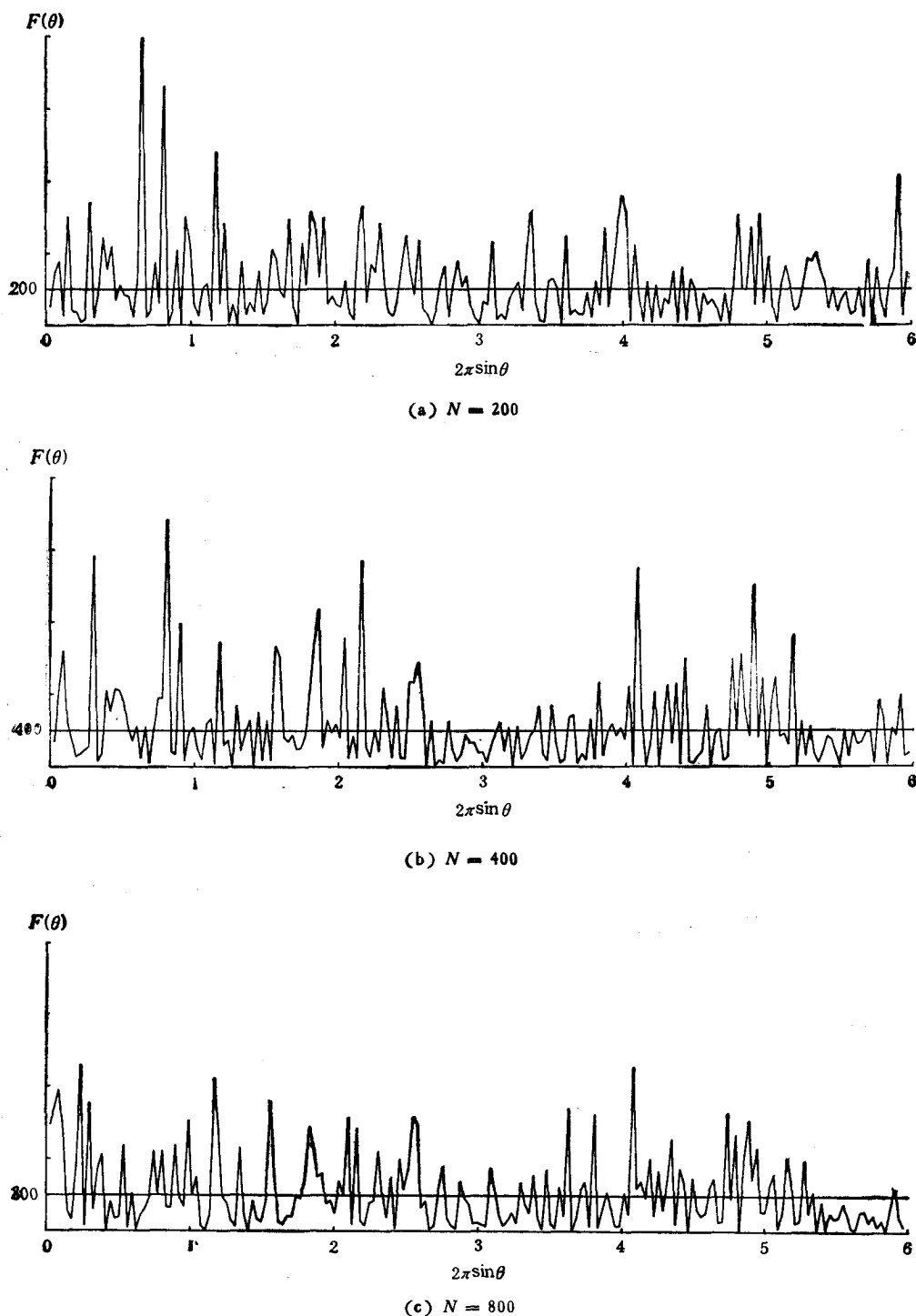


图2 在有序孔径角以外的干涉因子曲线(横坐标表示 $2\pi\sin\theta$, 取值间隔 0.03)

全抑制而取同一方向, 表现为完全有序的行走, 使干涉因子 $F(0) = N^2$; 当 $0 < \theta < \theta_0$, 它受到部分抑制, 表现为部分有序的行走, 使 $N^2 > F(\theta) > N$, 这种行走态势真像高山大回

环滑雪那样;只有当 $\theta > \theta_0$ 时, 它才表现为完全自由的无规行走。正是在上述意义上, 我们定义了有序孔径角 θ_0 。

2. 有序孔径角公式 图 1(b),(c),(d) 三组曲线显示, 有序孔径角 θ_0 值与随机点数目 N 几乎无关, 与随机点分布区间 D 近乎成反比关系, 它可由下式近似描述:

$$\theta_0 \cdot D \approx 4\lambda. \quad (5)$$

以 $D \approx 10^3\lambda$ 代入, 得 $\theta_0 \approx 4 \times 10^{-3}\text{rad}$. 图 1(b),(c) 表明, $\theta_0 \approx \frac{1}{2\pi} 2.5 \times 10^{-2} \approx 4 \times 10^{-3}$, 两者一致。与有序孔径角对应的有序低频限 $f_0 = \sin \theta_0 / \lambda \approx 7 \text{ mm}^{-1}$, 光波长取 $\lambda \approx 0.6 \mu\text{m}$ 。

如果 N 个点源有序分布于区间 D , 则其零级斑的角宽度由下式决定:

$$\Delta\theta_0 \cdot D \approx \lambda. \quad (6)$$

对比(5)与(6)式可见, 无规结构功率谱的有序孔径角数值, 几倍于规则结构功率谱的角宽度。这一点是耐人寻味的, 也是可以理解的。

3. 非对称涨落 图 2 显示, 干涉因子在 $\theta > \theta_0$ 广阔频域中快涨快落。图中画出 $F(\theta) = N$ 等值线作为考察涨落行为的一条参考线。但不能认为, 在单次实验中涨落曲线的平均值等于 N 。干涉导致的光强重新分布自然满足能量守恒律, 即 N 个单元的总光功率必然是单元光功率的 N 倍。既然在 $\theta < \theta_0$ 超低频段, 作为倍率的干涉因子值总是大于 N , 那么在 $\theta > \theta_0$ 的广阔频段内, 干涉因子涨落曲线的平均值一定小于 N 。也可以这样看待这种非对称涨落, 由于角(频)参量的作用, 将 $\theta > \theta_0$ 区域无规涨落的平均负偏量, 转移到 $\theta < \theta_0$ 区域的单调上升的正偏量。从图 2(a)–(c) 的演变过程, 可以看出一种趋势, 随着 N 数增加, 涨落的程度相对减弱, 即大于 N 值的谱峰高度相对降低。

[1] M. 玻恩, E. 沃耳夫, 光学原理(上)(科学出版社, 北京, 1985), 第 523 页。

[2] 赵凯华、钟锡华, 光学(下)(北京大学出版社, 1984), 第 112 页。

[3] R.W. 狄区本, 光学(I)(高等教育出版社, 北京, 1986), 第 193 页。

[4] E. Hecht and A. Zajac, Optics (New York, 1974). p.341.

ORDERED APERTURE ANGLE OF POWER SPECTRA OF RANDOM ARRAY

ZHONG XI-HUA

Department of Physics, Peking University, Beijing 100871

ZHU YA-FEN

Department of Geophysics, Peking University, Beijing 100871

(Received 13 January 1992)

ABSTRACT

The ratio of the power spectra of random array to whose unit is called the coherent factor. By analyzing the statistical data experiment of ours, we have studied the fine structures of the curves of coherent factor, introduced a new concept, namely the limited random walk; and found out the formula of the ordered aperture angle for which the values of coherent factor take from N^2 to N . This formula has shown that the angle is inversely proportional to the dimension of random array, but is independent of the total number of random points, and that the angle is several times as large as that of the power spectra of regular array in the same domain.

PACC: 4280C; 0250