

H_{XXZ} 模型与量子 $SU_q(2)$ 群的表示

侯伯宇 石康杰 杨仲侠 岳瑞宏

西北大学现代物理研究所, 西安, 710069

1991 年 1 月 28 日收到

本文利用 Bethe Ansatz 方法讨论具有特定的边界条件的 H_{XXZ} 模型与量子 $SU_q(2)$ 群表示, 证明对任意 q 值, BA 态是量子 $SU_q(2)$ 的最高权态, 由此生成量子群的不约表示. 对 $q = e^{ir}$ 为单位根. 证明 Bethe Ansatz 方程存在新的解组, 利用极限方法, 导出矢量 $|b\rangle$, 构造了量子 $SU_q(2)$ 群的不完全可约表示 (I 型) 和不可约表示 (II 型).

PACC: 113 0; 0550

一、引 言

近来, 人们对一维精确可解的统计模型作了大量的研究^[1-3], 海森堡自旋链体系是最引人注目的模型. 各项同性的 H_{XXX} 模型对应于 YB 方程的有理解^[4,5], 研究表明该模型是精确可解的, 并且有 $SU(2)$ 对称性^[6], 杨-杨研究了它的基态和激发态问题, 对 BA 方程每一解都存在一基态^[7]. IK 证明了与 H_{XXX} 模型对应的 BA 态不可能存在两个相等的动量^[8]. 对具有周期性边界条件的 H_{XXZ} 的研究表明, 它等价于 b 顶角模型^[3,9]. 对具有特定边界条件的 H_{XXZ} 模型, Alcaez 和 Sklyanin 分别用 Bethe Ansatz 和量子反散射方法精确求解了该模型的本征值和本征矢^[9,10]. Karowski 和 PS 分别证明它不具有经典 $SU(2)$ 对称性, 而具有量子 $SU_q(2)$ 群对称性^[11,12]. 他们讨论了量子 $SU_q(2)$ 群的表示, 并进行分类, 但没有直接构造其表示^[13].

对具有特定边界条件的 H_{XXZ} , 其哈密顿量可以写成 Teimperley-Lieb 代数的线性组合^[14], 在 Bethe Ansatz 解中, 所有的动量都是不相等的^[8]. 且要满足 BA 方程. 在 BA 方法中是否还存在新的态矢量, 它们既含有不相等的动量 k_i , 又含有若干相等的动量 p , 如果采用记号 $q = e^{ir}$, 则可知可能出现的相等的动量 p 一定是 r ^[15]. 这启发我们去寻找 BA 方程的新的解组.

本文的主要目的是研究 H_{XXZ} 模型的解空间, 从而建立起量子 $SU(2)$ 群的表示, 本文使用的方法是坐标 Bethe Ansatz 法. 首先证明 BA 态矢量是量子 $SU(2)$ 群的最高权表示的态矢量, 由 BA 态构造 $SU_q(2)$ 的表示, 并讨论它的完备性. 对 q 为单位根时, 证明了 BA 解中可以含有 m 个相等的 r 和 n 个不相等 k_i , 并导出它们所满足的方程 $q^{2(N-2n-m+1)} = 1$, 在此情况下 $SU_q(2)$ 的表示中, 有一类表示含有零模态, 并且证明该零模态是与另一 BA 态相重合, 因而出现表示空间的不完整性, 为了克服这一困难, 找到一个新方法——极限法, 给出一个具有一些特殊性质的矢量 $|b\rangle$, 由此矢量与 BA 态出发,

构成 $SU_q(2)$ 的不可分解的表示 (I 型), 利用此方法对 H_{XXZ} 的解空间进行分类, 对那些不存在零模态的表示, 它们构成 $SU_q(2)$ 的不可约表示 (II 型). 因此完全建立 $SU_q(2)$ 的表示与 H_{XXZ} 解空间的分类关系. 同时讨论 q 为单位根时的量子 $SU(2)$ 群的表示理论.

二、 $SU_q(2)$ 与 H_{XXZ} 模型

量子 $SU(2)$ 代数是经典 $SU(2)$ 代数的推广, 它的生成元 S^+, S^-, S^z 满足如下关系^[4]:

$$[S_z, S_{\pm}] = \pm S_{\pm}, [S_+, S_-] = [2S_z], \quad (1)$$

其中 $[x] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$, 在 $q \rightarrow 1$ 时, 上式就退化为经典 $SU(2)$ 代数的关系式. 对 (1) 式所给的代数, 人们可以定义它的余乘法、余单位和 antipode

$$\begin{aligned} \Delta(q^{\pm S_z}) &= q^{\pm S_z} \otimes q^{\pm S_z}, \quad \Delta(S^{\pm}) = q^{S_z} \otimes S^{\pm} + S^{\pm} \otimes q^{-S_z}, \\ \gamma(q^{\pm S_z}) &= q^{\mp S_z}, \quad \gamma(S^{\pm}) = -q^{\pm 1} S^{\pm}, \\ \varepsilon(q^{\pm S_z}) &= 1, \quad \varepsilon(S^{\pm}) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

考察 N 个 $SU_q(2)$ 的基本表示的直积, 根据余乘法的定义有

$$\begin{aligned} S^z &= \sum_{i=1}^N \sigma_i^2/2, \\ S^{\pm} &= \sum_{i=1}^N q^{\sigma_i^2/2} \otimes \cdots \otimes q^{\sigma_{i-1}^2/2} \otimes \sigma_i^{\pm}/2 \otimes q^{-\sigma_{i+1}^2/2} \otimes \cdots \otimes q^{-\sigma_N^2/2} \end{aligned} \quad (3)$$

其中 σ_i 为泡利矩阵, i 代表作用的空间. 该代数的中心为

$$S^2 = S^- S^+ + \left[S^z + \frac{1}{2} \right]^2 - \left[\frac{1}{2} \right]^2. \quad (4)$$

此外, 还可直接推导出如下公式:

$$[S^{+m}, S^{-n}] = S^{-m-n} \frac{[m]!}{[m-n]!} \prod_{k=1}^n [2S^z - m + k], \quad (5)$$

其中 $[m]! = [m][m-1] \cdots [2][1], [0]! = 1$.

具有边界项的 H_{XXZ} 模型其哈密顿量为

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \frac{1}{2} (q + q^{-1}) \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right) + \frac{1}{2} (q - q^{-1}) (\sigma_1^z - \sigma_N^z). \quad (6)$$

若采用空间的张量积记号, 则上述 H 可以改写成

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{q + q^{-1}}{2} - 2e_i \right), \quad (7)$$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & -1 & 0 \\ 0 & -1 & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中 e_i 为 Teimperley-Lieb 代数的生成元, 不难证明 (7) 式的哈密顿量与 $SU_q(2)$ 对易^[10,11],

$$[H, S^z] = 0, [H, S^\pm] = 0. \quad (9)$$

即量子群 $SU_q(2)$ 为 (6) 式所定义的开自旋链的对称群. 根据 (3) 式的定义

$$S^z = \sum_{i=1}^N \sigma_i^z$$

是与 H 对易, 因此可选 H, S^z 作为力学量的完全集. 用此完全集即可完全表征体系的本征矢与本征值. Alcarez 用坐标 Bethe Ansatz 方法精确求解了该体系^[9]. 令 H 的本征矢为

$$|\alpha\rangle = \sum_{\{x_i\}} f(x_1 \cdots x_n) |x_1 \cdots x_n\rangle, \quad (10)$$

其中 x_i 代表自旋向下的粒子的位置, $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq N (n \leq N/2)$. BA 的 f 函数为

$$f(x_1 \cdots x_n) = \sum_p \epsilon_p A(k_{p_1} \cdots k_{p_n}) \exp[i(k_{p_1} x_1 + k_{p_2} x_2 + \cdots + k_{p_n} x_n)]. \quad (11)$$

上式中的求和遍及所有的 $k_1 \cdots k_n$ 的置换以及各个动量 k_i 的反号(负值). 每作一次这样的操作, ϵ_p 就改变一次符号. 而 $A(k_1 \cdots k_n)$ 由下式给出:

$$A(k_1 \cdots k_n) = \prod_{i=1}^n \beta(-k_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n B(-k_i, k_l) e^{-ik_i}, \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \beta(k) &= (1 - qe^{-ik})e^{i(N+1)k}, \\ B(k_1, k_2) &= (1 - (q + q^{-1})e^{ik_2} + e^{i(k_1+k_2)}) \\ &\quad \times (1 - (q + q^{-1})e^{-ik_1} + e^{i(k_2-k_1)}) \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} &= (e^{-ik_2} + e^{ik_1} - q - q^{-1}) \\ &\quad \times (e^{ik_2} + e^{ik_1} - q - q^{-1})e^{i(k_2-k_1)}. \end{aligned} \quad (12c)$$

在上述 BA 解中, 并非任意动量构成的 $|\alpha\rangle$ 态都是 H 的本征矢, 它们必须满足一定的条件即 BA 方程, 令 $\alpha(k) = (1 - q^{-1}e^{-ik})$, 则 BA 方程为

$$\frac{\alpha(k_j)\beta(k_j)}{\alpha(-k_j)\beta(-k_j)} = \prod_{i=1, i \neq j}^n \frac{B(-k_i, k_j)}{B(+k_i, k_j)} \quad (j = 1, \cdots, n) \quad (13)$$

此时对应的 $|\alpha\rangle$ 态记为 $|n\rangle_{BA}$, 它是 H 的本征态, 本征值为

$$E_n = (N-1) \frac{q + q^{-1}}{2} + 4 \sum_{j=1}^n \left(\cos k_j - \frac{q + q^{-1}}{2} \right). \quad (14)$$

需要指出: BA 方程 (13) 中的解 k_j 都必须不相等且不为 $\gamma (q = e^{i\gamma})$. PS 指出对于这样的 $|n\rangle_{BA}$, 利用类似于证明 $SU(2)$ 对称的 H_{xxx} 模型的方法可以证明 $S^+ |n\rangle_{BA} = 0$ ^[4], 但没有给出明显的证明, 本文考虑到该问题是构造 $SU_q(2)$ 表示的出发点, 在下一节中将采用坐标 Bethe Ansatz 方法直接加以证明.

三、BA 态空间与 $SU_q(2)$ 表示

在上节中已经指出体系是具有 $SU_q(2)$ 对称性的, 因此体系的 BA 态空间应该是由 S^+, S^- 作用于所有不等价的 BA 态而生成的空间. 首先将证明 BA 态是 $SU_q(2)$ 的最高权态, 因而仅用 S^- 作用于 BA 态即可生成整个空间.

设含有 $n+1$ 个自旋朝下的 BA 态为

$$|n+1\rangle_{BA} = \sum_{\{x_i\}} f(x_1 \cdots x_{n+1}) |x_1 \cdots x_{n+1}\rangle. \quad (15)$$

注意到 S^+ 作用是使一个自旋向下的粒子发生翻转. 变成自旋向上, 因此 S^+ 作用于 $|n+1\rangle_{BA}$ 上得到 n 个自旋向下的态矢量, 记为 $|\beta\rangle$. 即

$$S^+ |n+1\rangle_{BA} = |\beta\rangle = \sum_{\{x_i\}} g(x_1 \cdots x_n) |x_1 \cdots x_n\rangle. \quad (16)$$

利用 S^+ 的定义式, 直接计算可得

$$\begin{aligned} g(x_1 \cdots x_n) |x_1 \cdots x_n\rangle &= \sum_{x=x_n+1}^N f(x_1 \cdots x_n, x) q^x q^{-\frac{N+2n+1}{2}} |x_1 \cdots x_n\rangle \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{x=x_{i-1}+1}^{x_i-1} f(x_1 \cdots x_{i-1}, x, x_i \cdots x_n) q^x q^{-2(i-1)} q^{-\frac{N+2n+1}{2}} |x_1 \cdots x_n\rangle \\ &+ \sum_{x=1}^{x_1-1} f(x, x_1 \cdots x_n) q^x q^{-\frac{N-2n+1}{2}} |x_1 \cdots x_n\rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

因此得到如下的等式:

$$\begin{aligned} q^{\frac{N+2n+1}{2}} g(x_1 \cdots x_n) &= \sum_{x=x_n+1}^N f(x_1 \cdots x_n, x) q^{x-2n} \\ &+ \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{x=x_{l-1}+1}^{x_l-1} f(x_1 \cdots x_{l-1}, x, x_l \cdots x_n) q^{x-2(l-1)} \\ &+ \sum_{x=1}^{x_1-1} f(x, x_1 \cdots x_n) q^x. \end{aligned} \quad (18)$$

利用下式和 $f(x_1 \cdots x_{n+1})$ 的定义式 (11):

$$\sum_{x=x_i}^{x_i} q^x e^{ikx} = \frac{1}{1 - qe^{ik}} (q^x e^{ikx} - (qe^{ik})^{x_i+1}), \quad (19)$$

方程 (18) 可化成

$$\begin{aligned} q^{\frac{N-2n+1}{2}} g(x_1 \cdots x_n) &= \sum_p \varepsilon_p A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+1}}) e^{i \sum_{j=1}^n k_{p_j} x_j} \frac{(qe^{ik_{p_{n+1}}})^{x_{n+1}} - (qe^{ik_{p_{n+1}}})^{N+1}}{1 - qe^{ik_{p_{n+1}}}} q^{-2n} \\ &+ \sum_{l=2}^n \sum_p \varepsilon_p A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+1}}) \exp \left[i \sum_{j=1}^{l-1} k_{p_j} x_j + i \sum_{l+1}^{n+1} k_{p_j} x_{j-1} \right] \\ &\cdot \frac{(qe^{ik_{p_l}})^{x_{l-1}+1} - (qe^{ik_{p_l}})^{x_l}}{1 - qe^{ik_{p_l}}} q^{-2(l-1)} + \sum_p \varepsilon_p A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+1}}) \end{aligned}$$

$$\times e^{i \sum_{j=2}^{n+1} k_{p_j} x_{j-1}} \frac{q e^{i k_{p_1}} - (q e^{i k_{p_1}})^{x_1}}{1 - q e^{i k_{p_1}}}. \quad (20)$$

注意到

$$\begin{aligned} A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+1}}) \alpha(k_{p_1}) - A(-k_{p_1} \cdots k_{p_n}) \alpha(-k_{p_1}) &= 0, \\ A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+1}}) \beta(-k_{p_{n+1}}) - A(k_{p_1} \cdots -k_{p_{n+1}}) \beta(k_{p_{n+1}}) &= 0. \end{aligned}$$

可以证明

$$\begin{aligned} \sum_p \varepsilon_p A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+1}}) e^{i \sum_{j=1}^n k_{p_j} x_j} (q e^{i k_{p_{n+1}}})^{N+1} (1 - q e^{i k_{p_{n+1}}})^{-1} &= 0, \\ \sum_p \varepsilon_p A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+1}}) e^{i \sum_{j=2}^{n+1} k_{p_j} x_{j-1}} (q e^{i k_{p_1}}) (1 - q e^{-i k_{p_1}})^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

因此 (20) 式变成

$$\begin{aligned} q^{\frac{N-2n+1}{2}} g(x_1 \cdots x_n) &= \sum_{l=2}^{n+1} \sum_p \varepsilon_p A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+1}}) \\ &\times \exp \left[i \sum_{j=1}^l k_{p_j} x_j + i \sum_{j=l+1}^{n+1} k_{p_j} x_{j-1} \right] \cdot \frac{(q e^{i k_{p_l}})^{x_{l-1}+1}}{1 - q e^{i k_{p_l}}} q^{-2l+2} \\ &- \sum_{l=1}^n \sum_p \varepsilon_p A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+1}}) \exp \left[i \sum_{j=1}^{l-1} k_{p_j} x_j + i \sum_{j=l+1}^{n+1} k_{p_j} x_{j-1} \right] \\ &\cdot \frac{(q e^{i k_{p_l}})^{x_l}}{1 - q e^{i k_{p_l}}} q^{-2l+2} = \sum_{l=1}^n \sum_p \varepsilon_p A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+1}}) \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^l k_{p_j} x_j \right. \right. \\ &+ \left. \left. i \sum_{j=l+1}^{n+1} k_{p_j} x_{j-1} \right] \cdot \frac{(q e^{i k_{p_{l+1}}})^{x_{l+1}}}{1 - q e^{i k_{p_{l+1}}}} q^{-2l} - \exp \left[i \sum_{j=1}^{l-1} k_{p_j} x_j + i \sum_{j=l+1}^{n+1} k_{p_j} x_{j-1} \right] \right. \\ &\cdot \left. \frac{(q e^{i k_{p_l}})^{x_l}}{1 - q e^{i k_{p_l}}} q^{-2(l-1)} \right) = \sum_{l=1}^n \sum_p \varepsilon_p A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+1}}) \exp \left[i \sum_{j=1}^l k_{p_j} x_j \right. \\ &+ \left. i \sum_{j=l+1}^{n+1} k_{p_j} x_{j-1} \right] \cdot q^{-2l+x_l+1} \cdot \left(\frac{e^{i k_{p_{l+1}}}}{1 - q e^{i k_{p_{l+1}}}} - \frac{q}{1 - q e^{i k_{p_l}}} \right) \\ &- \sum_{l=1}^n \sum_p \varepsilon_p A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+1}}) \exp \left[i \sum_{j=1}^{l-1} k_{p_j} x_j + i \sum_{j=l+2}^{n+1} k_{p_j} x_{j-1} \right] \\ &\cdot \frac{q^{-2l+x_l+1} e^{i(k_{p_l}+k_{p_{l+1}})x_l}}{(1 - q e^{i k_{p_{l+1}}})(1 - q e^{i k_{p_l}})} \cdot ((q^2 + 1) e^{i k_{p_{l+1}}} - q - q e^{i(k_{p_l}+k_{p_{l+1}})}). \quad (21) \end{aligned}$$

应用公式

$$\frac{A(k_{p_1} \cdots k_{p_l} k_{p_{l+1}} \cdots k_{p_{n+1}})}{A(k_{p_1} \cdots k_{p_{l+1}} k_{p_l} \cdots k_{p_{n+1}})} = \frac{(q^2 + 1) e^{i k_{p_l}} - q - q e^{i(k_{p_l}+k_{p_{l+1}})}}{(q^2 + 1) e^{i k_{p_{l+1}}} - q - q e^{i(k_{p_l}+k_{p_{l+1}})}}, \quad (22)$$

并注意到 (21) 式中求和含对所有置换求和, 并且还有因数 ε_p , 因此在 (21) 式选对 k_{p_l} 与 $k_{p_{l+1}}$ 的对换求和, 不难证明求和的结果为零. 即 (21) 式恒为零, 因此有如下结论:

$$S^+ |n+1\rangle_{BA} = 0. \quad (23)$$

即 BA 态是 $SU_q(2)$ 的最高权态.

对开边界的 H_{XXZ} 模型, 已证明其 BA 态是量子群 $SU_q(2)$ 的最高权态, 因此体系

的所有态都可以用 S^- 作用而获得,考察 S^- 对 BA 态的作用,从 BA 解可知

$$\begin{aligned} S^z |n\rangle_{\text{BA}} &= \left(\frac{N}{2} - n\right) |n\rangle_{\text{BA}}, \\ S^+ S^- |n\rangle_{\text{BA}} &= \left(\frac{N}{2} - n - 1\right) S^- |n\rangle_{\text{BA}}. \end{aligned} \quad (24)$$

所以 S^- 算子是量子 $SU_q(2)$ 群的降算子,它使 S^z 的本征值减少 1,作用 m 次后, S^z 的本征值就变成 $\left(\frac{N}{2} - n - m\right)$, 当 S^- 作用的次数为 $m = N - 2n + 1$, 可以证明

$$S^+ (S^-)^{N-2n+1} |n\rangle_{\text{BA}} = 0, \quad (25)$$

并且 $(S^-)^{N-2n+1} |n\rangle_{\text{BA}}$ 是一个零模态,因此可以定义为零,通过选取适当的归一化,使得

$$(S^-)^{N-2n+1} |\tilde{n}\rangle_{\text{BA}} = 0. \quad (26)$$

因此由 $|n\rangle_{\text{BA}}$ 生成的空间含有 $N - 2n + 1$ 个矢量,这 $N - 2n + 1$ 个矢量构成 $SU_q(2)$ 群的一个 $(N - 2n + 1)$ 维不可约表示. PS 指出^[4], 在 BA 方程中,对任一给定的 n ($0 \leq n \leq N/2$), 存在 $\Gamma_n^N = C_n^N - C_{n-1}^N$ 个不等价的解组 $\{k_i\}$, 因此对 $SU_q(2)$ 群而言存在 Γ_n^N 个 $(N - 2n + 1)$ 维的不可约表示,不难证明

$$\sum_{n=0}^{\{N/2\}} (N - 2n + 1) \Gamma_n^N = 2^N, \quad (27)$$

其中 $\{N/2\}$ 代数 $N/2$ 的整数部分.

对自旋为 $1/2$ 的粒子,可以有 2 个态矢量, N 个自旋为 $1/2$ 的体系所具有的态矢量为 2^N , 因此开边界 H_{xxz} 的本征矢空间正好按 $SU_q(2)$ 群的不可约表示分类,在此表示空间中,每一个 $SU_q(2)$ 的不可约表示给出 H 的同一本征值,具有 H 不同本征值的子空间,对应于 $SU_q(2)$ 的不同的不可约表示. 需要指出的是,在上述讨论中都使用了 q 不是单位根的情形. 当 q 为单位根时,问题将变复杂. 下面将讨论 q 为单位根时的表示问题. 为方便起见,约定带下标“ $\circ$ ”的量为 q 是单位根时的量. 此时 q 记为 q_0 不带下标“ $\circ$ ”的量对应于一般 q 值情形.

四、 q 为单位根时 BA 方程解与零模态

在 BA 解中, n 个动量 k_i 是不能相同的,否则会带来零振幅. 而如果其中有一个为 $k = r$, 则没有反射波^[4]. 那么在什么情况下 BA 方程会含有 m 个动量 r 的解呢? 是否可以作为某种极限的解呢? 为研究这一问题,改写 BA 方程为

$$e^{iN\lambda k_j} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{(e^{-ik_j} + e^{ik_l} - \Delta)(e^{-ik_j} + e^{-ik_l} - \Delta)}{(e^{ik_j} + e^{ik_l} - \Delta)(e^{ik_j} + e^{-ik_l} - \Delta)} e^{2ik_j}, \quad (28)$$

其中 $\Delta = q + q^{-1}$. 假定当 $q \rightarrow q_0$, $q_0^\circ = -1$ 时,超越方程 (28) 存在某一解组 $\{k_i\}$, 每一个 k_i 都不为 r_0 且互不相等,研究 $n + m$ 个超越方程是否允许 m 个 $k'_i \rightarrow r_0$ 的解. 令 $r - r_0 = \lambda$, 这样的 m 个解记为 r_i , 剩余的 n 个动量记为 k_i , 在 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $k'_i \rightarrow k_i$. 由 $n + m$ 阶 BA 方程可得

$$\begin{aligned} \exp[i2(N-n-m+1)k'_j] &= \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{(e^{-ik'_j} + e^{-ik'_l} - \Delta)(e^{-ik'_j} + e^{ik'_l} - \Delta)}{(e^{ik'_j} + e^{-ik'_l} - \Delta)(e^{ik'_j} + e^{ik'_l} - \Delta)} \\ &\quad \cdot \prod_{l=1}^m \frac{(e^{-ik'_j} + e^{i\gamma_l} - \Delta)(e^{-ik'_j} + e^{-i\gamma_l} - \Delta)}{(e^{ik'_j} + e^{i\gamma_l} - \Delta)(e^{ik'_j} + e^{-i\gamma_l} - \Delta)}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \exp[i2(N-n-m+1)\gamma_j] &= \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m \frac{(e^{-i\gamma_j} + e^{i\gamma_l} - \Delta)(e^{-i\gamma_j} + e^{-i\gamma_l} - \Delta)}{(e^{i\gamma_j} + e^{i\gamma_l} - \Delta)(e^{i\gamma_j} + e^{-i\gamma_l} - \Delta)} \\ &\quad \cdot \prod_{l=1}^n \frac{(e^{-i\gamma_j} + e^{ik'_l} - \Delta)(e^{-i\gamma_j} + e^{-ik'_l} - \Delta)}{(e^{i\gamma_j} + e^{ik'_l} - \Delta)(e^{i\gamma_j} + e^{-ik'_l} - \Delta)}. \end{aligned} \quad (30)$$

当 $\gamma \rightarrow \gamma_0$ 时, 由 (30) 式得到

$$\exp[i2(N-n-m+1)k_j] = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{(e^{-ik_j} + e^{ik_l} - \Delta_0)(e^{-ik_j} + e^{-ik_l} - \Delta_0)}{(e^{ik_j} + e^{ik_l} - \Delta_0)(e^{-ik_l} + e^{ik_j} - \Delta_0)} \prod_{l=1}^m e^{-2ik_j}. \quad (31)$$

上式正是与 (28) 式相似, 按照本文的假定. 它存在一解组 $\{k_j\}$. 由 (30) 式, 令 $\gamma_j = \gamma + \varepsilon_j$, 可得

$$(-1)^{m-1} \exp[2i(N-2n-m+1)\gamma_j] \cdot (1 + \theta(\varepsilon_j)) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m \frac{(e^{-i\gamma_j} + e^{i\gamma_l} - \Delta_0)}{(e^{i\gamma_j} + e^{-i\gamma_l} - \Delta)}. \quad (32)$$

比较上式等号两边 ε_j 的零次项, 可得方程

$$q_j^{2(N-2n-m+1)} = 1, \quad (33a)$$

$$\lim_{q \rightarrow q_0} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m \frac{\varepsilon_j - q^2 \varepsilon_l}{\varepsilon_l - q^2 \varepsilon_j} = (-1)^{m-1}. \quad (33b)$$

方程 (33) 的一个显然解为

$$\varepsilon_j \sim e e^{i \frac{2\pi}{m} j}. \quad (34)$$

在 $m \geq 4$ 时, (33) 式还存在其它的解. 对上述极限解存在性是可以证明的. 假设从方程 (33) 的解出发, 可以扩充为一个 BA 方程的解, 则可以用它来构造一个 BA 态 $|n, m\rangle_{BA}$. 为了构造这样的矢量, 需要利用下列等式:

$$\beta(-\gamma_j) = (1 - q^2)q^{-(N+1)} + \theta(\varepsilon), \quad \beta(\gamma_j) = i\varepsilon_j q^{N+1} + \theta(\varepsilon^2), \quad (35a)$$

$$B(-k, \gamma_j) = (e^{-ik} - q)(e^{-ik} - q^{-1})q e^{ik} + \theta(\varepsilon) = B(k, \gamma_j) + \theta(\varepsilon),$$

$$B(-\gamma_j, k) = -(e^{-ik} - q)(e^{-ik} - q^{-1})e^{i2k}q^2 + \theta(\varepsilon),$$

$$B(\gamma_j, k) = (e^{-ik} - q^{-1})(e^{ik} - q^{-1})e^{ik}q^{-1} + \theta(\varepsilon),$$

$$\frac{B(-k_j, \gamma_l)e^{-i\gamma_l}}{B(-\gamma_l, k_j)e^{-ik_j}} = (-q^{-2}) + \theta(\varepsilon),$$

$$B(-\gamma_j, \gamma_l) = (-i)(\varepsilon_j - q^2 \varepsilon_l)(1 - q^2)(1 + \theta(\varepsilon)). \quad (35b)$$

利用上述公式可以方便地求出波函数 f . 其方法是在 $x = 1 \cdots N$ 的位置上, 先按排 γ_j , 然后按排 k_l , 其次将 γ_j 按排在那些固定的位置上, 求出振幅 $A(\gamma_{p_1} \cdots \gamma_{p_n})$, 作负号和置换并做求和, 最后将 k_l 按排在那些固定好的空位上, 求出 $A(k_{p_1} \cdots k_{p_n})$ 并对反动量号

和置换求和. 由于 $\beta(\gamma_i) = \theta(\varepsilon)$, 在低级近似中, 可以对 $-\gamma_i$ 的操作略去, 另外, 在涉及 $e^{i\gamma_i x_i}$ 时, 用 q^{x_i} 代替 $e^{i\gamma_i x_i}$ 其误差也是 $\theta(\varepsilon)$. 因此上述操作给出

$$\begin{aligned} f(x_1 \cdots x_{n+m}) &= \sum_{\pm(k_j)} (\varepsilon_p)_{\tau k} \sum_{1 \leq j \leq n} \prod_{1 \leq l \leq n} B(-k_j, \gamma_l) e^{-i\gamma_l} \prod_{1 \leq j \leq m} B(-\gamma_j, k_l) e^{-ik_l} \\ &\quad \cdot \sum_{\pm(k_j)} (\varepsilon_p)_k \prod_{l=1}^n \beta(-k_l) \prod_{1 \leq j < l \leq n} B(-k_j, k_l) e^{-ik_l} \\ &\quad \cdot \sum_{\pm(k_j)} (\varepsilon_p)_\tau \prod_{j=1}^m \beta(-\gamma_j) \prod_{1 \leq j < l \leq m} B(-\gamma_j, \gamma_l) e^{-i\gamma_l} \exp(i(k_{p_1} x_1 \\ &\quad + \cdots + k_{p_{n+m}} x_{n+m})). \end{aligned} \quad (36)$$

注意到 (35) 式, 上述求和号 $\sum_{\pm(k_j)}$ 可以移到 $\sum (\varepsilon_p)_k$ 的前面, 该求和是可以计算出来的, 应用公式:

$$\begin{aligned} \Pi B(-k_j, \gamma_l) e^{-i\gamma_l} \Pi B(-\gamma_j, k_l) e^{-ik_l} \\ = \Pi B(-\gamma_j, k_l) e^{-ik_l} (-q^2)^{i_1 + \cdots + i_m} + \theta(\varepsilon), \end{aligned} \quad (37)$$

其中 i_l 为第 l 个 γ_j 前面的 k 的个数, 经过较繁杂的计算可得

$$\begin{aligned} f(x_1 \cdots x_{n+m}) &= (q^{-2})^{i_1 + \cdots + i_m} \cdot f_n(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) e^{i\gamma(x_{i_1} + \cdots + x_{i_m})} \prod_{l=1}^m \beta(-\gamma_l) \\ &\quad \cdot \sum_{\pm(k_j)} (\varepsilon_p)_{\tau k} \prod_{l \neq j} (\varepsilon_{p_l} - q^2 \varepsilon_{p_l}) (-i)^m (q^{-1} - q)^m (1 + \theta(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (38)$$

注意到 $\Pi(\varepsilon_{p_i} - q^2 \varepsilon_{p_i})$ 的反对称性, 不难求出

$$\begin{aligned} f(x_1 \cdots x_{n+m}) &= (q^{-2})^{i_1 + \cdots + i_m} f(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) e^{i\gamma(x_{i_1} + \cdots + x_{i_m})} \\ &\quad \cdot \prod_{i < j} (\varepsilon_i - \varepsilon_j) [m]! ((1 - q^2) q^{-(N+1)})^m (1 + \theta(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (39)$$

因此只要 (33) 式的解没有重根, 即 $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j (i \neq j)$, 就可以构成矢量 $|n, m\rangle_{BA}$.

当 $q = q_0$ 时, 方程 (28) 存在 n 不相等动量的解组 $\{k_j\}$, 就得到一个 $SU_q(2)$ 群的最高权态, 利用 S^- 的作用即可生成一个线性空间, 但这一空间存在着零模态, 下面将详细地讨论这一问题, 对 $|n\rangle_{BA}|_{q_0}$ 矢量, S^- 的作用生成 S^* 的本征值减少 1 的矢量, 当 S^- 作用 m 次后得到矢量 $(S^-)^m |n\rangle_{BA}|_{q_0}$, 如果 m 满足条件

$$q_0^{N-2n-m+1} = 1$$

或 $N - 2n - m + 1 = 0 \pmod{p} \quad q_0^p = -1,$ (40)

则不难证明 $(S^-)^m |n\rangle_{BA}|_{q_0}$ 为一零模态. 利用 S^- 的定义式, 可知该矢量为

$$(S^-)^m |n\rangle_{BA}|_{q_0} = \sum_{\{z_j\}} \sum_p \varepsilon_p A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+m}}) e^{i k_p \cdot x} q_0^{m n + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m(N+1)}{2}} \cdot |x_1 \cdots x_{n+m}\rangle, \quad (41)$$

其中 p 求和代表对 n 个 k_j 和 m 个 γ_0 的所有置换正负动量 k_j (γ_0 之间的置换不计), 而系数 $A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+m}})$ 满足下列关系式:

$$A(k_{p_1} \cdots k_{p_j} k_{p_{j+1}} = \gamma_0, k_{p_{j+2}} \cdots k_{p_{n+m}}) = (-1)^j q_0^{-2j} A(k_{p_1} \cdots k_{p_j} k_{p_{j+2}} \cdots k_{p_{n+m}}), \quad (42)$$

其中 $k_{p_i} \neq \gamma_0 (i = 1 \cdots j)$.

因此得到一个方程

$$0 = \sum_{\{x_i\}} \sum_p \sum_{p'} \varepsilon_p \varepsilon_{p'} A(k_{p_1} \cdots k_{p_{n+m}}) A(k_{p'_1} \cdots k_{p'_{n+m}}) e^{i(h_p + h_{p'}) \cdot x}. \quad (43)$$

上式的直接验证较复杂,在此从略.

比较(12)与(14)式得到如下结论:

$$N - 2n - m + 1 = 0 \pmod{p},$$

$$|n, m\rangle_{BA} \xrightarrow{q \rightarrow q_0} C^{-1}(q_0) ((S^-)^m |n\rangle_{BA})_{q_0}, \quad (44)$$

其中 $|n\rangle_{BA}|_{q_0}$ 中的 $\{k_i\}$ 正是 $|n, m\rangle_{BA}$ 中 n 个不趋于 q_0 的 $\{k_i\}$. 从(44)式可以看出; 原为两个不等价不可约表示的最高权态矢量 $|n, m\rangle_{BA}$ 和 $|n\rangle_{BA}$, 在 $q \rightarrow q_0$ 极限下, $|n, m\rangle_{BA} \rightarrow |n, m\rangle_{BA}|_{q_0}$ 是由 $|n\rangle_{BA} \rightarrow |n\rangle_{BA}|_{q_0}$ 生成的零模态, 因此由 $|n, m\rangle_{BA}|_{q_0}$ 生成的线性空间实质上是由 $|n\rangle_{BA}|_{q_0}$ 生成的线性空间的子空间. 因此 BA 态空间出现态重迭, 发生态矢量的“丢失”因而, 量子群 $SU_{q_0}(2)$ 的表示发生变化, 出现不可分解表示. 为了构造这一类表示, 需要补齐“丢失”的态矢量, 从而建立量子 $SU(2)$ 群的表示.

五、BA 态空间与 I 型表示

为了补齐 BA 态空间, 寻找一个矢量 $|b'\rangle$, 使得它满足如下的条件:

$$S^+ |b'\rangle = S^{m-1} |n\rangle_{BA} C_1, \quad (45)$$

$$H |b'\rangle = E_n |b'\rangle + C_2 S^m |n\rangle_{BA}, \quad (46)$$

其中 $E_n(q_0) = E_{n+m}(q_0)$ 为 H 在 $q = q_0$ 时的本征值, C_1, C_2 为常数. 很显然, 在 S^- 作用下, $|b'\rangle$ 正好能生成所缺少的态矢量.

要求的 $|b'\rangle$ 应该与其余的表示正交, 因此最直接的方法是从 q 非单位根的 $|n\rangle_{BA}$, $|n, m\rangle_{BA}$ 态出发, 因 $S^m |n\rangle_{BA}$ 与 $|n, m\rangle_{BA}$ 当 $q \rightarrow q_0$ 时才发生重迭, 因此它们差的极限是存在的, 基于此, 定义 $|b'\rangle$ 如下:

$$|b'\rangle = \lim_{q \rightarrow q_0} \frac{S^m |n\rangle_{BA} - C(q_0) |n, m\rangle_{BA}}{q - q_0} = \frac{d}{dq} (S^m |n\rangle_{BA} - C(q_0) |n, m\rangle_{BA})|_{q_0}. \quad (47)$$

以下证明(47)式定义的 $|b'\rangle$ 满足(45)和(46)式. 利用(5)式有

$$S_+(S_-)^m |n\rangle_{BA} = [m][N - 2n - m + 1] S^{m-1} |n\rangle_{BA}. \quad (48)$$

对(48)式微分并取 $q = q_0$ 得

$$\left(\frac{d}{dq} S_+ \right)_{q_0} (S^m |n\rangle_{BA})_{q_0} + (S_+)_{q_0} \left(\frac{d}{dq} S^m |n\rangle_{BA} \right)_{q_0} \\ = [m]_{q_0} (N - 2n - m + 1) \frac{q_0^{N-2n-m} + q_0^{-N+2n+m-2}}{q_0 - q_0^{-1}} (S^{m-1} |n\rangle_{BA})_{q_0}. \quad (49)$$

利用方程

$$\left(\frac{d}{dq} S_+ \right)_{q_0} |n, m\rangle_{q_0}^{BA} + (S_+)_{q_0} \left(\frac{d}{dq} |n, m\rangle_{BA} \right)_{q_0} = 0, \quad (50)$$

不难证明

$$(S_+)_{q_0} \left(\frac{d}{dq} S^m |n\rangle_{BA} - C(q_0) \frac{d}{dq} |n, m\rangle_{BA} \right)_{q_0}$$

$$= [m]_{q_0} \frac{q_0^{N-2n-m} + q_0^{-N+2n+m-2}}{q_0 - q_0^{-1}} (N - 2n - m + 1) (S_-^{m-1} |n\rangle_{BA})_{q_0}. \quad (51)$$

即如此定义的 $|b'\rangle$ 满足 (45) 式. 对 $|b'\rangle$ 满足 (46) 式的证明类似于 (49)–(51) 式, 给出如下的结论:

$$H|n\rangle_{BA} = E_n |n\rangle_{BA}, H|n, m\rangle_{BA} = E_{n+m} |n, m\rangle_{BA}, \quad (52)$$

$$H|b'\rangle = \frac{d}{dq} (E_n - E_{n+m}) |q_0 S_-^m |n\rangle_{BA} |_{q_0} + E_n(q_0) |b'\rangle. \quad (53)$$

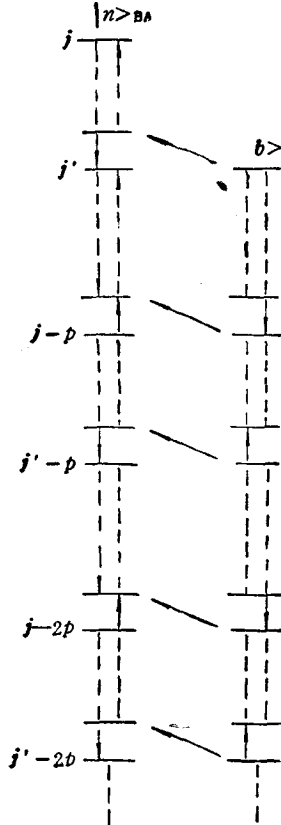


图1 I型表示矢量, 匹配图

由此可以看出, 新定义的 $|b'\rangle$ 具有很好的性质, 它能补齐所缺的态矢量, 而且使 H 准对角化, 其对角线上的元素不变, 而非对角线的元素是不全为零的, 即该表示是不可分解的.

从上述的证明过程可以看出, 如此定义的 $|b'\rangle$ 总是存在的, 利用 S_- 算子作用于 $|n\rangle_{BA}$ 和 $|b'\rangle$ 即可得到该表示所对应的态空间, 由 $q_0^p = -1$, 有 $S_-^p = 0$. 采取 $S_-^p/[p]$ 来定义缺少的矢量, 对 S_- 作用次数不是 p 的整数倍的作用是很直接的, 本文明显地给出 $S_-^p/[p]$ 算子对应的态矢量, 采用记号 $|x, A\rangle$ 代表由 $|n\rangle_{BA}$ 生成的矢量, $|x, B\rangle$ 表示从 $|b'\rangle$ 生成的矢量, 这些矢量如下:

$$|j - \gamma p, A\rangle = \frac{S_-^p}{[p]} |j - (\gamma - 1)p, A\rangle,$$

$$|j' - \gamma p, A\rangle = S_-^m |j - \gamma p, A\rangle,$$

$$|j' - \gamma p, B\rangle = \frac{S_-^p}{[p]} |j' - (\gamma - 1)p, B\rangle,$$

$$|j - \gamma p, B\rangle = S_-^{m-m} |j' - (\gamma - 1)p, B\rangle, \quad (54)$$

其中 $j' = N/2 - n - m$, $j = N/2 - n$. 其它的矢量可以用 $(S_-)^k$ 分别作用于 $|j - \gamma p, A\rangle$ 和 $|j - \gamma p, B\rangle$ 而获得. 在 S_+ 作用下, 这些矢量都分别属于 A 系列或 B 系列, 而由 (54) 式定义的矢量具有其自身的特点, 这里给出如下的结论 (利用归纳法即可证明):

$$\begin{aligned} S_+ |j - \gamma p, A\rangle &= -\gamma [2j + 1]_{q_0} (j + j' + 1) \frac{q_0^{j+j'} + q_0^{-j-j'-2}}{q_0 - q_0^{-1}} S_-^{p-1} |j - (\gamma - 1)p, A\rangle, \\ S_+ |j' - \gamma p, A\rangle &= 0, \\ S_+ |j - \gamma p, B\rangle &= [m]_{q_0} (j + j' + 1) \frac{q_0^{j+j'} + q_0^{-(j+j'+2)}}{q_0 - q_0^{-1}} S_-^{p-1} |j - (\gamma - 1)p, A\rangle, \\ S_+ |j' - \gamma p, B\rangle &= -\gamma [2j' + 1] S_-^{p-1} |j' - (\gamma - 1)p, B\rangle + [m]_{q_0} (j + j' + 1) \\ &\quad \times \frac{q_0^{j+j'} + q_0^{-j-j'-2}}{q_0 - q_0^{-1}} S_-^{m-1} |j - \gamma p, A\rangle. \end{aligned} \quad (55)$$

上述作用可用一个图表示 (见图1), A 系列是图中的左列, B 系列是图中的右列, 向下的箭头代表 S_- 作用, 向上的箭头为 S_+ 作用, 并明确标出 (54) 式所定义的矢量, A 系列和 B 系列共同给出量子 $SU_q(2)$ 群的一个不可分解表示.

至此找到一种方法,它能补全所缺的矢量,生成一个表示,该表示是不可分解的,但又不是不可约,即通常所说的 I 型表示^[12]. 对于 N 粒子自旋为 $1/2$ 的海森堡模型,其 BA 方程可以存在各种不同的解. 但它们有一个特点,即不相等的 n 个 k_i 和相等的 m 个 r ,而同一个 n 值,又可有不等价的 $\{k_i\}$, 因此 BA 方程的解可按其解进行分类,这样的分类有两种情形:一是对每一不等价的解组 $\{k_i, i=1 \cdots n\}$, 总可以找到另一解组 $\{k_i, i=1 \cdots n, m \text{ 个 } r\}$, 且 n, m 满足 (40) 式, 二是对每一不等价的解组 $\{k_i, i=1 \cdots n\}$, 总找不到另一解组 $\{k_i, i=1 \cdots n, m \text{ 个 } r\}$, 且 n, m 满足 (40) 式, 在此情况下, 可以证明 n 满足 $N/2 - p < n \leq N/2$. 因此对每一类型的解, 采用本文所给的方法建立起量子 $SU(2)$ 群的 I 型表示. 对第二类解, 很显然给出量子 $SU_q(2)$ 群的 II 型表示(不可约表示). 需要指出的是量子群 $SU_q(2)$ 的表示是与模型无关的, 因此该表示的构造实质上是给出 $SU_q(2)$ 表示的一种途径.

六、讨 论

在上述讨论中是从 q 为非单位根的不可约表示出发的, 当 $q \rightarrow q_0$ 时, 寻找一个与之配对的不可约表示, 但这一配对方法是否唯一, 这一问题在本文中并没有讨论, 根据 PS 的分析和表示空间的完备性, 这种配对应该是唯一的. 此外, 对高自旋量子链以及扭曲边界的量子链与量子群表示的关系还不是很清楚, 值得进一步研究, 尤其是 q 为单位根的情形, 这些问题的研究就显得更为重要.

- [1] N. Pasquier and H. Saleur, *Nucl. Phys.*, **B330**(1990), 523.
- [2] M. Gaudin, 1983 *La fonction d'onde de Bethe* (Paris Masson).
- [3] L. A. Takhtazhan and L. D. Faddeev, *Uspehi Math. Nauk* **34**(5) (1979), 13.
- [4] J. H. Lowenstein, Introduction to the Bethe-Ansatz approach in 1+1-dimensional models in *Recent Advanced in Field Theory and Statistical Mechanics*, ed. J. B. Zuber and R. Stora, (1982).
- [5] R. J. Baxter, *Exactly solvable models in Statistical Mechanics*, Academic, New York, (1982)
- [6] L. A. Takhtazhan and L. D. Faddeev, *Zap nauch semin LOMI*, **109** (1981), 134.
- [7] C. N. Yang and C. P. Yang, *Phys. Rev.*, **150**(1866), 321; 327.
- [8] A. G. Izergin and V. E. Korepin, *Lett. Math. Phys.*, **6**(1982), 283.
- [9] F. C. Alcaraz, M. N. Barber, M. T. Betchelor, R. J. Baxter and G. R. W. Quispel, *J. Phys. A.*, **20**(1987), 6397.
- [10] E. K. Sklyanin, *J. Phys. A.*, **21**(1988), 2375.
- [11] M. Karowski, ETH-TH-89-43.
- [12] L. Mezincescu and R. I. Nepomechie, UMTG-158, (1989).

INTEGRABLE QUANTUM CHAIN AND THE REPRESENTATION OF QUANTUM GROUP $SU_q(2)$

HOU BO-YU SHI KANG-JIE

YANG ZHONG-XIA YUE RUI-HONG

Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an, 710069

(Received 28 January 1991)

ABSTRACT

We discuss the XXZ spin chain with certain boundary term and the representation of quantum group $SU_q(2)$. It is shown that Bethe Ansatz states are highest weight states of $SU_q(2)$, with q arbitrary. We construct the irreducible representation of the quantum group. For q a rational root of unity, we show that there are new solutions to the BA equations. We derived the state vectors $|b'\rangle$ by taking certain limit, from which we construct the type I and type II representations of $SU_q(2)$.

PACC: 1130; 0550