

等离子体简并与近简并四波混频理论

反 射 光 栅 位 形

吴 颖 杨 晓 雪

华中理工大学物理系, 武汉, 430074

1991 年 3 月 20 日收到

系统研究波波相互作用形成反射光栅情况下的等离子体简并与近简并四波混频理论, 导出普适四波非线性耦合方程组, 并在任意复耦合系数情况下求出其精确解析解。

PACC: 5240D; 4265F

一、引 言

最近, 本文作者系统研究了等离子体相位共轭理论^[1]、透射光栅位形时的等离子体简并与近简并四波混频理论^[2], 以及等离子体四波混频中的多稳态和自振荡等效应^[3]。结果表明, 等离子体是实现相位共轭反射、透射放大、无反射镜自持振荡、多稳态等应用的良好四波混频非线性媒质。加之它是响应快、覆盖频段宽的非线性媒质, 特别是可在其它材料难以胜任的微波频段内使用, 因而是研制微波频段内各种快速响应的非线性光学元件的理想材料。

在上述基础上, 本文将系统研究波波相互作用形成反射光栅情况下的无磁化等离子体简并与近简并四波混频理论。证明通过适当安排, 可以实现反射光栅位形, 导出该位形下的普适四波非线性耦合方程组, 在复耦合系数的位相 φ 取任意值的普遍情况下求出其精确解析解。这是包括波的强度和位相而且满足边界条件的解。值得指出的是, 反射光栅位形下的四波混频理论(包括光致折射材料等媒质情况)中, 尚未见报道求出 φ 取任意值情况下的波强度解, 尤其是包括波位相的解^[4]。人们仅仅求出 $\varphi = 0$ 时的波强度和位相的解^[5], 以及 $\varphi = \pi/2$ 时的波强度解^[6]。本文理论可能有助于各种微波频段内快速响应非线性光学元件的研制。

二、四波非线性耦合方程组的推导

1. 研究系统的描述

考虑图 1 所示的四波混频位形。无磁化等离子体位于 $x = 0$ 和 $x = L$ 之间并受到四支频率和被数相近的电磁波的照射。波矢方向如图 1 所示。四支波的频率和波矢还

满足如下关系式:

$$\omega_a = \omega_b; \omega_c = \omega_d, \quad (1a)$$

$$\mathbf{k}_a + \mathbf{k}_b = 0; \mathbf{k}_c + \mathbf{k}_d = 0, \quad (1b)$$

还假定 $|\omega_a - \omega_c| \ll \omega_a$ 和 ω_c , 即考虑简并 ($\omega_a = \omega_c$) 和近简并 ($\omega_a \approx \omega_c$) 情况.

a 与 c 波的相互干涉以及 b 与 d 波的相互干涉都会在等离子体中形成如图 1 所示的稳定 ($\omega_a = \omega_c$) 或运动 ($\omega_a \approx \omega_c$) 光栅, 而 a 与 d 波或 b 与 c 波的相互干涉将形成与图 1 所示光栅垂直的光栅. 如果能抑制或消除 a 与 d 波的相互干涉以及 b 与 c 波的相互干涉形成的光栅, 就称为反射光栅位形^[4].

等离子体可用 Vlasov 方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_a}{m_a} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0 \quad (2)$$

或流体方程组

$$\frac{\partial}{\partial t} n_a + \nabla \cdot (n_a \mathbf{v}_a) = 0, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_a = -\frac{1}{n_a m_a} \nabla P_a + \frac{q_a}{m_a} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_a \times \mathbf{B} \right) \quad (4)$$

来描述. 电磁场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 满足麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$\rho = \sum_a n_a q_a, \quad \mathbf{J} = \sum_a n_a q_a \mathbf{v}_a. \quad (6)$$

方程(2)–(6)中各量意义与文献[2]中相同.

2. 密度响应与反射光栅位形

由方程(2)–(6)不难得到等离子体对四支注入波的线性响应为^[2]

$$\omega_B^2 = k_B^2 c^2 + \omega_{pe}^2, \quad (7)$$

$$n_a^{(0)} = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_a^{(B)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{v}_a^* \exp(-i\omega_B t + i\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.}; \quad \mathbf{v}_a^{(B)} = i \frac{q_a \mathbf{E}_B}{m_a \omega_B}, \quad (9)$$

$$\mathbf{E}^{(B)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_B \exp(-i\omega_B t + i\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.}, \quad (10)$$

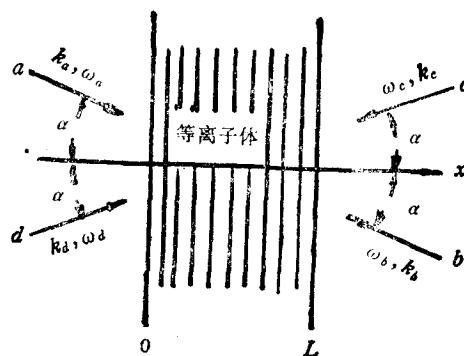


图 1 反射光栅情况下的四波混频示意图

$$B^{(\beta)}(\mathbf{r}, t) = \frac{c \mathbf{k}_\beta \times \mathbf{E}_\beta}{2\omega_\beta} \exp(-i\omega_\beta t + i\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.}, \quad (11)$$

式中 ω_{pe} 为电子等离子体频率, $\beta = a, b, c, d$. 由(8)式看出, 等离子体对注入波的线性密度响应等于零. 为了知道波在等离子体内形成的稳定或运动光栅, 必须计算等离子体对注入波的二阶密度响应. 由(2)–(11)式可以求出二阶密度响应为^[2]

$$n_e^{(\beta, \delta)}(\mathbf{r}, t) = n_e^{(\beta, \delta)} \exp(-i\omega_{\beta\delta} t + i\mathbf{k}_{\beta\delta} \cdot \mathbf{r})/2 + \text{c.c.},$$

$$n_e^{(\beta, \delta)} = -k_{\beta\delta}^2 \chi_p(\mathbf{k}_{\beta\delta}, \omega_{\beta\delta}) [1 + \chi_i(\mathbf{k}_{\beta\delta}, \omega_{\beta\delta})] \mathbf{E}_\beta \cdot \mathbf{E}_\delta^* / [8\pi m_e \omega_\beta \omega_\delta \epsilon], \quad (12)$$

式中 $\mathbf{k}_{\beta\delta} = \mathbf{k}_\beta - \mathbf{k}_\delta$, $\omega_{\beta\delta} = \omega_\beta - \omega_\delta$, $k_{\beta\delta}^2 = |\mathbf{k}_{\beta\delta}|^2$, $\beta, \delta = a, b, c, d$, $n_e^{(\beta, \delta)}$ 表示 β 与 δ 波混频产生的频率 $\omega_{\beta\delta}$, 波矢为 $\mathbf{k}_{\beta\delta}$ 的二阶电子密度响应, χ_e 和 χ_i 分别为电子和离子静电型线性极化率, $\epsilon = \epsilon(\mathbf{k}_{\beta\delta}, \omega_{\beta\delta}) = 1 + \chi_e(\mathbf{k}_{\beta\delta}, \omega_{\beta\delta}) + \chi_i(\mathbf{k}_{\beta\delta}, \omega_{\beta\delta})$ 为等离子体线性静电型响应的介电函数.

由(12)式可以看出, 两个波的干涉在等离子体内形成密度光栅, 当 $\omega_{\beta\delta} = 0$ 时为稳定光栅, 当 $\omega_{\beta\delta} \neq 0$ 时为运动光栅. 如选取 a 和 c 波的电场同向, b 和 d 波的电场同向, 但这两个方向互相垂直就可消除 a 与 d 波以及 b 与 c 波的干涉形成的光栅, 从而实现反射光栅位形. 在(1)式条件下, a 与 d 波以及 b 与 c 波的干涉结果不会使(12)式中 ϵ 等于零, 而 $\epsilon(\mathbf{k}_{ac}, \omega_{ac})$ 和 $\epsilon(\mathbf{k}_{bd}, \omega_{bd})$ 可同时趋于零, 即 a 与 c 波以及 b 与 d 波的混频能够共振激发等离子体静电正则波模, 因而它们混频产生的光栅将远远强于 a 与 d 波以及 b 与 c 波混频的结果, 所以即使 4 支波偏振方向一致也可实现反射光栅位形. 从现在起, 将认为实现了反射光栅位形, 因此只考虑 a 与 c 波混频以及 b 与 d 波混频产生的密度光栅.

3. 四波非线性耦合方程组

由(2)–(9)式可以得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - c^2 \nabla^2 \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -4\pi \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}^{(3)}(\mathbf{r}, t), \quad (13)$$

式中 $\mathbf{J}^{(3)}$ 为最低阶非线性电流密度. 它是三阶量, 由电子的二阶密度响应与线性速度响应的乘积决定. 由(1), (6)和(9)式不难看出, 驱动 a 波的三阶电流密度为

$$\mathbf{J}_a^{(3)}(\mathbf{r}, t) = J_a^{(3)} \exp(-i\omega_a t + i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r})/2 + \text{c.c.},$$

$$\mathbf{J}_a^{(3)} = -e(n_e^{(a, a)} + n_e^{(d, b)})\mathbf{v}_e^{(a)}/2 = ie^2(n_e^{(a, a)} + n_e^{(d, b)})\mathbf{E}_c/2m_e\omega_c, \quad (14)$$

式中 $n_e^{(a, a)}$ 和 $n_e^{(d, b)}$ 由(12)式决定. 得到(14)式时已用到反射光栅位形的条件. 按透光栅位形下耦合方程组类似的推导^[2], 不难得到反射光栅位形下的四波非线性耦合方程组为

$$\frac{dE_a}{dx} = \gamma(E_a E_c^* + E_d E_b^*)E_c, \quad (15a)$$

$$\frac{dE_b^*}{dx} = \gamma(E_a E_c^* + E_d E_b^*)E_d^*, \quad (15b)$$

$$\frac{dE_c^*}{dx} = \gamma(E_a E_c^* + E_d E_b^*)E_a^*, \quad (15c)$$

$$\frac{dE_d}{dx} = \gamma(E_a E_c^* + E_d E_b^*)E_b, \quad (15d)$$

式中非线性耦合系数 γ 的表达式可写成

$$\begin{aligned} \gamma &= i|\gamma| \exp(i\Psi), \\ |\gamma| \exp(i\Psi) &= -e^2 k_{ac}^2 \chi_e (1 + \chi_i) / 8 m_e^2 c^2 \omega_a^2 k_a \varepsilon \cos \alpha, \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $\chi_\alpha = \chi_\alpha(\mathbf{k}_{ac}, \omega_{ac})$, $\alpha = i, e$; $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{k}_{ac}, \omega_{ac}) = 1 + \chi_e + \chi_i$ 分别代表静电型线性极化率和介电函数. $\mathbf{k}_{ac} = \mathbf{k}_a - \mathbf{k}_c$, $\omega_{ac} = \omega_a - \omega_c$, $k_{ac}^2 = |\mathbf{k}_{ac}|^2$. 在导出(16)式时, 已在其中取

$$\omega_a^2 k_a \approx \omega_d^2 k_b \approx \omega_b^2 k_d$$

等等. 注意(15)式与透射光栅位形下的四波非线性耦合方程组^[2]的非线性耦合项不同, 而且正负号也有差异, 前者均同号, 而后者为两正两负. 因此两者代表相异的四波混频过程, 而且解的性质以及结果也将不相同.

三、(15)式的普遍精确解

本节将对(16)式中 Ψ 取任意实数值这种普遍情况精确求解(15)式. 得到的解既包括波强度又包括波位相信息, 而且已满足相应的边界条件. 经过若干改动后, 得到的解还可适用于光致折射材料媒质的情况. 对反射光栅位形下的四波非线性耦合方程组, 人们已能求出 $\Psi = 0$ (或 π) 时的波强度和位相的解^[3]以及 $\Psi = \pm \pi/2$ 时的波强度解^[4], 但尚未见到报道 Ψ 取其它值时的解, 就是仅求解波强度而不求解波位相这种情况也是如此.

为了求解(15)式, 先利用(15)式得到

$$\frac{d}{dx} E_a/E_c = \frac{d}{dx} E_c^*/E_d^* = \frac{d}{dx} E_b^*/E_d^* = \frac{d}{dx} E_d/E_b. \quad (17)$$

利用(17)式得到下列守恒量:

$$I_a(x) - I_c(x) = \text{const}; I_b(x) - I_d(x) = \text{const}, \quad (18)$$

$$E_a(x)E_d^*(x) - E_c(x)E_b^*(x) \equiv c = \text{const}, \quad (19)$$

$$E_a(x)E_b(x) - E_c(x)E_d(x) = \text{const}, \quad (20)$$

式中 $I_\beta(x) = |E_\beta(x)|^2$, $\beta = a, b, c, d$. 由(18)式可知

$$I_a(x) + I_b(x) - I_c(x) - I_d(x) \equiv 2a = \text{const}. \quad (21)$$

由(19)和(21)式不难把(15)式变成

$$\frac{d}{dx} E_a - \gamma(I_c + I_d)E_a = -\gamma c E_d, \quad (22a)$$

$$\frac{d}{dx} E_b^* - \gamma(I_c + I_d)E_b^* = \gamma c E_c^*, \quad (22b)$$

$$\frac{d}{dx} E_c^* - \gamma(I_c + I_d)E_c^* = 2a\gamma E_c^* + \gamma c^* E_b^*, \quad (22c)$$

$$\frac{d}{dx} E_d - \gamma(I_c + I_d)E_d = 2a\gamma E_d - \gamma c^* E_a. \quad (22d)$$

令

$$\begin{aligned} E_a &= A_a \exp[\gamma y(x)], \quad E_d = A_d \exp[\gamma y(x)], \\ E_b^* &= A_b^* \exp[\gamma y(x)], \quad E_c^* = A_c^* \exp[\gamma y(x)], \end{aligned} \quad (23)$$

式中

$$y(x) = \int_0^x [I_c(x') + I_d(x')] dx'. \quad (24)$$

由(23)和(24)式, 不难把(22)式变成两组线性方程组如下:

$$\frac{d}{dx} A_a = -\gamma c A_d, \quad \frac{d}{dx} A_d = 2a\gamma A_d - \gamma c^* A_a, \quad (25)$$

$$\frac{d}{dx} A_b = \gamma^* c^* A_c, \quad \frac{d}{dx} A_c = 2a\gamma^* A_c + \gamma^* c A_b. \quad (26)$$

注意到在图 1 所示情况下, 可以认为注入边界上的电场值 $E_a(0), E_d(0), E_b(L)$ 和 $E_c(L)$ 是已知量. 因此利用(23)和(24)式, 不难求出(25)和(26)式满足相应注入边界条件的解. 它们为

$$A_a(x) = [E_a(0)F(-x) - cE_d(0)G(x)] \exp(\gamma ax), \quad (27a)$$

$$A_b(x) = R^*[E_b(L)F^*(L-x) + c^*E_c(L)G^*(x-L)] \exp(\gamma^* ax), \quad (27b)$$

$$A_c(x) = R^*[E_c(L)F^*(x-L) + cE_b(L)G^*(x-L)] \exp(\gamma^* ax), \quad (27c)$$

$$A_d(x) = [E_d(0)F(x) - c^*E_a(0)G(x)] \exp(\gamma ax), \quad (27d)$$

式中 $R = \exp[-\gamma(y(L) + aL)]$ 而且

$$\begin{aligned} G(x) &= \sinh(\gamma Dx)/D, \quad D = \sqrt{a^2 + |c|^2}, \\ F(x) &= \cosh(\gamma Dx) + aG(x). \end{aligned} \quad (28)$$

利用(19)和(23)式不难得到

$$\begin{aligned} \exp[-(\gamma + \gamma^*)y(L)] &= A_a(L)A_d^*(L)/[c + E_b^*(L)E_c(L)], \\ \exp[-(\gamma + \gamma^*)y(x)] &= [A_a(x)A_d^*(x) - A_c(x)A_b^*(x)]/c. \end{aligned} \quad (29)$$

由(27)和(29)式不难得到常数 R 的表达式为

$$R = \left\{ \frac{[E_a(0)F(-L) - cE_d(0)G(L)][E_d^*(0)F^*(L) - cE_c^*(0)G^*(L)]}{c + E_b^*(L)E_c(L)} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma^*}}. \quad (30)$$

利用(23), (24), (27)和(29)诸式, 最后得到(15)式满足相应注入边界条件的解如下:

$$E_a(x) = (E_a(0)F(-x) - cE_d(0)G(x))T(x), \quad (31a)$$

$$E_b(x) = (E_b(L)F^*(L-x) + c^*E_c(L)G^*(x-L))R^*T^*(x), \quad (31b)$$

$$E_c(x) = (E_c(L)F^*(x-L) + cE_b(L)G^*(x-L))R^*T^*(x), \quad (31c)$$

$$E_d(x) = (E_d(0)F(x) - c^*E_a(0)G(x))T(x), \quad (31d)$$

式中常数 c, a 和 R 分别由(19), (21)和(30)式给出, 函数 $F(x), G(x)$ 和 $T(x)$ 由下式决定:

$$\begin{aligned} G(x) &= \sinh(\gamma Dx)/D, \quad D = \sqrt{a^2 + |c|^2}, \\ F(x) &= \cosh(\gamma Dx) + aG(x), \\ T(x) &= \exp[\gamma(y(x) + ax)] \end{aligned}$$

$$= [(E_a(0)c^{-1}F(-x) - E_d(0)G(x))(E_d^*(0)F^*(x) - cE_a^*(0)G^*(x)) - |R|^2(E_c(L)c^{-1}F^*(x-L) + E_b(L)G^*(x-L))(E_b^*(L)F(L-x) + cE_c^*(L)G(x-L))]^h,$$

$$h = -\gamma/(\gamma + \gamma^*). \quad (32)$$

注意解(31)式不仅包括波强度而且包括波位相, 还是(15)式中 γ 的位相 Ψ 取任意实数值都成立的普遍解。

四、结论与讨论

本文系统研究了反射光栅位形下无磁化等离子体简并和近简并四波混频理论。下面总结本文结果并进行若干讨论。

1. 证明适当选取四波的偏振方向或者偏振方向相同但适当选取四波的频率, 使某些波的混频共振激发等离子体正则波模均可在等离子体中实现反射光栅位形。

2. 导出反射光栅位形下普适无磁化等离子体四波耦合方程组(15)式。综合我们以前的透射光栅位形下的结果^[2,3], 已完全得到所有光栅位形下的普适无磁化等离子体四波混频耦合方程组。方程组中的非线性耦合系数 γ 可以在各种等离子体形态下, 利用流体方法或 Vlasov 动力论方法计算, 而且容易计入碰撞效应。因此它们为进一步讨论各种等离子体形态奠定了较好基础, 这将有助于深入探讨以等离子体为非线性媒质的光学元件。

3. 对反射光栅位形下的四波非线性耦合方程组中, 耦合系数的位相 Ψ 取任意实数值这种普遍情况, 精确求解得到包括波强度和位相并满足注入边界条件的解析解。经过若干改动后, 得到的解还可适用于光致折射材料媒质的情况。因此本文精确解将有助于研究相位共轭器、带相位共轭器的激光器、无反射镜自持振荡系统、多稳态器件等。无论它们是以等离子体还是光致折射材料作为非线性媒质的情况都是如此。关于本文精确解的性质以及它们在上述诸多应用领域中的作用将另文报道。

[1] 吴颖, 光学学报, **10**(1990), 425.

[2] 吴颖, 物理学报, **40**(1991), 423.

[3] WU Ying, YANG Xiao-Xue, *Commun. Theor. Phys.*, **14**(1990), 491.

[4] M. Cronin-Golomb *et al.*, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-20** (1984), 12.

[5] A. Bledowski *et al.*, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-22** (1986), 1547.

THEORY OF DEGENERATE AND NEARLY DEGENERATE FOUR-WAVE MIXING IN PLASMAS

IN THE CASE OF REFLECTION GRATING CONFIGURATION

WU YING YANG XIAO-XUE

Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074

(Received 20 March 1991)

ABSTRACT

In this paper, the theory of degenerate and nearly degenerate four wave mixing in plasmas in reflection geometry is investigate. The universal set of four wave nonlinear coupled equations is obtained and its exact solution appropriate for arbitrary nonlinear coupling parameter is found.

PACC: 5240D; 4265F