

混合迭加态的高阶压缩

董 传 华

上海工业大学基础课教育部 上海, 200072

1991 年 3 月 17 日收到

本文详细计算一般的混合迭加态中 $\Delta\hat{a}_1$ 和 $\Delta\hat{a}_2$ 的 k 阶矩, 应用 Bloch 矢量方法详细讨论混合迭加态中的高阶压缩, 描写并定量计算. 各阶压缩的压缩区域及压缩条件, 讨论最佳压缩的条件. 指出在高阶压缩的迭加态中, 两个正交的分量 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 在某些条件可望同时被压缩. 最后, 试图对迭加态压缩的本质作一些探讨.

PACC: 4250

一、引 言

相干态、压缩态都可以用福克态(光子数态)来展开, 因此可以看作是无限多个福克态的量子迭加. Wodkiewicz 等人引入的迭加态只是两个福克态的迭加^[1]. 设这两个福克态为 $|m\rangle$ 和 $|n\rangle (n > m)$, 那么纯迭加态定义为

$$|\alpha, \beta\rangle_{mn} = \alpha|m\rangle + \beta|n\rangle, \quad (1)$$

α, β 为复数, 它们的意义分别为代表两个福克态的概率, 如果令 $\alpha = |\alpha|$, 则 $\beta = |\beta|\exp(i\phi)$. $|\alpha|^2, |\beta|^2$ 满足归一化条件

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2)$$

这里讨论的混合迭加态, 则必须用密度矩阵表示, 其矩阵元为

$$\begin{aligned} \rho_{mm} &= |\alpha|^2, & \rho_{nn} &= R|\alpha\beta|\exp(-i\phi), \\ \rho_{nm} &= R|\alpha\beta|\exp(i\phi), & \rho_{nn} &= |\beta|^2. \end{aligned} \quad (3)$$

当 $R = 1$ 时即是纯态. 由于纯态是统计混合态的特殊情况, 所以这里主要讨论(3)式的统计混合态.

对于 $m = 0, n = 1, 2$ 的单光子迭加态和双光子迭加态的二阶压缩在文献[1]和文献[4]中作过详细讨论. 对于纯迭加态的高阶压缩在文献[2, 3]中也作过研究, 并且已得出结论: 对某些迭加态可以存在高阶压缩而不存在二阶压缩. 本文进一步对混合迭加态的高阶压缩作深入研究和一些定量的数值计算. 这里用 Stoler 等人使用过的 Bloch 矢量方法^[2]在平面上形象地讨论压缩区域及压缩对 ϕ, R 和 $|\alpha|$ 提出的要求. 分析在怎样的参数条件下可得最佳压缩. 在讨论中从 $m \neq 0$ 的一般情况出发. 这种讨论也是有意义的, 因为将看到即使 $m \neq 0$ 时 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 不压缩, 但 $\langle(\Delta\hat{a}_1)^k\rangle$ 和 $\langle(\Delta\hat{a}_2)^k\rangle$ 的大小仍会随相角 ϕ 变化. 文中不仅计算 $\langle(\Delta\hat{a}_1)^k\rangle$, 也计算 $\langle(\Delta\hat{a}_2)^k\rangle$, 从中更可以看出混合迭加态

高阶压缩的一个奇特性,即在 $(n-m)/2$ 为偶数且 $m=0$ 时 a_1 和 a_2 可同时获得高阶压缩.

二、高阶压缩的定义及 $\langle:(\Delta\hat{a}_1)^k:\rangle$ 和 $\langle:(\Delta\hat{a}_2)^k:\rangle$

Hong 和 Mandel 首先把压缩的定义从二阶推广到高阶^[1]. 如果定义光场中量子化电场的两个正交分量为

$$a_1 = \frac{1}{2}(a^+ + a), \quad a_2 = \frac{i}{2}(a^+ - a), \quad (4)$$

那么利用算符恒等式

$$e^{z(\Delta\hat{a}_1)} = :e^{z(\Delta\hat{a}_1)}: e^{\frac{z^2}{8}}, \quad (5)$$

可以得到 k 为偶数时, $\langle(\Delta\hat{a}_1)^k\rangle$ 的正规序乘积表示

$$\langle(\Delta\hat{a}_1)^k\rangle = \sum_{l=0}^{\frac{k}{2}} \frac{k!}{l!} \left(\frac{1}{2}\right)^l \langle:(\Delta\hat{a}_1)^{k-2l}: \rangle, \quad (6)$$

其中记号 $k^{(r)}$ 为

$$k^{(r)} = \frac{k!}{(k-r)!}. \quad (7)$$

显然 $r \leq k$. 若 $r > k$, 则规定 $k^{(r)} = 0$. 对于 $\langle(\Delta\hat{a}_2)^k\rangle$ 也有相同的正规序乘积展开. 对于相干态, k 为偶数时, $\langle(\Delta\hat{a}_1)^k\rangle = (k-1)!!/2^k$, 由于不可能存在奇数阶压缩, 所以以后只考虑 k 为偶数. 定义压缩量 Q_{k1} 和 Q_{k2} 分别为

$$Q_{k1} = \langle(\Delta\hat{a}_1)^k\rangle - \frac{(k-1)!!}{2^k}; \quad Q_{k2} = \langle(\Delta\hat{a}_2)^k\rangle - \frac{(k-1)!!}{2^k}. \quad (8)$$

当 $Q_{k1} < 0$ 时, a_1 为 k 阶压缩; $Q_{k2} < 0$ 时, a_2 为 k 阶压缩. 对于混合迭加态, 有

$$\langle\hat{a}^r\rangle = \sqrt{n^{(r)}} R |\alpha\beta| e^{i\phi} \delta_{n-m, r}, \quad \langle\hat{a}^{+r}\rangle = \sqrt{(m+r)^{(r)}} R |\alpha\beta| e^{-i\phi} \delta_{n, m+r}. \quad (9)$$

令 $J = n - m$, 有

$$\langle\hat{a}^{+r}\hat{a}^r\rangle = \begin{cases} m^{(r)}|\alpha|^2 + n^{(r)}|\beta|^2, & (r-s=0 \text{ 时}); \\ R|\alpha\beta| \sqrt{n^{(r)}m^{(r)}} e^{-i\phi} & (r-s=J \text{ 时}); \\ R|\alpha\beta| \sqrt{n^{(r)}m^{(r)}} e^{i\phi} & (r-s=-J \text{ 时}); \\ 0 & (r-s \neq 0, \pm J \text{ 时}). \end{cases} \quad (10)$$

用一个 Bloch 矢量 ξ 来表示迭加态, 它的三个分量为

$$\xi_1 = R|\alpha\beta| \cos \phi, \quad \xi_2 = R|\alpha\beta| \sin \phi, \quad \xi_3 = |\alpha|^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - |\beta|^2. \quad (11)$$

它的端点被约束在一个旋转椭球面

$$\frac{1}{R^2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2 = \frac{1}{4} \quad (12)$$

上. 因此混合迭加态就用这椭球面上的一个点表示. 由于压缩的迭加态总是处于椭球的

北半球, 所以进一步把北半球映射到赤道平面上. 于是北半球上任何一点代表的迭加态也可以用 $\xi_1 - \xi_2$ 平面上半径为 $R/2$ 的一个圆内的点表示, 该点的矢径方向即为相角 ϕ . 在 $\xi_1 - \xi_2$ 平面内讨论压缩的迭加态所处的区域(叫压缩区域).

利用 ξ_1, ξ_2, ξ_3 可以写出混合迭加态中 Δa_1 和 Δa_2 的正规序 k 阶矩为

$$\begin{aligned} J=1 \text{ 时, } \langle :(\Delta a_1)^k: \rangle &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} C_k^i C_{k-i}^j \langle a^{*k-i-j} a^j \rangle \langle a_1 \rangle^i \\ &= \sum_{i=0, \text{偶}}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} C_k^i C_{k-i}^{\frac{k-i}{2}} (\sqrt{n} \xi_1)^i [|\alpha|^2 m^{\frac{k-i}{2}} + |\beta|^2 n^{\frac{k-i}{2}}] \\ &= \sum_{i=1, \text{奇}}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i-1} C_k^i C_{k-i}^{\frac{k-i-1}{2}} (\sqrt{n} \xi_1)^{i+1} m^{\frac{k-i-1}{2}}. \quad (13) \end{aligned}$$

$\langle :(\Delta a_2)^k: \rangle$ 形式与上式相同, 只要把 ξ_1 改为 ξ_2 . 由于 $J \neq 1$ 时 $\langle a_1 \rangle = \langle a_2 \rangle = 0$, 所以当 J 为偶数且 $k \geq J$ 时,

$$\begin{aligned} \langle :(\Delta a_1)^k: \rangle &= \langle :a_1^k: \rangle = 2^{-k} \{ C_k^{\frac{k}{2}} [m^{\frac{k}{2}} |\alpha|^2 + n^{\frac{k}{2}} |\beta|^2] \\ &\quad + 2 C_k^{\frac{k-J}{2}} \sqrt{n^{\frac{k+J}{2}} m^{\frac{k-J}{2}}} \xi_1 \}, \\ \langle :(\Delta a_2)^k: \rangle &= \langle :a_2^k: \rangle = 2^{-k} \{ C_k^{\frac{k}{2}} [m^{\frac{k}{2}} |\alpha|^2 + n^{\frac{k}{2}} |\beta|^2] \\ &\quad + 2(-1)^{\frac{J}{2}} C_k^{\frac{k-J}{2}} \sqrt{n^{\frac{k+J}{2}} m^{\frac{k-J}{2}}} \xi_1 \}. \quad (14) \end{aligned}$$

当 J 为其他值时,

$$\langle :(\Delta a_1)^k: \rangle = \langle :(\Delta a_2)^k: \rangle = 2^{-k} C_k^{\frac{k}{2}} [m^{\frac{k}{2}} |\alpha|^2 + n^{\frac{k}{2}} |\beta|^2]. \quad (15)$$

混合迭加态的 k 阶压缩条件为

$$\begin{aligned} Q_{k,1} &< 0, \quad Q_{k,2} < 0; \\ \frac{1}{R^2} (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_3^2 &= \frac{1}{4}. \quad (16) \end{aligned}$$

三、 $n-m=J=1$ 时混合迭加态的压缩

这时 $Q_{k,1} = 0$ 和 $Q_{k,2} = 0$ 为两个抛物柱面. 条件(16)式表明, 压缩的迭加态必定处于椭球面(12)式被这两个抛物柱面截下北半球的那部分椭球面上 ($\xi_3 \geq 0$). 如果抛物柱面与椭球面不相交, 那么说明没有压缩态能满足(16)式, 因此不存在压缩. 在二阶压缩时, $Q_{k,1} = 0, Q_{k,2} = 0$ 即为

$$n\xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_3 - \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right) = 0; \quad n\xi_2^2 + \frac{1}{2}\xi_3 - \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right) = 0. \quad (17)$$

图1中曲线所包围的区域是不同 R 值时映射在 $\xi_1 - \xi_2$ 平面上的单光子迭加态的二阶压缩区域. 由 $Q_{2,1} = 0, Q_{2,2} = 0$ 与(12)式消去 ξ_3 得到图1中各曲线的方程

$$a_1 \text{ 压缩} \quad R^{-2} \xi_2^2 + \left(2n\xi_1^2 + \frac{R^{-2} - 4n^2 + 2n}{4n} \right)^2 = \frac{4n^2 R^4 + 4n(1-2n)R^2 + 1}{16n^2 R^4};$$

$$d_2 \text{ 压缩} \quad R^{-2}\xi_1^2 + \left(2n\xi_2^2 + \frac{R^{-2} - 4n^2 + 2n}{4n} \right)^2 = \frac{4n^2R^4 + 4n(1-2n)R^2 + 1}{16n^2R^4}. \quad (18)$$

(18)式等号左边不为负,因此等号右边也不能为负数,这一条件决定 n 必须为 1. 换言之,只有 $m=0$ 时才有压缩区. 实际上这一结论具有普遍意义,即 $m \neq 0$ 的迭加态是不可能被压缩到任何阶的. 但即使在这种不压缩的情况下, $\langle(\Delta d_1)^2\rangle$ 和 $\langle(\Delta d_2)^2\rangle$ 仍对相位 ϕ 敏感. d_1 和 d_2 压缩区分别有二个分支. 由于在二阶压缩区中 $\frac{1}{2}(R^{-2}-1) < \xi_3 < \frac{1}{2}$, 所以对二阶压缩的单光子迭加态要求 $|\alpha|^2$ 取下列范围的值:

$$\begin{aligned} d_1 \text{ 压缩} \quad & \frac{1}{2R^2\cos^2\phi} < |\alpha|^2 < 1; \\ d_2 \text{ 压缩} \quad & \frac{1}{2R^2\sin^2\phi} < |\alpha|^2 < 1. \end{aligned} \quad (19)$$

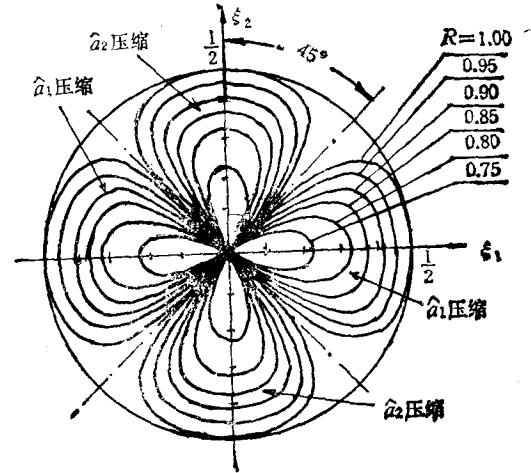


图1 混合单光子迭加态的二阶压缩区

对 $R=1$ 的纯态,上式与文献 [2] 中的结果一致. 对于 R , 则二阶压缩要求

$$1/2 < R^2 \leq 1. \quad (20)$$

二阶压缩的单光子迭加态中 ϕ 满足下列条件:

$$\begin{aligned} d_1 \text{ 压缩} \quad & -\cos^{-1}(1/\sqrt{2}R) < \phi < \cos^{-1}(1/\sqrt{2}R) \quad (\text{第一分支}), \\ & \pi - \cos^{-1}(1/\sqrt{2}R) < \phi < \pi + \cos^{-1}(1/\sqrt{2}R) \quad (\text{第二分支}); \\ d_2 \text{ 压缩} \quad & \sin^{-1}(1/\sqrt{2}R) < \phi < \pi - \sin^{-1}(1/\sqrt{2}R) \quad (\text{第一分支}), \\ & -\pi + \sin^{-1}(1/\sqrt{2}R) < \phi < -\sin^{-1}(1/\sqrt{2}R) \quad (\text{第二分支}). \end{aligned} \quad (21)$$

显然随着 R 减小, ϕ 的允许范围也减小. 当 $|\alpha|^2 = \frac{1}{2} [1 + (2R^2\cos^2\phi)^{-1}]$ 时, d_1 达到

最佳压缩. 当 $|\alpha|^2 = \frac{1}{2} [1 + (2R^2\sin^2\phi)^{-1}]$ 时, d_2 达到最佳压缩, 这时 $\langle(\Delta d_1)^2\rangle$,

$\langle(\Delta d_2)^2\rangle$ 分别为最小.

在考虑 $J=1$ 的 4 阶压缩时,柱面 $Q_{k1}=0$, $Q_{k2}=0$ 分别为

$$n\xi_1^4 + \xi_3\xi_1^2 + \frac{1}{4}\xi_3 - \frac{n}{8} = 0; \quad n\xi_2^4 + \xi_3\xi_2^2 + \frac{1}{4}\xi_3 - \frac{n}{8} = 0. \quad (22)$$

也只有 $m=0$ 时柱面 (22) 式才与椭球 (12) 式相交, 才存在 4 阶压缩. 由 (22) 和 (12) 式消去 ξ_3 , 也可以得到 $\xi_1 - \xi_2$ 平面内单光子迭加态的 4 阶压缩区域. 文献 [2] 中讨论了纯迭加态 d_1 的高阶压缩, 这里进一步讨论一般的混合迭加态中 d_1 和 d_2 的高阶压缩, 并作一些数值计算. 在 4 阶压缩区内, R 与 ϕ 也必须满足 (20)、(21) 式. 当 $\phi=0, \pi$ 时 d_1

的 4 阶压缩及 $\phi = \pi/2, 3\pi/2$ 时 d_2 的 4 阶压缩都要求 $|\alpha|^2$ 大约取下列范围的值:

$$1.83 - 1.18R < |\alpha|^2 < 1. \quad (23)$$

在一般的 ϕ 值时 d_1 的 4 阶压缩要求 $|\alpha|^2$ 值的下限由图 2 中曲线表示 (上限为 1)。可以看出, 不同的 R 值时 4 阶压缩对 ϕ 范围的要求。显然, 随 R 减小, 4 阶压缩所允许的 $|\alpha|^2$ 和 ϕ 范围也减小。如果图 2 中横轴标度增加 π , 就代表 d_1 压缩的第二分支。如果增加 $\pi/2$ 或 $3\pi/2$, 则分别表示 d_2 的 4 阶压缩的第一

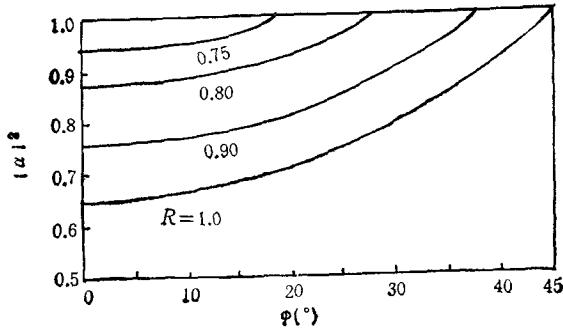


图 2 单光子迭加态 4 阶压缩时 $|\alpha|^2$ 的允许值范围

分支和第二分支。最佳 4 阶压缩时 $|\alpha|^2$ 值不能用解析式表示, 但对 $R=1$ 的纯态、当 $|\alpha|^2 \approx 5/6$, $\phi = 0, \pi$ (或 $\pi/2, 3\pi/2$) 时, d_1 (或 d_2) 为最佳 4 阶压缩。

考虑单光子迭加态的 6 阶压缩时, 只有 $m=0$ 时才存在压缩区, 这时

$$Q_{6,1} = -5\xi_1^6 - \frac{15}{2}\xi_1^5 + \frac{45}{16}\xi_1^4 + \frac{45}{64} - \left(\frac{15}{2}\xi_1^4 + \frac{45}{4}\xi_1^3 + \frac{45}{32}\right)\xi_3;$$

$$Q_{6,2} = -5\xi_2^6 - \frac{15}{2}\xi_2^5 + \frac{45}{16}\xi_2^4 + \frac{45}{64} - \left(\frac{15}{2}\xi_2^4 + \frac{45}{4}\xi_2^3 + \frac{45}{32}\right)\xi_3. \quad (24)$$

d_1, d_2 的 6 阶压缩时对 R, ϕ 的要求也由 (20) 和 (21) 式给出。 d_1 的 6 阶压缩 (在 $\phi = 0, \pi$ 时) 和 d_2 的 6 阶压缩 (在 $\phi = \pi/2, 3\pi/2$ 时) 对 $|\alpha|^2$ 的要求为

$$1.62 - 0.88R < |\alpha|^2 < 1. \quad (25)$$

在一般 ϕ 角时 d_1 的 6 阶压缩的第一分支中, $|\alpha|^2$ 取值的下限由图 3 中曲线给出, $|\alpha|^2$ 的上限为 1。如果横轴标度增加 $\pi, \pi/2, 3\pi/2$, 分别对应于 d_1 的 6 阶压缩区第二分支和 d_2 的 6 阶压缩的第一、二分支。在 $R=1$ 的纯态中, 当 $|\alpha|^2 \approx 0.904$ 时, $d_1(\phi =$

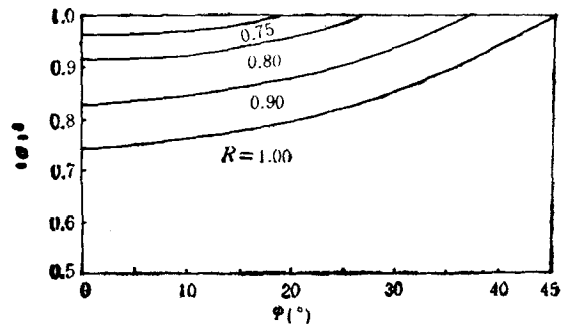


图 3 单光子迭加态 6 阶压缩时 $|\alpha|^2$ 的允许值范围

$0, \pi$) 或 $d_2(\phi = \pi/2, 3\pi/2)$ 为最佳 6 阶压缩。也可以类似地讨论 8 阶、10 阶及更高阶的压缩。 $m=0$ 时只要按 (20) 和 (21) 式选取 R, ϕ , 那么 $|\alpha|^2$ 在某一范围内可以使 d_1, d_2 得到高阶压缩, 但 d_1 与 d_2 不可能同时被压缩, 因为它们的压缩区不重叠。

四、 $n-m=J \neq 1$ 时混合迭加态的压缩

$J \neq 1$ 时纯迭加态中 d_1 的高阶压缩在文献 [3] 中已有讨论, 这里进一步讨论混合迭加态中的情况, 讨论 d_1 压缩和 d_2 压缩。分析 (14), (15) 式可知, 当 J 为奇数或大于 k 的任何自然数时, $\langle :(\Delta d_1)^k: \rangle, \langle :(\Delta d_2)^k: \rangle$ 总为正的, 因此 $Q_{k1} > 0$ 和 $Q_{k2} > 0$, 而只有

当 $J \leq k$, 且 J 为偶数时, $\langle :(\Delta d_1)^k: \rangle$ 和 $\langle :(\Delta d_2)^k: \rangle$ 的表达式中才出现含 ξ_1 的项. 由于 ξ_1 中含有 ϕ , 所以调节 ϕ 可使 ξ_1 为负的, 从而导致 $Q_{k1} < 0$, $Q_{k2} < 0$. 当然, 这里也只有 $m = 0$ 时压缩才可能, 所以讨论 $m = 0$ 情况, 这时 (14), (15) 式简化为

$$\langle :(\Delta d_1)^k: \rangle = 2^{-k} \left[C_k^{k/2} n^{\frac{k}{2}} \left(\frac{1}{2} - \xi_3 \right) + 2\sqrt{n!} \xi_1 \delta_{k,J} \right], \quad (26)$$

$$\langle :(\Delta d_2)^k: \rangle = 2^{-k} \left[C_k^{k/2} n^{\frac{k}{2}} \left(\frac{1}{2} - \xi_3 \right) + 2 \cdot (-1)^{\frac{J}{2}} \sqrt{n!} \xi_1 \delta_{k,J} \right]. \quad (27)$$

于是当 $k \geq J$, J 为偶数时 Q_{k1} 和 Q_{k2} 可以写成 ($m = 0$)

$$Q_{k1} = A_{kn0} \xi_1 + B_{kn} \left(\frac{1}{2} - \xi_3 \right), \quad Q_{k2} = A'_{kn0} \xi_1 + B_{kn} \left(\frac{1}{2} - \xi_3 \right), \quad (28)$$

其中

$$A_{kn0} = \frac{2k!}{2^{\frac{3}{2}k - \frac{1}{2}J} \sqrt{J!} \left(\frac{k-J}{2} \right)!}, \quad A'_{kn0} = (-1)^{\frac{J}{2}} A_{kn0} \quad (J = n), \quad (29)$$

$$B_{kn} = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} \frac{1}{i!} k^{(2i)} \left(\frac{1}{2} \right)^{i+k} C_{\frac{k}{2}-2i}^{\frac{k}{2}-i} n^{\frac{k}{2}-i}. \quad (30)$$

由 $Q_{k1} = 0$ 和 $Q_{k2} = 0$ 与 (12) 式一起消去 ξ_3 , 得到 $\xi_1 - \xi_2$ 平面内的压缩区域, 这些区域为一些椭圆,

$$\begin{aligned} a_1 \text{ 压缩区 } & \left[\frac{2(R^2 A_{kn0} + B_{kn}^2)}{R^2 A_{kn0} B_{kn}} \xi_1 + 1 \right]^2 + \left(\frac{2\sqrt{R^2 A_{kn0}^2 + B_{kn}^2}}{R^2 A_{kn0}} \xi_2 \right)^2 = 1; \\ a_2 \text{ 压缩区 } & \left[\frac{2(R^2 A_{kn0} + B_{kn}^2)}{R^2 A_{kn0} B_{kn}} \xi_1 + (-1)^{\frac{J}{2}} \right]^2 + \left(\frac{2\sqrt{R^2 A_{kn0}^2 + B_{kn}^2}}{R^2 A_{kn0}} \xi_2 \right)^2 = 1. \end{aligned} \quad (31)$$

图 4 中画 $m = 0$, $n = 2$, $R = 1$ 时, a_1 , a_2 各阶压缩的压缩区域. 分析 (31) 式可以看出, 压缩区域面积随 R 减小而减小. 对于相同的压缩阶数 k , 压缩区面积随 n 增大而急剧下降, 并且压缩区很快接近于一个圆. 实际上当 $n > 6$ 时压缩区域已变得很小, 这时只有 $|\alpha|^2$ 很接近于 1 (但又不等于 1) 时才有 6 阶以上的高阶压缩. 另外, 可看到当 $J/2$ (或 $n/2$) 为偶数时, a_1 的压缩区与 a_2 的压缩区重合, 这时 a_1 和 a_2 会同时得到压缩, 这也是多光子选加态的一个特点. 当 $J/2$ 为奇数时, a_1 , a_2 的 k 阶压缩要求 $\phi \neq \pm \pi/2$, 即 a_1 压缩时, $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$; a_2 压缩时, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. 当 $J/2$ 为偶数时, a_1, a_2 压缩都要求 $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$. 表 1 列出部分 A_{kn0} 和 B_{kn} 的数值计算结果. 不存在压缩阶数比 n 低的压缩.

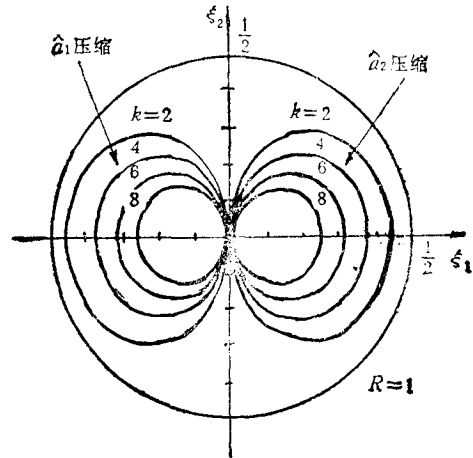


图 4 纯双光子选加态各高阶压缩区

表 1 部分 A_{k20} , A'_{k20} , B_{k2} 值

n	2			4			6			8		
k	A_{k20}	A'_{k20}	B_{k2}	A_{k40}	A'_{k40}	B_{k4}	A_{k60}	A'_{k60}	B_{k6}	A_{k80}	A'_{k80}	B_{k8}
2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	不 压 缩			不 压 缩			不 压 缩		
4	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	$\frac{15}{2}$						
6	$\frac{45\sqrt{2}}{32}$	$-\frac{45\sqrt{2}}{32}$	$\frac{45}{8}$	$\frac{15\sqrt{6}}{16}$	$\frac{15\sqrt{6}}{16}$	30	$\frac{3\sqrt{5}}{8}$	$-\frac{3\sqrt{5}}{8}$	$\frac{705}{8}$			
8	$\frac{105\sqrt{2}}{32}$	$-\frac{105\sqrt{2}}{32}$	$\frac{525}{32}$	$\frac{105\sqrt{6}}{32}$	$\frac{105\sqrt{6}}{32}$	$\frac{525}{4}$	$\frac{21\sqrt{5}}{8}$	$-\frac{21\sqrt{5}}{8}$	$\frac{16905}{32}$	$\frac{3\sqrt{70}}{16}$	$\frac{3\sqrt{70}}{16}$	$\frac{5985}{4}$

五、迭加态压缩本质的讨论

最后,探讨一下迭加态压缩的本质. 迭加态的压缩并不在于 Wigner 相空间的压缩, 它不可能通过对相干态的线性正则变换得到, 所以它本质上不同于双光子相干态(压缩态). 我们知道 $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ 在福克态中的平均值为零,

$$\langle(\Delta \hat{a}_1)^k\rangle_{nn} - \langle \hat{a}_1^k \rangle_{nn} = \langle(\Delta \hat{a}_1)^k\rangle_{00} + B_{kn}. \quad (32)$$

在福克态 $|n\rangle$ 中 $(\Delta \hat{a}_2)^k$ 的平均值 $\langle(\Delta \hat{a}_2)^k\rangle_{nn}$ 与上式一样. 而 $\langle(\Delta \hat{a}_1)^k\rangle_{00} = \langle(\Delta \hat{a}_2)^k\rangle_{00}$ 为 $(\Delta \hat{a}_1)^k$ 和 $(\Delta \hat{a}_2)^k$ 在真空态中的平均值, 等于 $(k-1)!/2^k$. 所以 B_{kn} 的物理意义为 $(\Delta \hat{a}_1)^k$ (或 $(\Delta \hat{a}_2)^k$) 在 $|n\rangle$ 态中的平均值与其在真空态中的平均值之差. $B_{kn} > 0$.

在 $J=1$ 时, 把 $(\Delta \hat{a}_1)^k$ 在迭加态中的平均值写成

$$\begin{aligned} \langle(\Delta \hat{a}_1)^k\rangle_{nn} &= \sum_{i=0, \text{偶}}^k C_k^i [|\alpha|^2 \langle(\Delta \hat{a}_1)^{k-i}\rangle_{mm} + |\beta|^2 \langle(\Delta \hat{a}_1)^{k-i}\rangle_{nn}] (\sqrt{n} R |\alpha\beta| \cos \phi)^i \\ &\quad - 2 \sum_{j=1, \text{奇}}^{k-1} C_k^j (\sqrt{n} R |\alpha\beta| \cos \phi)^{j+1} R_{k-j}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \langle(\Delta \hat{a}_2)^k\rangle_{nn} &= \sum_{i=0, \text{偶}}^k C_k^i [|\alpha|^2 \langle(\Delta \hat{a}_2)^{k-i}\rangle_{mm} + |\beta|^2 \langle(\Delta \hat{a}_2)^{k-i}\rangle_{nn}] (\sqrt{n} R |\alpha\beta| \sin \phi)^i \\ &\quad - 2 \sum_{j=1, \text{奇}}^{k-1} C_k^j (\sqrt{n} R |\alpha\beta| \sin \phi)^{j+1} R_{k-j}, \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$R_{k-j} = \sum_{l=0}^{\frac{1}{2}(k-j-1)} \frac{(k-j)^{(2l)}}{l!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+l-j} C_{k-j-2l}^{\frac{k-j-2l-1}{2}} m^{\frac{(k-j-2l-1)}{2}}. \quad (35)$$

特别地当 $m=0$ 时,

$$\langle(\Delta \hat{a}_1)^k\rangle_{0..} = \sum_{i=0, \text{偶}}^k C_k^i \frac{(k-j)^{(2l)}}{\left(\frac{k-j}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(k-i)} [1 + |\beta|^2(k-j)] (R |\alpha\beta| \cos \phi)^j$$

$$- 2 \sum_{j=1, \infty}^{k-1} C_k^j \frac{(k-j)!}{\left(\frac{k-j-1}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(k-j)-\frac{1}{2}} (R|\alpha\beta|\cos\phi)^{j+1}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \langle(\Delta d_2)^k\rangle_{nn} &= \sum_{j=0, \infty}^k C_k^j \frac{(k-j)!}{\left(\frac{k-j}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(k-j)} [1 + |\beta|^2(k-j)] (R|\alpha\beta|\sin\phi)^j \\ &- 2 \sum_{j=1, \infty}^{k-1} C_k^j \frac{(k-j)!}{\left(\frac{k-j-1}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(k-j)-\frac{1}{2}} (R|\alpha\beta|\sin\phi)^{j+1}. \end{aligned} \quad (37)$$

因此在 $|m\rangle$ 与 $|n\rangle$ 迭加后构成的迭加态中 $(\Delta d_1)^k$ (或 $(\Delta d_2)^k$) 的平均值并不等于它们分别在 $|m\rangle$ 态和 $|n\rangle$ 态中的平均值之和, 而增加了一个调整项 ((33) 和 (34) 式等号右边第二项)。如果把 α, β 看作为 $|m\rangle$ 与 $|n\rangle$ 态的概率振幅, ϕ 为位相差, 这样可以与光的干涉对应起来。因为两束光干涉后总光强并不等于这两束光的光强之和, 而多一干涉项。由于这个干涉项的存在, 当两束光的相位差为某些值时会使总光强变小, 甚至小于两束光强中任何一束的光强。这干涉项就对应于 (33), (34) 式中的调整项。福克态的迭加与光的迭加时发生的干涉之间的这一类比在 $J \neq 1$ 且 $J \leq k$ (J 为偶数) 时更加清楚。因为这时

$$\begin{aligned} \langle(\Delta d_1)^k\rangle_{mn} &= |\alpha|^2 \langle(\Delta d_1)^k\rangle_{mm} + |\beta|^2 \langle(\Delta d_1)^k\rangle_{nn} + R|\alpha\beta| A_{knm} \cos\phi; \\ \langle(\Delta d_2)^k\rangle_{mn} &= |\alpha|^2 \langle(\Delta d_2)^k\rangle_{mm} + |\beta|^2 \langle(\Delta d_2)^k\rangle_{nn} + (-1)^{\frac{1}{2}k} R|\alpha\beta| A_{knm} \cos\phi, \end{aligned} \quad (38)$$

其中

$$A_{knm} = 2 \sum_{l=0}^{\frac{k}{2}-1} \frac{k(2l)}{l!} \left(\frac{1}{2}\right)^{l+k} C_{k-2l}^{\frac{k-2l-j}{2}} m^{\frac{(k-2l-j)}{2}} \sqrt{(m+J)^{(J)}}. \quad (39)$$

当 $m=0$ 时上式即为 (29) 式中的 A_{kn0} 。(38) 式等号右边第三项起源于福克态迭加时发生类似于光的干涉的现象。适当地选择 ϕ 可以使 $(\Delta d_1)^k, (\Delta d_2)^k$ 在迭加态中的平均值小于它们在两个福克态中的平均值之和。如果 $|\alpha|^2, R$ 选在某一范围内, 可以使 $(\Delta d_1)^k, (\Delta d_2)^k$ 在迭加态中的平均值小于它们在单独一个福克态中的平均值, 如果这个福克态是真空态, 就小于它们在真空态中的平均值而发生压缩。

- [1] K. Wodkiewicz, P. L. Knight, S. J. Buokle and S. M. Barnett, *Phys. Rev.*, **A35**, (1987), 2567,
- [2] 夏云杰、郭光灿, 量子电子学, 5 (1988), 202.
- [3] 夏云杰、郭光灿, 物理学报, 39 (1990), 1070.
- [4] D. Stoler, B.E.A. Saleh, M.C. Teich, *Optica Acta*, 32 (1985), 345.
- [5] C.H. Hong and L.M. Mandel, *Phys. Rev.*, **A32** (1985), 974.

HIGHER ORDER SQUEEZING OF MIXED SUPERPOSITION STATES

DONG CHUAN-HUA

Department of Fundamental Courses, Shanghai University of Technology, Shanghai, 200072

(Received 17 March 1991)

ABSTRACT

In this paper, we calculate the k -th moments of $\Delta\hat{a}_1$ and $\Delta\hat{a}_2$ in mixed superposition states, discuss the higher-order squeezing in these states with Bloch vector. We also describe and calculate squeeze zones, and squeeze conditions in higher-order squeezing, discuss some optimum squeeze conditions. We conclude that two quadrature components $\hat{a}_1$ and $\hat{a}_2$ can be squeezed to higher-order at the same time under some conditions. Finally, we try to discuss the nature of squeeze in superposition states.

PACC: 4250