第41卷 第4期　　物 理 学 报　　Vol. 41, No. 4
1992年4月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Apr., 1992

超相干态与 Berry 相因数

陈成明　　徐东辉
浙江大学物理系，杭州，310027

1991年4月17日收到

本文用位移算符作用于一超对称哈密顿量而引出超相干态，研究了它们的性质，计算了当超相干态的参数绝热变化时产生的 Berry 相因数。

PACC: 0210；0530；4250

一、引　　言

近年来，对"超对称"的研究促使人们引入"超空间"，从而对一般空间中的量子力学作结构上的补充完善。Salomonson 等人提出超对称谐振子[1]。在此基础上 Aragone 等人引入了"超相干态"[2]。它是超对称谐振子湮没算符的本征态。令人感兴趣的是，不同原子、离子的内在联系与抽象的超对称有关[3]。本文首先介绍超对称谐振子及 Aragone 等人的一些结果，然后通过位移算符作用于一个超对称哈密顿量而引出超相干态，并将压缩态的概念推广到超相干态中。

Berry 相因数是近年来量子力学中的一个重要发现。1984年，Berry 首先指出处于一本征态的量子系统经过一个绝热过程之后，除了获得通常的动力学相因子

$$\exp\left[\frac{1}{i\hbar}\int_0^T E_n(R(t))dt\right]$$

之外，还要附加一拓扑相因子 $\exp[i\gamma_n(C)]$，其中 $\gamma_n(C)$ 为 Berry 相因数。人们用群论方法[5]、WKB 方法[6]、路径积分方法[7]、相干态[8]研究了 Berry 相因数的性质。本文计算了超相干态中参数缓慢变化而产生的 Berry 相因数。

二、超对称谐振子

超对称谐振子是超对称量子力学模型的一个例子，它的哈密顿量的形式为[2]

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{x}^2 - \frac{1}{2}\omega\sigma_3, \tag{1a}$$

$$= \hat{H}_0 - \frac{1}{2}\omega\sigma_3, \tag{1b}$$

$\hat{H}_0$ 为普通谐振子的哈密顿量，σ_3 为 Pauli 矩阵第三分量。引入 $\hat{H}_0$ 的产生、湮没算符

$\hat{a}^+,\hat{a}$，可将(1)式改写为

$$\hat{H}=\omega\begin{pmatrix}\hat{a}^+\hat{a} & \bullet\\ \bullet & \hat{a}\hat{a}^+\end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中

$$\hat{a}=(1/\sqrt{2\omega})(\omega\hat{x}+i\hat{p}),\quad \hat{a}^+=(1/\sqrt{2\omega})(\omega\hat{x}-i\hat{p}), \tag{3a}$$

$$[\hat{x},\hat{p}]=i,\qquad\qquad [\hat{a},\hat{a}^+]=1. \tag{3b}$$

容易得到 $\hat{H}$ 的能量本征值及相应的本征态为

$$E_0=0,\qquad \varphi_0=\begin{pmatrix}|0\rangle\\ \bullet\end{pmatrix}, \tag{4a}$$

$$E_{n>0}=n\omega,\quad \varphi_{n>0}=\alpha\begin{pmatrix}|n\rangle\\ \bullet\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}\bullet\\ |n-1\rangle\end{pmatrix}, \tag{4b}$$

$|n\rangle$为普通谐振子的本征态。超对称谐振子的湮没算符为

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}\hat{a} & 1\\ \bullet & \hat{a}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

它满足 $[\hat{A},\hat{H}]=\omega\hat{A}$. (6)

上式与谐振子对易关系 $[\hat{a},\hat{H}_0]=\omega\hat{a}$ 相似. 超相干态 $|Z\rangle$ 为 $\hat{A}$ 的本征态

$$\hat{A}|Z\rangle=z|Z\rangle. \tag{7}$$

Aragone 等人[2]得到

$$|Z\rangle=\alpha|z_f\rangle+\beta|z_s\rangle, \tag{8a}$$

其中

$$|z_f\rangle=\begin{pmatrix}|z\rangle\\ \bullet\end{pmatrix},\ |z_s\rangle=(1/\sqrt{2})\begin{pmatrix}z^*|z\rangle-\hat{a}^+|z\rangle\\ |z\rangle\end{pmatrix}, \tag{8b}$$

而 $|z\rangle$ 为 $\hat{a}$ 的本征态

$$\hat{a}|z\rangle=z|z\rangle. \tag{9}$$

三、超相干态

相干态通常可由三种途径引入：一是作为量子力学中最为逼近经典态的状态(最小测不准度波包态)而被引入;二是作为湮没算符本征态而被引入；三是经位移算符作用而产生. 上节所提到的超相干态就是作为湮没算符本征态而被 Aragone 等人引入的. 下面我们将用位移算符作用于一特定超对称哈密顿量来引入超相干态.

首先考虑一个如下形式的超对称哈密顿量:

$$\hat{H}=\omega\hat{A}^+\hat{A}, \tag{10a}$$

$$=\omega\begin{pmatrix}\hat{a}^+\hat{a} & \hat{a}^+\\ \hat{a} & \hat{a}\hat{a}^+\end{pmatrix}, \tag{10b}$$

其中 $\hat{A}$ 由(5)式定义. 由于

$$\hat{H}\begin{pmatrix}|n\rangle\\ \bullet\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\omega|n\rangle\\ \sqrt{n}\,\omega|n-1\rangle\end{pmatrix},\ \hat{H}\begin{pmatrix}\bullet\\ |n-1\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{n}\,\omega|n\rangle\\ n\omega|n-1\rangle\end{pmatrix}, \tag{11}$$

可知本征态的形式为

$$\phi_n = \begin{pmatrix} \alpha|n\rangle \\ \beta|n-1\rangle \end{pmatrix}. \tag{12}$$

代入本征方程

$$\hat{H}\phi_n = E_n\phi_n, \tag{13}$$

整理得

$$\begin{pmatrix} n\omega - E_n & \sqrt{n}\,\omega \\ \sqrt{n}\,\omega & n\omega - E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0, \tag{14}$$

故本征值为

$$E_n = (n \pm \sqrt{n})\omega. \tag{15}$$

与各能量本征值对应的本征矢为

$$E_0 = 0,\ \phi_0 = \begin{pmatrix} |0\rangle \\ \bullet \end{pmatrix}, \tag{16a}$$

$$E_n(\pm) = (n \pm \sqrt{n})\omega,\ \phi_{n\geq 1}(\pm) = (1/\sqrt{2})\left[\begin{pmatrix} \pm|n\rangle \\ \bullet \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bullet \\ |n-1\rangle \end{pmatrix}\right]. \tag{16b}$$

将位移算符作用于(10)式的哈密顿量，得到新的超对称哈密顿量为

$$\hat{H} = \omega\hat{D}\hat{A}^{+}\hat{A}\hat{D}^{-1}, \tag{17}$$

其中

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \hat{D}(\alpha) & \\ & \hat{D}(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle,\ \hat{D}(\alpha) \equiv \exp(\alpha\hat{a}^{+} - \alpha^{*}\hat{a}), \tag{19}$$

$$[\hat{a}^{+}, \hat{D}(\alpha)] = \alpha^{*}\hat{D}(\alpha). \tag{20}$$

(17)式所示哈密顿量的能量本征值和相应本征态为

$$E_n = (n \pm \sqrt{n})\omega,\ \Psi_n = \hat{D}\phi_n, \tag{21}$$

ϕ_n 由(16)式给出。我们特别列出

$$E_f = 0,\ \Psi_f = \begin{pmatrix} |\alpha\rangle \\ \bullet \end{pmatrix}, \tag{22a}$$

$$\begin{aligned} E_1(-) = 0,\ \Psi_s &= (1/\sqrt{2})\left[\begin{pmatrix} -\hat{D}(\alpha)\hat{a}^{+}|0\rangle \\ \bullet \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bullet \\ |\alpha\rangle \end{pmatrix}\right] \\ &= (1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} \alpha^{*}|\alpha\rangle - \hat{a}^{+}|\alpha\rangle \\ |\alpha\rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{22b}$$

将(22)式与(8)式对比可知，由 Aragone 等人作为超谐振子湮没算符本征态而引入的超相干态恰好就是(17)式所示的超对称哈密顿量的基态。利用

$$\begin{aligned} \hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) &= \hat{a} + \alpha, \\ \hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a} + \hat{D}(\alpha) &= \hat{a}^{+} + \alpha^{*}, \end{aligned} \tag{23}$$

容易验证 Ψ_f, Ψ_s 的相干性质。

$$\langle x\rangle_f = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\alpha,\ \langle p\rangle_f = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\alpha,$$

$$(\Delta x^2)_f = (\Delta p^2)_f = \frac{1}{2}, \quad (\Delta x)_f(\Delta p)_f = \frac{1}{2},$$

$$\langle x\rangle_s = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\alpha, \quad \langle p\rangle_s = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\alpha, \tag{24}$$

$$(\Delta x^2)_s = (\Delta p^2)_s = 1, \quad (\Delta x)_s(\Delta p)_s = 1.$$

可见 Ψ_f, Ψ_s 态都逼近经典态,其中 Ψ_f 态满足最小测不准度.

一般地,将压缩算符作用于一位移谐振子哈密顿量,可构造一新的哈密顿量,其本征态为压缩态[8]. 下面我们将把压缩态的讨论扩展到超相干态中.

考虑如下形式的超对称哈密顿量:

$$\hat{H} = \hat{S}\hat{D}\hat{A}^+\hat{A}\hat{D}^{-1}\hat{S}^{-1}, \tag{25}$$

其中

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \hat{D}(\alpha) & \\ & \hat{D}(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{S}(\beta) & \\ & \hat{S}(\beta) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\hat{S}(\beta) = \exp\left(\frac{1}{2}\beta\hat{a}^+\hat{a}^+ - \frac{1}{2}\beta^*\hat{a}\hat{a}\right). \tag{27}$$

$\hat{A}$ 如(5)式所定义; $\hat{D}(\alpha)$ 与(19)式相同,为一位移算符;$\hat{S}(\beta)$ 为压缩算符. 此哈密顿量的本征值与相应的本征态为

$$E_n = (n \pm \sqrt{n})\omega, \quad \Phi_n = \hat{S}\hat{D}\Psi_n, \tag{28}$$

其中 Ψ_n 由(21)式给出. 这个哈密顿量的基态

$$\Phi_f = \hat{S}\hat{D}\Psi_f, \quad \Phi_s = \hat{S}\hat{D}\Psi_s \tag{29}$$

具有压缩态的性质,下面将说明这一点. 因为

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}\hat{D}^+(\alpha) = \hat{a} - \alpha, \tag{30a}$$

$$\hat{S}^{-1}(\beta)\hat{a}\hat{S}(\beta) = (\cosh r)a^+ + e^{-i\theta}(\sinh r)a, \quad \beta = re^{i\theta} \tag{30b}$$

利用

$$\langle n|\hat{S}^{-1}(\beta)\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\beta)|m\rangle = \begin{cases} \alpha & m = n \\ \sqrt{n+1}\,e^{-i\theta}\sinh r & m = n+1 \\ \sqrt{n}\,\cosh r & m = n-1, \end{cases} \tag{31}$$

容易得到

$$\begin{aligned} &\langle x\rangle_f = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\alpha, \quad \langle p\rangle_f = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\alpha, \\ &(\Delta x^2)_f = [(\cosh r + \sinh r\cos\theta)^2 + (\sinh r\sin\theta)^2]/2, \\ &(\Delta p^2)_f = [(\cosh r - \sinh r\cos\theta)^2 + (\sinh r\sin\theta)^2]/2, \\ &(\Delta x)_f(\Delta p)_f = \frac{1}{2}[(\cosh 2r)^2 - (\sinh 2r\cos\theta)^2]^{1/2}. \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} &\langle x\rangle_s = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\alpha, \quad \langle p\rangle_s = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\alpha, \\ &(\Delta x^2)_s = (\cosh r + \sinh r\cos\theta)^2 + (\sinh r\sin\theta)^2, \\ &(\Delta p^2)_s = (\cosh r - \sinh r\cos\theta)^2 + (\sinh r\sin\theta)^2, \\ &(\Delta x)_s(\Delta p)_s = [(\cosh 2r)^2 - (\sinh 2r\cos\theta)^2]^{1/2}. \end{aligned} \tag{33}$$

当 θ 取值为 0 或 π 时,(32)和(33)式描述的为常见的压缩态形式.

四、超相干态中的 Berry 相因数

Berry 相因数的计算公式为[4]

$$\gamma_n(C) = i\oint_C \langle n(\boldsymbol{R})|\nabla_R|n(\boldsymbol{R})\rangle \cdot d\boldsymbol{R}, \tag{34}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为随时间变化的参数；C 为参数空间中的闭合迴路；$|n(\boldsymbol{R})\rangle$ 为含参量的哈密顿量 $\hat{H}(\boldsymbol{R}(t))$ 的瞬时本征态。下面适当选取参数计算超相干态中的 Berry 相因数。

对于由(22)式给出的超相干态 Ψ_f，Ψ_s，我们选取 α 为缓慢变化的参数。α 为复数，记 α 的实部为 X，虚部为 Y，这样就定义了一个二维的参数空间，而 Ψ_f，Ψ_s 就是所谓瞬时本征态。设 α 缓变一周回到起点，即在参数空间中定义了一闭合路径 C，与这一绝热过程相对应的 Berry 相因数为

$$\begin{aligned}\gamma(C) &= i\oint_C \langle\Psi|\nabla_\alpha|\Psi\rangle d\alpha \\ &= i\oint_C \langle\phi|\hat{D}^{-1}\nabla_\alpha\hat{D}|\phi\rangle d\alpha,\end{aligned} \tag{35}$$

其中 $\Psi = \hat{D}\phi$，ϕ 由(16)式给出。利用

$$\frac{\partial\hat{D}(\alpha)}{\partial X} = \hat{D}(\alpha)[\hat{a}^+ - \hat{a} - iY], \tag{36a}$$

$$\frac{\partial\hat{D}(\alpha)}{\partial Y} = \hat{D}(\alpha)[i(\hat{a}^+ - \hat{a}) + iX], \tag{36b}$$

可以得到

$$\gamma_f(C) = \int_C (YdX - XdY) = -2S_C, \tag{37}$$

$$\gamma_S(C) = -4S_C, \tag{38}$$

其中 S_C 为闭合迴路 C 在参数空间中所包含的面积。这里 Berry 相因数有鲜明的几何意义。

对于由(29)式给出的压缩态 Φ_f，Φ_s，我们选取 $\beta = re^{i\theta}$ 为缓慢变化的参数。类似地，系统经过一绝热过程产生的 Berry 相因数为

$$\begin{aligned}\gamma(C) &= i\oint_C \langle\Phi|\nabla_\beta|\Phi\rangle d\beta \\ &= i\oint_C \langle\phi|\hat{S}^{-1}\hat{D}^{-1}\nabla_\beta\hat{D}\hat{S}|\phi\rangle d\beta \\ &= i\oint_C \langle\phi|\hat{S}^{-1}\nabla_\beta\hat{S}|\phi\rangle d\beta,\end{aligned} \tag{39}$$

这里把 α 当作常量处理。因为

$$i\oint_C \langle n|\hat{S}^+(\beta)\nabla_\beta\hat{S}(\beta)|n\rangle d\beta = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \sinh^2 r(\theta), \tag{40}$$

可以得到

$$\gamma_f(C) = (-1/2)\int_0^{2\pi} d\theta \sinh^2 r(\theta), \tag{41a}$$

$$\gamma_s(C) = -2\int_0^{2\pi} d\theta \sinh^2 r(\theta). \tag{41b}$$

[1] P. Salomonson, *et al*., *Nucl. Phys*., **B196**(1982), 509.
[2] C. Aragone and F. Zypman, *J. Phys. A*., **19**(1986), 2267.
[3] V. A. Kostelecky, and M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett*., **53**(1984), 2285.
[4] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. Lond*., **A392**(1984), 45.
[5] G. Gravarini, and E. Onofri, *J. Math. Phys*., **30**(1989), 659.
[6] N. Rapanicolaon, *J. Physique*, **49**(1988), 1493.
[7] C. M. Cheng et al., *J. Phys. A*, **22**(1989), 3493.
[8] S. Chatwvedi, M. S. Sriram and V. Srinivasan, *J. Phys. A*, **20**(1987), L1071.

SUPERCOHERENT STATES AND BERRY'S PHASE

CHEN CHENG-MING XU DONG-HUI
Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou, 310027

(Received 17 April 1991)

ABSTRACT

Supercoherent states as the result of acting of displacement operator on a supersymmetric hamiltonian are introduced and discussed. Berry's phase is calculated for coherent states as their parameters are taken to be varying adiabatically.

PACC: 0210; 0530; 4250