第 41 卷 第 4 期　　物 理 学 报　　Vol. 41, No. 4
1992 年 4 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Apr., 1992

弱耦合满迭代中的标度行为*

吕燕南　　丁鄂江[1)]
北京师范大学低能核物理研究所，北京，100875
1991 年 4 月 11 日收到；1991 年 10 月 4 日收到修改稿

本文研究由一维单峰满迭代以很弱的耦合组成的系统的 Lyapunov 指数，以有力的数值证据表明第一 Lyapunov 指数与耦合常数之间有普适的标度关系。

PACC: 0540

近 10 年来，人们对非线性映射及常微分方程系统的周期及混沌行为做了比较细致的研究，深刻地揭示了确定性系统中发生混沌运动的原因[1-3]。但是，对于同时涉及到时间和空间二者的混沌运动，人们仍然了解甚少。耦合映射就是为讨论时空混沌问题而引入的模型。

耦合映射模型可以从描述反应-扩散系统的偏微分方程导出[4]。本文讨论一维的耦合映射[5,6]

$$x_{n+1}(i)=(1-\varepsilon)f(x_n(i))+\frac{\varepsilon}{2}[f(x_n(i-1))+f(x_n(i+1))], \tag{1}$$

其中 $x_n(i)$ 表示 n 时刻 i 位置 $(i=1,2,\cdots,L-1,L)$ 的状态。 $\varepsilon\in[0,1]$ 为表征相邻映射之间耦合强度的参数。局域的映射定义为单峰的，即

$$f(x)=\mu x(1-x), \tag{2}$$

其中 $\mu\leqslant 4$ 为控制参数。我们假定周期边界条件为

$$x_n(0)=x_n(L),\ \forall n. \tag{3}$$

Lyapunov 指数为描述混沌运动的极其重要的量。 对于单个映射，Lyapunov 指数定义为

$$\lambda=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ln|f'(x_n)|, \tag{4}$$

其中 $f'(x)$ 表示 $f(x)$ 的导数。 $\lambda>0$ 意味着运动为混沌的，而 $\lambda<0$ 反映出运动为稳定的周期运动。对于耦合映射 (1) 式，有

$$dx_{n+1}(i)=(1-\varepsilon)f'(x_n(i))dx_n(i)+\frac{\varepsilon}{2}[f'(x_n(i-1))dx_n(i-1)$$
$$+f'(x_n(i+1))dx_n(i+1)]\equiv A_{ij}dx_n(j), \tag{5}$$

* 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目。
1) 中国科学院理论物理研究所，北京，100080。

这里采用了求和约定,即对重复的脚标从 1 到 L 求和。其中

$$A_{ij}=(1-\varepsilon)f'(x_n(i))\delta_{ij}+\frac{\varepsilon}{2}[f'(x_n(i-1))\delta_{i-1j}+f'(x_n(i+1))\delta_{i+1j}] \tag{6}$$

将沿轨道所计算的矩阵 A 连乘 N 次，得到矩阵 $A^{(N)}$，它有 L 个本征值 $r_N^{(1)},r_N^{(2)},\cdots,r_N^{(L)}$,

$$\lambda^{(i)}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln|r_N^{(i)}|,\quad i=1,2,\cdots,L, \tag{7}$$

就定义为耦合映射 (1) 式的 L 个 Lyapunov 指数。不妨假定它们按从大到小的顺序排列:

$$\lambda^{(1)}\geqslant\lambda^{(2)}\geqslant\cdots\geqslant\lambda^{(L)}, \tag{8}$$

那么 $\lambda\equiv\lambda^{(1)}$ 就称为第一 Lyapunov 指数。$\lambda>0$ 意味着耦合系统作混沌运动,而 $\lambda<0$ 意味着稳定的周期运动。在计算中,常常从任意给定的一组初值 $\{dx_0(i)\}$ 出发,由(5)式逐次计算 $\{dx_n(i)\}$。可以证明[7]

$$\lambda=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ln\frac{\|dx_n\|}{\|dx_{n-1}\|}, \tag{9}$$

即为第一 Lyapunov 指数,其中

$$\|dx_n\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{L}[dx_n(i)]^2} \tag{10}$$

为矢量 $\{dx_n(i)\}$ 的长度。

单峰迭代 (2) 式的行为强烈地依赖于参数 μ 的数值。对于区间 $[0,1]$ 上的初值 x_0，迭代 (2) 式把它们映射到区间 $[0,\mu/4]$。当 $\mu=4$ 时,迭代(2) 式成为“满迭代”[8,9].与 $\mu<4$ 的其它数值时相比较,满迭代具有充分发达的混沌行为,其 Lyapunov 指数最大,为

$$\lambda_0=\ln 2=0.6931\cdots \tag{11}$$

本文只讨论由满迭代组成的耦合系统。

本文的目的,是讨论第一 Lyapunov 指数 λ 随耦合强度 ε 的变化。为确定起见，取 $L=67$，采用随机初始条件，先经 2000 次迭代之后,再利用随后的 3000 次迭代通过 (9) 式计算第一 Lyapunov 指数。对每一个耦合强度 ε，都采用 500 组相互独立的随机初条件来计算,并把所得的结果取平均,以减少计算误差。计算结果表明，在耦合极弱的情况下，λ 与 ε 的关系可表示为

$$\lambda=\lambda_0+\kappa\varepsilon^{\frac{1}{2}}\quad \varepsilon\to 0, \tag{12}$$

其中 λ_0 由 (11) 式给出,而 $\kappa=-0.667$。计算结果见图 1。

为讨论标度关系 (12) 式的普适性,我们考虑其它具有二次极大值的满迭代

$$f(x)=\sin\pi x \tag{13}$$

和

$$f(x)=Bx(1-x)e^{\gamma x}\quad \gamma=-1, \tag{14}$$

以及

$$f(x)=Bx(1-x)(1+\gamma x)\quad \gamma=-0.5,1.0, \tag{15}$$

其中 B 的数值应使 $f(x)$ 的极大值为 1，以保证 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上为满迭代。对这四

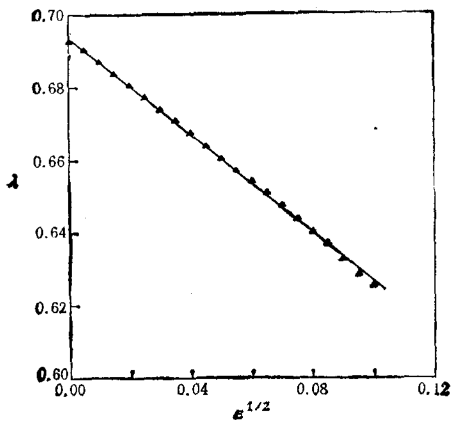

图 1 局域映射为 $f(x)=4x(1-x)$ 时，耦合映射系统的 λ 为 $\varepsilon^{1/2}$ 的线性函数

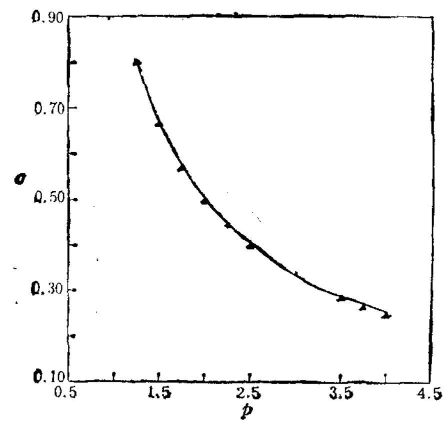

图 2 局域映射具有 p 次极大值时，标度指数 $\sigma=1/p$

种选择所做的计算表明，标度关系 (12) 式对它们都成立，只是 λ_0 和 κ 的数值随具体模型而变。

对于更普遍的情况，$f(x)$ 可以具有 p 次极大值

$$f(x)=1-|1-2x|^p \quad p>1. \tag{16}$$

所得的结果表明，(12) 式由下面的标度关系所代替：

$$\lambda=\lambda_0+\kappa\varepsilon^\sigma, \tag{17}$$

其中

$$\sigma=1/p. \tag{18}$$

对于一些 p 值的计算结果示于图 2 中。

我们强调，本文的结论是对于耦合迭代问题发现的与系统的尺寸 L 无关(只要它不很小，例如 $L>10$) 的一个标度关系，这一标度关系只适用于弱耦合的满迭代系统。

作者曾与胡岗教授进行了有益的讨论，在此表示感谢。

[1] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos*, (physik-Verlag, Weinheim, 1984).
[2] P. Cvitanović, *Universality in Chaos*, (Adam Hilger Ltd, Bristol, 1984).
[3] B. -L. Hao, *Chaos*, (World Scientific, Singapore, 1984).
[4] F. Kaspar and H. G. Schuster, *Phys. Lett.*, **A113**(1986), 451.
[5] K. Kaneko, *Phys. Lett.*, **A149**(1990), 105; *Prog. Theor Phys. Suppl.*, (99) (1989), 263; *Physica*, **D37**(1989), 60.
[6] T. Bohr and O. B. Christensen, *Phys. Rev. Lett.*, 63(1989), 2161.
[7] B. L. Hao, *Elementary Symbolic Dynamics*, (World Scientific Singapore, 1989).
[8] T. Bohr and Tamás Tél, *The thermodynamics of fractals*, in *Directions in Chaos*, vol 2, edi. by B.-L. Hao. (World Scientific, Singapore, 1988).
[9] P. Collet and J.-P. Eckmann, *Iterated Map of the Interval* (Birkhäuser, Boston, 1980).

SCALING BEHAVIOR IN WEAK-COUPLED COMPLETE MAPS

LÜ YAN-NAN DING E-JIANG[1)]

Institute of Low Energy Nuclear Physics, Beijing Normal University, Beijing, 100875

(Received 11 April 1991; revised manuscript received 4 October 1991)

ABSTRACT

The first Lyapunov exponent for a one-dimenssional unimodal map system with very weak coupling strength is calculated. The numerical results show that there is a universal scaling relation between the first Lyapunov exponent and the coupling strength.

PACC: 0540

1) *Institute of Theoretical Physics, Academic Sinica, Beijing,* 100080.