

劣腔情况失谐双光子光学双稳系统的原子压缩效应

赛·萨楚尔夫 胡 岗

北京师范大学物理系, 北京, 100875

1991 年 3 月 18 日收到

本文采用广义 Wigner 分布函数的 Fokker-Planck 方程的方法, 讨论了劣腔极限下失谐双光子光学双稳系统的原子压缩效应, 得到压缩区在失谐参数 $\Delta-\theta$ 平面的分布. 发现在足够大的原子失谐条件下, 原子算符 R_2 也可能出现压缩效应.

PACC: 4250

一、引 言

近年来, 量子压缩态的研究是量子光学领域中较为活跃的课题之一. 研究者在理论和实验方面已做了大量工作. 其中 Lugiato 等人利用量子统计方法, 对有信号注入的环形腔模型中的压缩现象作了较深入的研究^[1-3], 得到了许多重要的结果. 这些工作大多限于良腔情况的场压缩效应. 文献 [4] 把 Lugiato 等人的结果推广到 n 光子跃迁过程, 并讨论了谐振条件下劣腔情况原子变量的压缩效应. 迄今为止, 有关失谐量对原子算符压缩效应的影响还未涉及.

本文在上述工作的基础上, 考虑到注入场与腔模、原子能级之间存在失谐, 忽略 Stark 移动^[5], 讨论在劣腔情况下失谐量对双光子光学双稳过程中原子压缩量的影响. 我们发现, 在一定参数条件下, 原子算符 R_2 也可能出现压缩. 而在谐振条件下双光子光学双稳系统中, 原子算符 R_2 不会出现压缩^[4].

二、劣腔情况 $\langle k \rangle_{r_L, r_U}$ 的 Fokker-Planck 方程

考虑到信号与腔模、原子能级之间存在失谐的单光子过程的 Fokker-Planck 方程已在文献 [6] 和 [7] 中给出, 在忽略 Stark 移动的条件下, 按文献 [1] 的方法, 可求得失谐双光子过程的 Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} P(v, v^*, m, x, x^*, t) = \left\{ - \left\{ \frac{\partial}{\partial v} [-r_L((1+i\Delta)v - mx^2)] + c.c. \right\} \right. \\ \left. - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [-k((1+i\theta)x - y + 2Cvx^*)] + c.c. \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial m} \left\{ -r_{\parallel} \left[m + \sigma + \frac{1}{2} (v^2 x^2 + v x^{*2}) \right] \right\} \\
& + \frac{r_{\perp}^2}{kCN_s} \left[\frac{\partial^2}{\partial v \partial v^*} + \frac{6d^2}{4} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial}{\partial v} v + \frac{\partial}{\partial v^*} v^* \right) \right. \\
& \left. + \frac{d^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial m^2} (1 + \sigma m) \right] + \frac{k}{N_s} (1 + 2\bar{n}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial x^*} \} P(v, v^*, m, x, x^*, t), \quad (1)
\end{aligned}$$

式中 x 为规范化的场量, v, m 分别为规范化的原子变量.

$$\Delta = \frac{\omega_a - 2\omega_0}{r_{\perp}}, \quad \theta = \frac{\omega_c - \omega_0}{k}$$

分别为注入信号与原子能级、腔模之间的规范化失谐量. 泵浦参量 $-1 \leq \sigma \leq 1$, 当 $\sigma = -1$ 表示双稳过程, $0 < \sigma \leq 1$ 表示注入信号激光过程. 参量 $r_{\perp}, r_{\parallel}, k, C$ 的意义见文献 [8] 和 [9]. (1) 式与文献 [11] 中 (2) 式 $n = 2$ 时的情况相同.

由 (1) 式可求得定态方程为

$$v_s = -\frac{(1 - i\Delta)x_s^2}{1 + \Delta^2 + |x_s|^4}, \quad (2)$$

$$m_s = -\frac{\sigma(1 + \Delta^2)}{1 + \Delta^2 + |x_s|^4}, \quad (3)$$

$$y_s = x_s \left\{ \left(1 - \frac{2C\sigma|x_s|^2}{1 + \Delta^2 + |x_s|^4} \right) + i \left(\theta + \frac{2C\sigma\Delta|x_s|^2}{1 + \Delta^2 + |x_s|^4} \right) \right\}, \quad (4)$$

式中 v_s, m_s, x_s 分别表示 v, m, x 在定态的值. 因压缩表示式中仅出现 x_s , 而不出现 y , 为了讨论方便, 选择注入信号 y 的相位使场量 x_s 总为正值, 下面以 x_s 代换 $|x_s|$.

设场、原子变量在其定态值附近的涨落分别为

$$v' = v - v_s, \quad v^{*'} = v^* - v_s^*, \quad m' = m - m_s, \quad x' = x - x_s, \quad x^{*'} = x^* - x_s, \quad (5)$$

对 (1) 式作线性近似

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P(v', v^{*'}, m', x', x^{*'}, t) = & \left\{ \left[-\frac{\partial}{\partial v'} \left[-r_{\perp} \left((1 + i\Delta)v' - x_s^2 m' - 2m_s x' \right) \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + \text{c.c.} \right] + \left[-\frac{\partial}{\partial x'} \left\{ -k \left[(1 + i\theta)x' + 2Cx_s v' + 2Cv_s x^{*'} \right] \right\} + \text{c.c.} \right] \right\} \\
& - \frac{\partial}{\partial m'} \left\{ -r_{\parallel} \left[m' + x_s v_s^* x' + x_s v_s x^{*'} + \frac{1}{2} x_s^2 v' + \frac{1}{2} x_s^2 v^{*'} \right] \right\} \\
& + \frac{r_{\perp}^2}{kCN_s} \left[\frac{\partial^2}{\partial v' \partial v^{*'}} + \frac{\sigma d^2}{4} v_s \frac{\partial^2}{\partial m' \partial v'} + \frac{\sigma d^2}{4} v_s^* \frac{\partial^2}{\partial m' \partial v^{*'}} \right. \\
& \left. + \frac{d^2}{4} (1 + \sigma m_s) \frac{\partial^2}{\partial m'^2} \right] + \frac{k}{N_s} (1 + 2\bar{n}) \frac{\partial^2}{\partial x' \partial x^{*'}} \} P(v', v^{*'}, m', x', x^{*'}, t). \quad (6)
\end{aligned}$$

方程 (6) 在适当条件下可进行简化, 劣腔条件下场的弛豫率远大于原子的弛豫率 $k \gg r_{\perp}, r_{\parallel}$, 此时可用绝热近似方法消去场变量. 按 Gordon 方法^[12]绝热消去场变量, 得仅含原子变量的线性化的 Fokker-Planck 方程

$$r_{\perp}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} P(v', v^{*'}, m', t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial v'} (B_{\parallel} v' - B_{\perp} v^{*'} - x_s^2 m') \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2}{\partial v^{*'} } (-B_{21}v' + B_{22}v^{*'} - x'_i m') + \frac{\partial}{\partial m'} (B_{31}v' + B_{32}v^{*'} + dm') \\
& + R \left(H_1 \frac{\partial^2}{\partial v'^2} + H_2 \frac{\partial^2}{\partial v^{*'}^2} + H_3 \frac{\partial^2}{\partial v' \partial v^{*'}} + H_4 \frac{\partial'}{\partial m' \partial v'} \right. \\
& \left. + H_5 \frac{\partial^2}{\partial m' \partial v^{*'}} + H_6 \frac{\partial^2}{\partial m'^2} \right) \} P(v', v^{*'}, m', t), \quad (7)
\end{aligned}$$

式中

$$B_{11} = q + \frac{4Cp^* x'_i m_i}{(|p|^2 - 4C^2 |v_i|^2)}, \quad (8)$$

$$B_{12} = \frac{8C^2 x'_i m_i v_i}{(|p|^2 - 4C^2 |v_i|^2)}, \quad (9)$$

$$B_{31} = d \left[\frac{1}{2} x'_i + \frac{(4C^2 x'_i |v_i|^2 - 2Cp^* x'_i v_i^*)}{(|p|^2 - 4C^2 |v_i|^2)} \right], \quad (10)$$

$$B_{21} = B_{12}^*, \quad B_{22} = B_{11}^*, \quad B_{32} = B_{31}^*. \quad (11)$$

$$R = \frac{-\hbar^2}{kCN_i}, \quad (12)$$

$$H_1 = -(1 + 2\bar{n}) \frac{8C^2 p^* x'_i m_i v_i}{(|p|^2 - 4C^2 |v_i|^2)^2}, \quad (13)$$

$$H_3 = 1 + (1 + 2\bar{n}) \frac{4C x'_i m_i (|p|^2 + 4C^2 |v_i|^2)}{(|p|^2 - 4C^2 |v_i|^2)^2}, \quad (14)$$

$$H_4 = \frac{d}{4} \left\{ \sigma d v_i + (1 + 2\bar{n}) \frac{8C x'_i m_i [4Cp^* |v_i|^2 - (|p|^2 + 4C^2 |v_i|^2) v_i]}{(|p|^2 - 4C^2 |v_i|^2)^2} \right\}, \quad (15)$$

$$H_6 = \frac{d^2}{4} \left\{ 1 + \sigma m_i + (1 + 2\bar{n}) \frac{4C x'_i |v_i|^2 [|p|^2 + 4C^2 |v_i|^2 - 2Cp v_i - 2Cp^* v_i^*]}{(|p|^2 - 4C^2 |v_i|^2)^2} \right\}, \quad (16)$$

$$H_2 = H_1^*, \quad H_5 = H_3^*, \quad (17)$$

$$p = 1 + i\theta, \quad q = 1 + i\Delta. \quad (18)$$

当 $\Delta = \theta = 0$ 时, (8)–(10), (12)–(16) 式正是文献 [4] 中 (12)–(14d) 式 $n = 2$ 的情况。

三、原子压缩量的解析表示

原子涨落量的定态期待值可表示为 $\langle \delta\theta\delta\theta^+ \rangle_s$, $\langle (\delta\theta)^2 \rangle$, $\langle (\delta\theta^+)^2 \rangle$ 等, 其中下标 s 代表对称表示, 定义为

$$\langle \delta\theta\delta\theta^+ \rangle_s = \frac{\langle \delta\theta\delta\theta^+ \rangle + \langle \delta\theta^+\delta\theta \rangle}{2}.$$

利用 (7) 式可求出涨落量的定态值满足

$$BV = RH, \quad (19)$$

式中

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & -B_{12} & -x_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & -B_{21} & 0 & -x_i^2 & 0 \\ -B_{21} & -B_{12} & (B_{11} + B_{22}) & -x_i^2 & -x_i^2 & 0 \\ B_{31} & 0 & B_{32} & (B_{11} + d) & -B_{12} & -x_i^2 \\ 0 & B_{32} & B_{31} & -B_{21} & (B_{22} + d) & -x_i^2 \\ 0 & 0 & 0 & B_{31} & B_{32} & d \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$V = \begin{pmatrix} \langle(\delta\theta)^2\rangle \\ \langle(\delta\theta^+)^2\rangle \\ \langle(\delta\theta\delta\theta^+)\rangle_s \\ \langle(\delta\theta\delta\hat{m})\rangle_s \\ \langle(\delta\theta^+\delta\hat{m})\rangle_s \\ \langle(\delta\hat{m})^2\rangle \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

若在(19)式中令 $R = 1$, 设所得相应方程组的解为 Y

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

由(19),(21),(23)式可推得

$$V = RY, \quad (24)$$

那么

$$\langle(\delta\theta)^2\rangle = RY_1, \quad \langle(\delta\theta^+)^2\rangle = RY_2, \quad \langle(\delta\theta\delta\theta^+)\rangle_s = RY_3. \quad (25)$$

定义

$$R_1 = \frac{1}{2}(R^+ + R^-), \quad R_2 = \frac{1}{2i}(R^+ - R^-), \quad (26)$$

对易关系为

$$[R_1, R_2] = iR_3. \quad (27)$$

$R^- = -\left(\frac{N}{2}\sqrt{d}\right)\theta$, $R^+ = -\left(\frac{N}{2}\sqrt{d}\right)\theta^+$, $R_3 = -\left(\frac{N}{2}\right)^{-1}\hat{m}$ 为原子集体算符^[3].

由(26)式可得

$$\langle(\delta R_1)^2\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \langle\delta R^+ \delta R^-\rangle_s + \frac{1}{2} [\langle(\delta R^+)^2\rangle + \langle(\delta R^-)^2\rangle] \right\}, \quad (28)$$

$$\langle(\delta R_2)^2\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \langle\delta R^+\delta R^-\rangle, - \frac{1}{2} [\langle(\delta R^+)^2\rangle + \langle(\delta R^-)^2\rangle] \right\}, \quad (29)$$

当 $\langle(\delta R_1)^2\rangle < \frac{1}{2} |\langle R_3\rangle|$ 或 $\langle(\delta R_2)^2\rangle < \frac{1}{2} |\langle R_3\rangle|$ 时,我们认为原子算符 R_1 或 R_2 产生压缩效应^[4]. 原子算符的压缩量为

$$\begin{aligned} \langle(\delta R_1)^2\rangle - \frac{1}{2} |\langle R_3\rangle| &= \frac{1}{2} \left\{ \langle\delta R^+\delta R^-\rangle, + \frac{1}{2} [\langle(\delta R^+)^2\rangle + \langle(\delta R^-)^2\rangle] \right\} \\ &- \frac{1}{2} |\langle R_3\rangle| = \frac{N}{2} \left\{ Y_3 + \frac{1}{2} (Y_1 + Y_2) - \frac{1}{2} |m_s| \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \langle(\delta R_2)^2\rangle - \frac{1}{2} |\langle R_3\rangle| &= \frac{1}{2} \left\{ \langle\delta R^+\delta R^-\rangle, - \frac{1}{2} [\langle(\delta R^+)^2\rangle + \langle(\delta R^-)^2\rangle] \right\} \\ &- \frac{1}{2} |\langle R_3\rangle| = \frac{N}{2} \left\{ Y_3 - \frac{1}{2} (Y_1 + Y_2) - \frac{1}{2} |m_s| \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

式中 Y_1, Y_2, Y_3 表示式中都包含失谐量,由(25)式知 Δ, θ 的出现对定态原子涨落量产生影响. 从而改变原子算符 R_1, R_2 的涨落性质,这无疑提供了一种可能,即在适当调节参量 C, Δ, θ 时,双光子光学双稳系统中原子的压缩行为可能会随之发生某种变化,例如: 可能导致压缩方向的旋转. 下面将采用数值计算方法,详细分析原子算符 R_1, R_2 的压缩量的变化.

四、原子压缩量的数值解

方程(19)原则上可完全解析求解,但由于运算较繁杂,难以直接从解析式中清楚地看出原子压缩性质随失谐量的变化,所以本节借助数值运算来表现(30),(31)式的结果. 需要指出的是,讨论中涉及的定态为稳定态,关于定态稳定性的判断方法见文献[8—10].

在(30),(31)式中取 $\sigma = -1$ (无泵浦过程), $\bar{n} = 0$ (无热噪声), $d = 2$ (纯辐射阻尼),适当选取参量 C, Δ, θ 的值,由图1至图4给出

$$\langle(\delta R_1)^2\rangle - \frac{1}{2} |\langle R_3\rangle|, \quad \langle(\delta R_2)^2\rangle - \frac{1}{2} |\langle R_3\rangle|$$

的变化曲线.

图1(a)为 $C = 0.8, \theta = 0, \Delta$ 分别取不同的值 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 时

$$\langle(\delta R_1)^2\rangle - \frac{1}{2} |\langle R_3\rangle|$$

随 x_s 的变化曲线. 很明显在 $\Delta < 1$ 范围内增大 Δ 时,原子算符 R_1 的压缩量迅速减小,产生原子压缩效应的场量 x_s 取值范围也随之减小, $\Delta \geq 1$ 压缩效应完全消失,所以增大 $|\Delta|$ 趋向于减弱和取消 R_1 的压缩效应.

图1(b)为 $C = 0.8, \theta = 0, \Delta$ 分别取不同的值 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 时

$$\langle(\delta R_2)^2\rangle - \frac{1}{2} |\langle R_3\rangle|$$

随 x_s 的变化曲线. 由图可知原子算符 R_2 在足够大的 Δ 时会出现压缩效应. 当 $\Delta > 1$

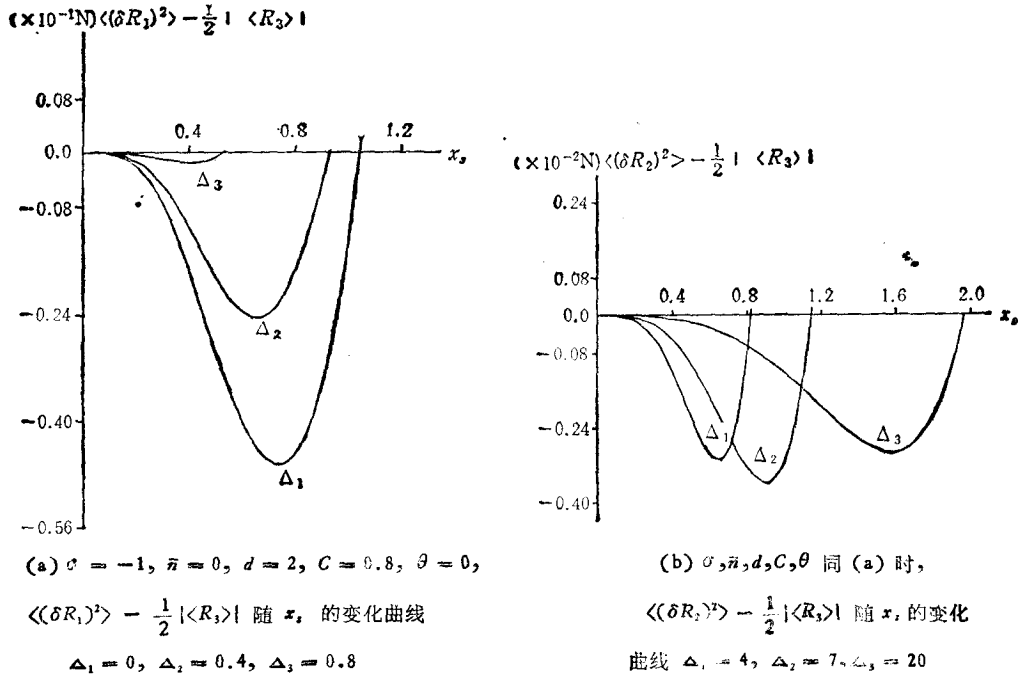


图 1

时随 Δ 的增大, R_2 的压缩量由小增至极大值后又变小. 产生压缩效应的场量 x_2 取值范围随 Δ 的增大而变宽. 原子算符 R_2 的压缩效应是考虑到失谐得到的有意义的结果. 在谐振情况下, R_2 无压缩效应^[4].

图 2 为 $C = 0.8, \Delta = 0, \theta$ 分别取不同的值 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 时

$$\langle(\delta R_2)^2\rangle - \frac{1}{2}|<R_3>|$$

随 x_2 的变化曲线. 显然 $\theta < 1.3$ 时, 原子算符 R_1 的压缩量随 θ 增大而变小. $\theta > 1.3$ 时 R_1 的压缩量随 θ 增大也变大. θ 足够大时, R_1 的压缩量及产生压缩的场量 x_2 取值范围分别趋于某一定值, 此时压缩量仍小于谐振时的值.

图 3(a) 为 $C = 0.8, \Delta$ 分别取不同的值 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 时

$$\left[\langle(\delta R_1)^2\rangle - \frac{1}{2}|<R_3>| \right]_{\min}$$

随 θ 的变化曲线.

$$\left[\langle(\delta R_1)^2\rangle - \frac{1}{2}|<R_3>| \right]_{\min}$$

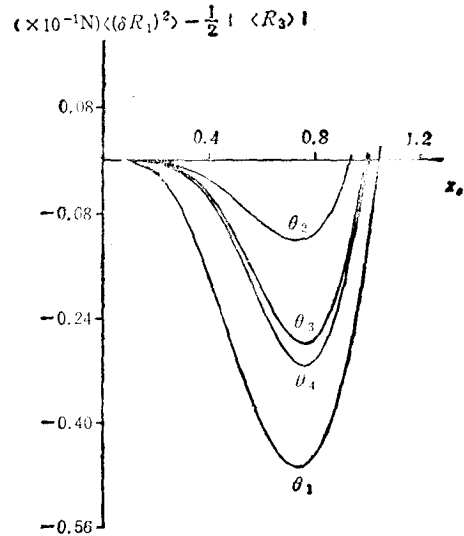
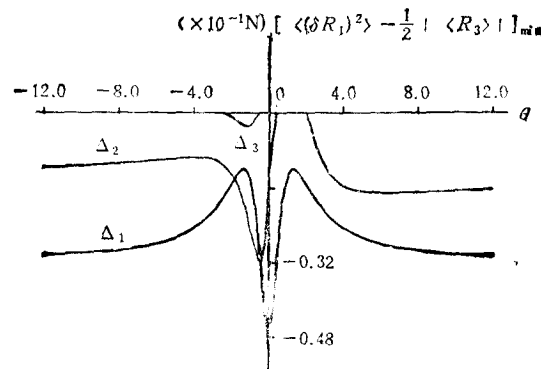


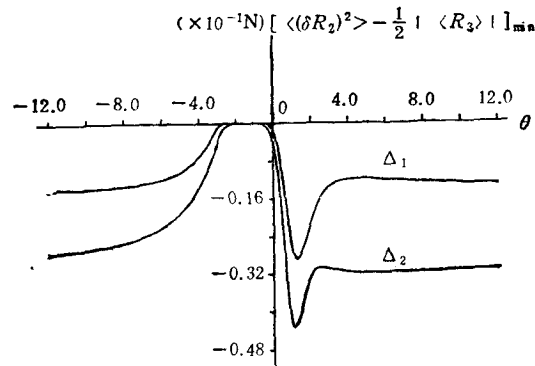
图 2 σ, \bar{n}, d, C 同图 1(a), $\Delta = 0$ 时,
 $\langle(\delta R_1)^2\rangle - \frac{1}{2}|<R_3>|$
 随 x_2 的变化曲线 $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1.3,$
 $\theta_3 = 6, \theta_4 = 50$

为取定 Δ, θ 值时, $\langle (\delta R_1)^2 \rangle - \frac{1}{2} |\langle R_3 \rangle|$ 随 x_i 变化所取的极小值。由图知随 Δ 值的增大, 原子算符 R_1 出现最大压缩量对应的失谐量 θ 值, 向 $\theta < 0$ 的方向移动, 同时 R_1 出现压缩的失谐量 θ 取值范围变小。

图 3(b) 为 $C = 0.8$, Δ 分别取不同的值 Δ_1, Δ_2 时, $\left[\langle (\delta R_2)^2 \rangle - \frac{1}{2} |\langle R_3 \rangle| \right]_{\min}$ 随 θ 的变化曲线。由图知 $\Delta < 8.5$ 时随着 Δ 的增大, 出现在 $\theta \approx 1$ 处的原子算符 R_2 的最大压缩量也随之增大。当 $\Delta \geq 8.5$ 时随 Δ 的增大, 最大压缩量的值略微减小, 出现压缩的失谐量 θ 的取值范围不变。



(a) σ, d, \bar{n}, C 同图 1(a) 时, $\left[\langle (\delta R_1)^2 \rangle - \frac{1}{2} |\langle R_3 \rangle| \right]_{\min}$ 随 θ 的变化曲线
 $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0.5, \Delta_3 = 2$



(b) σ, \bar{n}, d, C 同图 1(a) 时, $\left[\langle (\delta R_2)^2 \rangle - \frac{1}{2} |\langle R_3 \rangle| \right]_{\min}$ 随 θ 的变化曲线
 $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = 8.5$

图 3

图 4 为 $C = 0.8$ 时, 原子算符 R_1, R_2 的压缩区在 $\Delta-\theta$ 参数平面上的分布图。压缩区在 $\Delta-\theta$ 平面上关于原点对称分布。 R_1 在区域 I 中出现压缩, R_2 在区域 II 中出现压缩。 $\Delta-\theta$ 图中的原点即是谐振情况, 此时仅 R_1 出现压缩。

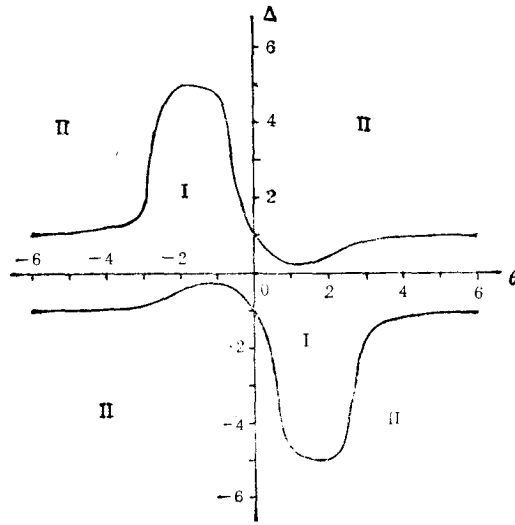


图4 σ, \bar{n}, d, C 同图 1(a) 时, 原子算符 R_1, R_2 的压缩区在 $\Delta-\theta$ 平面上的分布

谐振条件下双光子光学双稳系统中, 原子算符 R_1 可出现压缩效应. 本文在考虑到失谐量后, 得出在一定条件下, 原子算符 R_2 也可能出现压缩的结论. 并且发现在 R_2 产生压缩的过程中, 失谐量 Δ, θ 的作用不同, 其中原子失谐量起着尤为重要的作用. 只有在足够大的原子失谐量 $|\Delta|$ 时, R_2 才会产生压缩效应(见图 4). 在一定条件下压缩效应从 R_1 分量向 R_2 分量的转移, 反应了在失谐条件下压缩方向的某种旋转. 然而由于失谐量的出现使压缩表达式变得非常复杂, 对这种旋转的物理机制的分析是非常困难的, 这显然是有待进一步探讨的问题. 由失谐情况下, 原子算符呈现出的压缩行为, 我们可推断劣腔情况下, 腔内场量也一定会表现出丰富的非经典行为. 关于这一点将在以后的工作中讨论.

- [1] L. A. Lugiato, *Theory of Optical Bistability*, in *Progress in Optics XXI*, ed. by E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, (1984), p. 71.
- [2] L. A. Lugiato, G. Strini, *Opt. Comm.*, **41**(1982), 374.
- [3] L. A. Lugiato, F. Casagrande, L. Pizzuto, *Phys. Rev.*, **A26**(1982), 3438.
- [4] 张林、林仁明、黄思先, *物理学报*, **37**(1988), 1438
- [5] P. Galatola, L. A. Lugiato, M. Vadamchino, *Opt. Comm.*, **69**(1989), 414.
- [6] P. D. Drummond, D. F. Walls, *Phys. Rev.*, **A23**(1981), 2563.
- [7] F. Castelli, L. A. Lugiato, M. Vadamchino, *Nuovo Cimento*, **10D**(1988), 183.
- [8] G. Hu, G. J. Yang, *Phys. Rev.*, **A38**(1988), 1979.
- [9] G. J. Yang, G. Hu, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 2514.
- [10] G. Hu, C. Z. Ning, H. Haken, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 2702.
- [11] 张林、林仁明, *物理学报*, **39**(1990), 1714.
- [12] J. P. Gordon, *Phys. Rev.*, **161**(1967), 367.

THE ATOM SQUEEZING EFFECT FOR OFF-RESONANT TWO-PHOTON OPTICAL BISTABILITY IN BAD-CAVITY CASE

S. SACHUIF HU GANG

Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing, 100875

(Received 18 March 1991)

ABSTRACT

The atom squeezing effect for off-resonant two-photon optical bistability in bad-cavity limit is studied by means of Fokker-Planck equation of the generalized Wigner distribution. The distribution of the squeezing region in Δ - θ plane is described. As atom-detuning is sufficiently large, the squeezing effect of the atom operator R_2 may appear.

PACC: 4250