

约束系统正则形式的对称性质*

李 子 平¹⁾

北京工业大学应用物理系, 北京 100022

1991 年 5 月 9 日收到

本文导出场论中用奇异拉氏量描述的系统正则形式的广义 Noether 第一定理 (GNFT), 导出无限连续群下变更性系统正则形式的广义 Noether 恒等式 (GNI), 讨论了它们在 Dirac 约束理论中的应用. 给出一个新的反例, 说明 Dirac 猜想失效, 指出某些变更性系统也具有 Dirac 约束, 讨论了 GNI 在色动力学中的应用.

PACC: 1130; 1110; 0320

一、引 言

对奇异拉氏量系统正则形式的研究始于 Dirac^[1], 该系统在相空间中存在固有约束, 这样的约束 Hamilton 系统在物理学许多领域中广泛存在. Dirac 约束理论在场论中 (杨-Mills 理论、引力理论、超对称和超引力、弦(膜)场论等等) 占重要地位, 然而该理论中的许多基本问题至今仍不断地、广泛地讨论. 例如, 对 Dirac 猜想的回答就一直有争议. 本文研究约束 Hamilton 系统在相空间中的对称性质, 这有助于分析系统的 Dirac 约束.

动力学系统对称性质的研究, 通常是基于 Lagrange 体制, 在位形空间中来进行分析的, 经典 Noether 定理及其推广, 例如作者将 Noether 第一定理推广到非保守非完整系统^[2,3], 将 Noether 第二定理 (或 Noether 恒等式) 推广到变更性 (或非不变性) 系统^[4], 均是在位形空间中讨论的. 而动力学系统的量子化却是基于正则形式, 近来弦场论中用正则形式描述更显示出其优越之处 (如对 Virasoro 条件的讨论)^[5]. 由于奇异拉氏量系统在相空间中存在约束, 为了进一步分析约束 Hamilton 系统的正则结构和约束的性质, 研究该约束系统在相空间中的对称性质, 是十分必要的. 对于正规拉氏量描述的有限自由度系统, 在相空间中有限连续群下对称性的讨论, 已由 Djukic 给出^[6], 对于奇异拉氏量描述的系统, 在相空间中有限连续群和无限连续群下的对称性分析, 文献[7]已有研究, 含高阶微商奇异拉氏量的情况也已考虑^[8]. 本文是继文献[7,8]的研究, 将其结果推广到场论情况, 重新给出一个 Dirac 猜想的反例, 讨论某些非不变性系统可能存在的 Dirac 约束, 给出 GNI 在色动力学中的应用. 正则形式对称性的分析, 使我们可获得 Dirac 约束和有关 Lagrange 乘子更多的信息.

* 北京市自然科学基金资助的课题.

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室)协联成员.

二、正则形式的广义 Noether 第一定理

设动力学系统的运动由态函数 $\phi^\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) 来描述, α 为态函数分量指标, 在经典力学中, α 为广义坐标的指标; 在连续介质力学中, α 为位移分量指标; 在场论中, α 代表旋量、张量或同位旋、么旋指标; x 为四维时空点, $x = (t, \mathbf{r})$. 平坦时空度规为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, 记 $\phi_{;\mu}^\alpha = \partial_\mu \phi^\alpha \left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)$. 设场的拉氏量密度

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^\alpha, \phi_{;\mu}^\alpha)$ 不显含时空坐标. 场的拉氏量为 $\phi^\alpha, \phi_{;\mu}^\alpha$ 的泛函^[9], 为

$$L[\phi^\alpha, \phi_{;\mu}^\alpha] = \int_V d^3x \mathcal{L}. \quad (1)$$

用 Legendre 变换引入场的正则动量密度 $\pi_\alpha = \delta L / \delta \dot{\phi}^\alpha$, 并定义场的哈氏量

$$H[\phi^\alpha, \pi_\alpha] = \int_V d^3x \mathcal{H} = \int_V d^3x (\dot{\phi}^\alpha \pi_\alpha - \mathcal{L}). \quad (2)$$

可将场的 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述. 重复指标代表求和. 由于奇异拉氏量的 Hess 矩阵 $(H_{\alpha\beta})$ 是退化的

$$\det(H_{\alpha\beta}) = \det(\delta^2 L / \delta \dot{\phi}^\alpha \delta \dot{\phi}^\beta) = 0, \quad (3)$$

因而由正则动量密度的定义, 不能全部解出 $\dot{\phi}^\alpha$ 作为 ϕ^α 和 π_α 的函数. 设 Hess 矩阵的秩为 $N-R$, 则正则变量间存在 R 个约束条件

$$\phi_a^0(\phi^\alpha, \pi_\alpha) = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, R), \quad (4)$$

称这些约束为初级约束 (PC). 此约束 Hamilton 系统的运动方程为

$$\dot{\phi}^\alpha = \delta H_t / \delta \pi_\alpha = \{\phi^\alpha, H_t\}, \quad (5a)$$

$$\dot{\pi}_\alpha = -\delta H_t / \delta \phi^\alpha = \{\pi_\alpha, H_t\}, \quad (5b)$$

其中 H_t 为总哈氏量,

$$H_t = H + H' = \int_V d^3x (\mathcal{H} + \lambda^a \phi_a^0), \quad (6)$$

$\lambda^a(x)$ 为拉氏乘子, $\{\cdot, \cdot\}$ 代表场论中的 Poisson 括号

$$\{u, v\} = \int_V d^3x \left(\frac{\delta u}{\delta \phi^\alpha} \frac{\delta v}{\delta \pi_\alpha} - \frac{\delta u}{\delta \pi_\alpha} \frac{\delta v}{\delta \phi^\alpha} \right). \quad (7)$$

系统的正则作用量为

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L_p dt = \int_Q d^4x \mathcal{L}_p = \int_Q d^4x (\pi_\alpha \dot{\phi}^\alpha - \mathcal{H}). \quad (8)$$

考虑时空坐标和正则变量的有限连续群 G_r 下, 约束 Hamilton 系统的变换性质, 其无穷小变换为

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \delta x_\mu = x_\mu + \varepsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x, \phi^\alpha, \pi_\alpha), \\ \phi'^\alpha(x') &= \phi^\alpha(x) + \delta \phi^\alpha(x) = \phi^\alpha(x) + \varepsilon_\sigma \xi^{\alpha\sigma}(x, \phi^\alpha, \pi_\alpha), \\ \pi'_\alpha(x') &= \pi_\alpha(x) + \delta \pi_\alpha(x) = \pi_\alpha(x) + \varepsilon_\sigma \eta_\alpha^\sigma(x, \phi^\alpha, \pi_\alpha), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 ε_σ ($\sigma = 1, 2, \dots, r$) 为无穷小任意参数. 假设在变换 (9) 式下, $\mathcal{L}_p$ 的改变为 $\delta \mathcal{L}_p = \partial_\mu \Lambda^\mu$ (称为规范变更), 而 $\Lambda^\mu = \varepsilon_\sigma \Lambda^{\mu\sigma}$. 由 (8) 和 (9) 式, 有

$$\frac{\delta I}{\delta \pi_a} \delta \pi_a + \frac{\delta I}{\delta \phi^a} \delta \phi^a + \partial_\mu (\mathcal{L}_p \delta x^\mu) + \frac{d}{dt} (\pi_a \delta \phi^a) = \partial_\mu \Lambda^\mu, \quad (10)$$

其中

$$\delta I / \delta \pi_a = \dot{\phi}^a - \frac{\delta H}{\delta \pi_a}, \quad \delta I / \delta \phi^a = -\dot{\pi}_a - \frac{\delta H}{\delta \phi^a}, \quad (11)$$

$$\bar{\delta} \pi_a = \delta \pi_a - \pi_{a,\mu} \delta x^\mu, \quad \bar{\delta} \phi^a = \delta \phi^a - \phi_{,\mu}^a \delta x^\mu. \quad (12)$$

假设约束方程(4)在变换(9)式下的改变为 $\delta \phi_a^0 = K_a = \varepsilon_a K_a^0$, 那么

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \phi_a^0 &= \frac{\partial \phi_a^0}{\partial \pi_a} \delta \pi_a + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial \phi^a} \delta \phi^a = K_a - \frac{\partial \phi_a^0}{\partial \pi_a} \pi_{a,\mu} \delta x^\mu - \frac{\partial \phi_a^0}{\partial \phi^a} \phi_{,\mu}^a \delta x^\mu \\ &= F_a = \varepsilon_a F_a^0. \end{aligned} \quad (13)$$

利用拉氏乘子 λ^a , 结合(10)和(13)式, 由约束 Hamilton 系统的运动方程(5), 得

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_p \delta x^\mu - \Lambda^\mu) + \frac{d}{dt} (\pi_a \delta \phi^a) = \lambda^a F_a. \quad (14)$$

这样就得到正则形式的广义 Noether 第一定理 (GNFT): 如果在变换(9)式下, $\mathcal{L}_p$ 为规范变更的, 且约束方程(4)的变更适合 $F_a^0 = 0$, 那么, 此约束 Hamilton 系统存在 r 个守恒律

$$\int_V d^3x (\pi_a \dot{\xi}^{a\sigma} - H \tau^{0\sigma} - \Lambda^{0\sigma}) = \text{const} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r). \quad (15)$$

这个结果是文献[7,8]在场论中的推广。

值得指出的是: 守恒律(15)式中不含(9)式中的 η_a^0 . 这是由于根据正则动量的定义, 由 $x_\mu, \phi^a(x)$ 的变换可确定 $\dot{\phi}^a(x)$ 和 $\pi_a(x)$ 的变换, 即 η_a^0 可作为 $\tau^{\mu\sigma}, \xi^{a\sigma}$ 的函数。

在内部变换 ($\delta x_\mu = 0$) 情形, 条件 $F_a^0 = 0$, 表明约束条件在变换下是不变的; 在一般情形下 ($\delta x_\mu \neq 0$), 条件 $F_a^0 = 0$ 则表明约束条件(4)式在变换(9)式所确定的实质变分下不变。

三、Dirac 猜 想

按 Dirac-Bergmann 程序, 由初级约束的相容性条件, 可导出次级约束, 次级约束的相容性条件, 可逐次给出其他次级约束

$$\phi_k^1 = \{\phi_i^1, H_i\} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

直至 ϕ_k^m 适合

$$\phi_k^{m+1} = \{\phi_k^m, H_i\} = C_{ab}^k \phi_b^1 \quad (k \leq m) \quad (17)$$

为止。全部约束可分为两类, 如果一个约束 ϕ_a 对任意的 ϕ_b 均适合 $\{\phi_a, \phi_b\} = 0 \pmod{\phi_c}$, 则称 ϕ_a 为第一类约束, 否则为第二类约束。

Dirac 在他发展的广义正则形式理论中, 他猜想所有次级第一类约束均是系统独立的规范生成元, 它们生成物理态间的等价变换^[10]。如果这个猜想成立, 那么具有初级 $\phi_a^0 (a = 1, 2, \dots, r)$ 和次级第一类约束 $\chi_b (b = 1, 2, \dots, s)$ 的系统, 其运动方程应该由扩展的哈氏量

$$H_c = H + \lambda^a \phi_a^0 + \mu^b \chi_b \quad (18)$$

来导出, 其中 μ^b 为拉氏乘子. 长期以来, 关于 Dirac 猜想一直不断有争议^[11-15]. 若干个“反例”也已给出^[16-18]. 所有这些争议均是基于考察从扩展哈氏量 H 导出的运动方程并不一定与相应的 Lagrange 方程等价. 近来已指出, Cawley 等人的“反例”(他们采用了约束线性化)不是真正的反例^[19]. 这里基于对系统对称性的分析, 来考察用扩展哈氏量 H . 经由正则形式的 Noether 定理导致的结果是否与在 Lagrange 体制下, 经由经典 Noether 定理导出的结果一致, 来分析 Dirac 猜想是否成立. 我们曾举出一个反例^[7], 说明 Dirac 猜想失效. 在我们的讨论中, 与 Allcock, Cawley 等人不同, 未将约束进行线性化. (因为将约束线性化会导致强等和弱等概念之间的混淆.) 在我们的例子中, 仍然有些问题需进一步讨论. 首先, 在文献[7]中形式地导出的守恒律, 如果利用 Lagrange 方程, 该守恒律平凡地等于零. 其次, 如果将文献[7]中例子里的约束线性化, 那么约束将变为第二类, 而第二类约束按 Dirac 猜想本来就不是规范生成元, 因此该例中将约束线性化之后与 Dirac 猜想不矛盾. 将约束线性化, 已为一些作者所采用, 关于约束线性化问题也是有争议的. Dirac 猜想涉及到约束系统的运动方程究竟应由那个量 (H_t 或 H_c) 来导出这样一个根本性问题, 有必要再做进一步讨论. 为了避免上述情况, 举出如下的反例. 为了简单起见, 考虑一个有限自由度系统的反例, 推广到场论模型是比较直接的.

设系统的拉氏量为

$$L = \dot{x}_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_1 - \dot{x}_3 - \dot{x}_6) + x_2(x_1^2 + x_1 - x_3^2 - x_6^2), \quad (19)$$

相应于 $x_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 的正则动量分别为

$$p_1 = \dot{x}_3 + \dot{x}_1 - \dot{x}_3 - \dot{x}_6, \quad (20a)$$

$$p_2 = 0, \quad (20b)$$

$$p_3 = 2\dot{x}_1\dot{x}_3, p_4 = 2\dot{x}_1\dot{x}_4, \quad (20c)$$

$$p_5 = -2\dot{x}_1\dot{x}_5, p_6 = -2\dot{x}_1\dot{x}_6. \quad (20d)$$

广义速度 $\dot{x}_1$ 可表为

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2} p_1^{-1/2} (p_3^2 + p_4^2 - p_5^2 - p_6^2)^{1/2}. \quad (21)$$

系统的正则哈氏量为

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}_1 p_1 + \dot{x}_2 p_2 + \dot{x}_3 p_3 + \dot{x}_4 p_4 + \dot{x}_5 p_5 + \dot{x}_6 p_6 - L \\ &= p_1^{1/2} (p_3^2 + p_4^2 - p_5^2 - p_6^2)^{1/2} - x_2 (x_1^2 + x_1 - x_3^2 - x_6^2). \end{aligned} \quad (22)$$

初级约束

$$\phi = p_2 \approx 0, \quad (23)$$

其中记号 $\approx$ 代表弱等^[10], 表示等式在约束超曲面上成立. 初级约束 ϕ 的相容性条件给出次级约束

$$\chi_1 = \{\phi, H_t\} = x_1^2 + x_1 - x_3^2 - x_6^2 \approx 0, \quad (24)$$

其中 $H_t = H + \lambda \phi$, λ 为拉氏乘子. 由于

$$\{\chi_1, H_t\} = \dot{x}_1^{-1} (x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6), \quad (25)$$

只要 $x_1 \neq \text{const}$, 次级约束 χ_1 的相容性条件, 给出次级约束

$$\chi_2 = x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6 \approx 0. \quad (26)$$

又由于

$$\{\chi_2, H_1\} \approx p_1^{1/2}(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_6^2) = 2x_1 p_1. \quad (27)$$

只要 $x_1 \neq \text{const}$, 次级约束 χ_2 的相容性条件, 给出次级约束

$$\chi_3 = p_1 \approx 0, \quad (28)$$

系统再无其它约束。全部约束 $\phi, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ 均为第一类约束。

拉氏量 L_p 和初级约束 ϕ 在 (x_3, x_4) 面内和 (x_5, x_6) 面内的转动下是不变的。由正则形式 GNFT (15) 式, 可导致相应的守恒量, 这与由 Lagrange 体制由经典 Noether 第一定理所得的结果一致。但是如果按 Dirac 猜想将所有次级第一类约束均计入, 从 H_1 出发, 是不能用正则形式的 GNFT 得到与经典 Noether 定理相同的结果的。Dirac 猜想在这个例子中失效。在这个例子中, 无法将约束再做线性化, 根本涉及不到约束线性化问题。此外, 写出 $x_j (j=3, 4, 5, 6)$ 的 Lagrange 方程, 虽然它们的形式相同, 但 x_j 可以有不同的初值, 因此 x_j 的 Lagrange 方程的解可能是不同的, 这样上述转动不变性导致的守恒律不是平凡地等于零。

如果按照规范变换生成元的构造程序^[12], 不难求出上述例子的规范生成元

$$G = -\varepsilon p_1 + \dot{\varepsilon}(x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6) - \ddot{\varepsilon}(x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2) + \bar{\varepsilon} p_2,$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon(t)$ 为任意函数, 由 G 产生的变换为

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \{x_1, G\} = -\varepsilon(t), \delta x_2 = \bar{\varepsilon}(t), \delta x_j = x_j \dot{\varepsilon}(t) \quad (j=3, 4, 5, 6), \\ \delta p_1 &= \{p_1, G\} = 0, \delta p_2 = 0, \delta p_k = -p_k \dot{\varepsilon}(t) + 2x_k \ddot{\varepsilon}(t) \quad (k=3, 4), \\ \delta p_l &= -p_l \dot{\varepsilon}(t) - 2x_l \ddot{\varepsilon}(t) \quad (l=5, 6). \end{aligned} \quad (29)$$

在(29)式的变换下, 系统的拉氏量是非规范变更的。因为这里不存在 χ^* -型约束^[12], 所以同时也给出 Castellani 结果的反例。

四、正则形式的广义 Noether 恒等式

在有质量的 Yang-Mills 场论中(拉氏量中引入质量项), 在规范变换下其拉氏量一般是变更的; Fermi 场和规范场的规范不变拉氏量在 Fermi 场的手征变换下是非不变的; BRS 不变的拉氏量, 在规范场的单独变换下也非不变。因此研究局域变换下非不变系统的性质是必要的。这里讨论系统在正则形式下的无限连续群 G_∞ 下的性质, 这时导致正则形式的广义 Noether 恒等式, 在量子场论中相应于 Ward-Takahashi 恒等式。

考虑正则形式的无穷小变换

$$\begin{aligned} x^{\mu'} &= x^\mu + R_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma(x) = x^\mu + A_\sigma^{\mu\nu} \partial_{\nu_k} \varepsilon^\sigma(x), \\ \phi^{a'}(x') &= \phi^a(x) + S_\sigma^a \varepsilon^\sigma(x) = \phi^a(x) + B_\sigma^{a\nu l} \partial_{\nu_l} \varepsilon^\sigma(x), \\ \pi'_a(x') &= \pi_a(x) + T_{a\sigma} \varepsilon^\sigma(x) = \pi_a(x) + C_{a\sigma}^{\nu m} \partial_{\nu_m} \varepsilon^\sigma(x), \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\varepsilon^\sigma(x)$ 为无穷小任意函数 ($\sigma = 1, 2, \dots, r$), A, B, C 等系数均为 x, ϕ^a, π_a 的函数, 且记

$$\nu_n = \underbrace{\nu\sigma \cdots \lambda\rho}_n, \quad \partial_{(n)} = \partial_{\nu_n} = \underbrace{\partial_\nu \partial_\sigma \cdots \partial_\lambda \partial_\rho}_n. \quad (31)$$

在变换(30)式下, 假设正则形式的 $\mathcal{L}_p$ 的变更为

$$\delta \mathcal{L}_p = \partial_\mu (A_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma) + U_\sigma \varepsilon^\sigma, \quad (32)$$

其中 Λ_σ^μ 和 U_σ 均为线性微分算符

$$\Lambda_\sigma^\mu = f_\sigma^{\mu\nu} \partial_{v_\nu}, \quad (33)$$

$$U_\sigma = u_\sigma^{\nu n} \partial_{v_n}, \quad (34)$$

系数 f, u 等均为 x, ϕ^a, π_a 的函数. 由(10), (12), (30)和(32)式, 有

$$\begin{aligned} & \frac{\delta I}{\delta \pi_a} (T_{a\sigma} - \pi_{a,\sigma} R_\sigma^\mu) \varepsilon^\sigma + \frac{\delta I}{\delta \phi^a} (S_\sigma^a - \phi_{,\mu}^\sigma R_\sigma^\mu) \varepsilon^\sigma + \frac{d}{dt} [\pi_a (S_\sigma^a - \phi_{,\mu}^\sigma R_\sigma^\mu) \varepsilon^\sigma] \\ & + \partial_\mu (\mathcal{L}_p R_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma) = \partial_\mu (\Lambda_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma) + U_\sigma \varepsilon^\sigma. \end{aligned} \quad (35)$$

利用下列关系式:

$$A_\sigma^{\nu n} \partial_{v_n} \varepsilon^\sigma = (-1)^n (\partial_{v_n} A_\sigma^{\nu n}) \varepsilon^\sigma + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \partial_{v_j} [(\partial_{(j)} A_\sigma^{\nu n}) (\partial_{(n-j-1)} \varepsilon^\sigma)], \quad (36)$$

将(30)–(34)和(36)式代入(35)式, 得

$$\begin{aligned} & \left[(-1)^m \partial_{v_m} \left(C_{a\sigma}^{\nu m} \frac{\delta I}{\delta \pi_a} \right) + (-1)^{k+1} \partial_{v_k} \left(A_\sigma^{\mu\nu k} \pi_{a,\mu} \frac{\delta I}{\delta \pi_a} \right) \right. \\ & \quad \left. + (-1)^l \partial_{v_l} \left(B_\sigma^{\alpha\nu l} \frac{\delta I}{\delta \phi^a} \right) + (-1)^{k+1} \partial_{v_k} \left(A_\sigma^{\mu\nu k} \phi_{,\mu}^a \frac{\delta I}{\delta \phi^a} \right) + (-1)^{n+1} \partial_{v_n} u_\sigma^{\nu n} \right] \varepsilon^\sigma \\ & = \partial_\nu \left(\sum_{i=1}^5 B_i^\nu + \Lambda_\sigma^\nu \varepsilon^\sigma - \mathcal{L}_p R_\sigma^\nu \varepsilon^\sigma \right) - \frac{d}{dt} (\pi_a \delta \phi^a), \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$B_1^\nu = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j+1} \partial_{(j)} \left(C_{a\sigma}^{\nu m} \frac{\delta I}{\delta \pi_a} \right) \partial_{(m-j-1)} \varepsilon^\sigma, \quad (38)$$

$$B_2^\nu = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \partial_{(j)} \left(\pi_{a,\mu} A_\sigma^{\mu\nu k} \frac{\delta I}{\delta \pi_a} \right) \partial_{(k-j-1)} \varepsilon^\sigma, \quad (39)$$

$$B_3^\nu = \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{j+1} \partial_{(j)} \left(B_\sigma^{\alpha\nu l} \frac{\delta I}{\delta \phi^a} \right) \partial_{(l-j-1)} \varepsilon^\sigma, \quad (40)$$

$$B_4^\nu = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \partial_{(j)} \left(\phi_{,\mu}^a A_\sigma^{\mu\nu k} \frac{\delta I}{\delta \phi^a} \right) \partial_{(k-j-1)} \varepsilon^\sigma, \quad (41)$$

$$B_5 = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \partial_{(j)} u_\sigma^{\nu n} \partial_{(n-j-1)} \varepsilon^\sigma. \quad (42)$$

对(37)式在四维时空区域上积分, 由于 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的任意性, 可选 $\varepsilon^\sigma(x)$ 及其所需的各级偏微商在区域边界上为零, 这样(37)式等号右端的积分为零, 再利用 $\varepsilon^\sigma(x)$ 的任意性, 得 r 个恒等式

$$\begin{aligned} & (-1)^m \partial_{v_m} \left(C_{a\sigma}^{\nu m} \frac{\delta I}{\delta \pi_a} \right) + (-1)^{k+1} \partial_{v_k} \left(A_\sigma^{\mu\nu k} \frac{\delta I}{\delta \pi_a} \right) \\ & \quad + (-1)^l \partial_{v_l} \left(B_\sigma^{\alpha\nu l} \frac{\delta I}{\delta \phi^a} \right) + (-1)^{k+1} \partial_{v_k} \left(A_\sigma^{\mu\nu k} \phi_{,\mu}^a \frac{\delta I}{\delta \phi^a} \right) \\ & \quad = (-1)^n \partial_{v_n} u_\sigma^{\nu n} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \quad (43)$$

这样得到正则形式的广义 Noether 第二定理: 如果拉氏量 $\mathcal{L}_p$ 在无限连续群 G_∞ 的

无穷小变换(30)式下,其变更由(32)式确定,那么必存在 r 个含泛函微商的恒等式(43)。

这个结果也是文献[7,8]在场论中的推广。恒等式(43)的成立与场量 ϕ^a, π_a 是否适合运动方程无关,它表明泛函微商 $\delta I/\delta \pi_a, \delta I/\delta \phi^a$ 之间存在着一定的关系。(43)式称为正则形式的广义 Noether 恒等式 (GNI)。

对于约束 Hamilton 系统,当系统的哈氏量和约束方程给定后,将约束方程结合(43)式,可以给出变量间更多的关系式,或者表明 Dirac-Bergmann 求次级约束的程序应终止于那一步^[20]。

五、非不变性与 Dirac 约束

在位形空间中,规范不变的系统必含 Dirac 约束。利用正则形式的 GNI (43) 式,可以证明,某些非不变性系统也具有 Dirac 约束。

设系统在下列无穷小变换:

$$\begin{aligned} x^{\mu'} &= x^\mu, \\ \phi^{a'}(x') &= \phi^a(x) + b_a^{\alpha} \varepsilon^\alpha(x) + b_a^{\alpha\mu} \partial_\mu \varepsilon^\alpha(x), \\ \pi'_a(x) &= \pi_a(x) + c_{a\alpha} \varepsilon^\alpha(x) \end{aligned} \quad (44)$$

下,拉氏量 $\mathcal{L}_P$ 的变更为

$$\delta \mathcal{L}_P = (u_a + u_a^{\alpha} \partial_\mu + u_a^{\alpha\mu} \partial_\mu \partial_\nu) \varepsilon^\alpha(x), \quad (45)$$

其中 u_a, u_a^{α} 为 x, ϕ^a, π_a 的函数, $u_a^{\alpha\mu}$ 为 x, ϕ^a 的函数。例如,某些有质量 Yang-Mills 场论模型^[21,22],就属于这种类型,这时 GNI (43) 式为

$$\begin{aligned} c_{a\alpha} \left(\phi^a - \frac{\delta H}{\delta \pi_a} \right) + b_a^{\alpha} \left(-\pi_a - \frac{\delta H}{\delta \phi^a} \right) - \partial_\mu \left[b_a^{\alpha\mu} \left(-\pi_a - \frac{\delta H}{\delta \phi^a} \right) \right] \\ = u_a - \partial_\mu u_a^{\alpha} + \partial_\mu \partial_\nu u_a^{\alpha\mu}. \end{aligned} \quad (46)$$

注意到 π_a 的定义,由于 ϕ^a 任意,(46)式中含 ϕ^a 最高阶时间微商的项之和应等于零,而与其他项无关,

$$b_a^{\alpha\mu} \frac{\delta^2 L}{\delta \phi^a \delta \phi^b} \ddot{\phi}^b = 0. \quad (47)$$

上式对任意 ϕ^b 的三阶时间微商均成立,于是有

$$b_a^{\alpha\mu} H_{a\beta} = 0. \quad (48)$$

由于 $b_a^{\alpha\mu}$ 不全为零(如规范变换),上式表明 $\det(H_{a\beta}) = 0$, 即 Hess 矩阵是退化的,系统具有 Dirac 约束。

对于正则形式规范不变的系统或规范变更的系统,利用 GNI 类似地讨论可知,系统具有 Dirac 约束。

六、色动力学

在含第二类约束的理论中,与第二类约束相连系的拉氏乘子,可由系统的哈氏量和第二类条件来确定。但在含第一类约束的理论中,与第一类约束相连系的拉氏乘子,是不能

完全由运动方程确定下来,未确定的拉氏乘子代表运动方程解的任意性,沿着约束系统运动的轨线,利用 GNI (43) 式,有时能给出与第一类约束相联系的拉氏乘子所适合的关系. 这样正则形式的 GNF T 和 GNI 的应用,可获得有关 Dirac 约束和对应的拉氏乘子更多的信息.

下面讨论 GNI 在色动力学中的应用.

$SU(3)$ 规范不变的色动力学拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi}^k [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig A_\mu^a T^a) - m_k] \psi^k, \quad (49)$$

其中关于 k 求和对所有味指标施行^[23],

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (50)$$

T^a 为 $SU(3)$ 的生成元 ($a = 1, 2, \dots, 8$), f_{bc}^a 为 $SU(3)$ 的结构常数. 场 ψ^k 和 A_μ^a 的正则共轭动量分别为

$$\pi^k = i\psi^k \gamma_0, \quad (51)$$

$$\pi_a^\mu = -F_a^{\mu 0}. \quad (52)$$

系统的哈氏量为

$$\begin{aligned} H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi_i^a \pi_i^a - A_0^a (\partial_i \pi_i^a - ig \pi^k T^a \phi^k) + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a \right. \\ \left. + gf_{bc}^a A_0^b A_i^c \pi_i^a + \frac{1}{2} \pi^k \gamma^0 \gamma^i (\partial^i \phi^k) - \frac{1}{2} (\partial^i \pi^k) \gamma^0 \gamma^i \phi^k \right. \\ \left. - ig \pi^k \gamma^0 \gamma^i \phi^k A_i^a T^a - im \pi^k \gamma^0 \phi^k \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

正则变量的基本 Poisson 括号为

$$\{A_\mu^a(x, t), \pi_b^\nu(y, t)\} = \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta(x - y), \quad (54a)$$

$$\{\phi^k(x, t), \pi^l(y, t)\} = \delta^{kl} \delta(x - y), \quad (54b)$$

其它的基本 Poisson 括号为零.

系统的初级约束为

$$\phi_a^0 = \pi_a^0 \approx 0. \quad (55)$$

总哈氏量

$$H_t = \int d^3x (\mathcal{H} + \lambda^a \pi_a^0). \quad (56)$$

由初级约束的相容性条件

$$\dot{\pi}_a^0 = \{\pi_a^0, H_t\} \approx 0, \quad (57)$$

给出次级约束

$$\chi_a = \partial^i \pi_i^a - g C_{bc}^a A_i^b \pi_i^c - ig \pi^k T^a \phi^k \approx 0, \quad (58)$$

χ_a 的相容性条件,不再产生新的约束,且 ϕ_a^0 和 χ_a 均为第一类约束. 它们是规范变换的生成元^[12],由它们生成的相空间中的变换:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= D_{b\mu}^a \epsilon^b(x), \quad (D_{b\mu}^a = \partial_b^a \partial_\mu + g C_{bc}^a A_\mu^c) \\ \delta \pi_a^\mu &= g C_{ab}^c \pi_c^\mu \epsilon^b(x), \quad \delta \phi^k = ig T^b \phi^k \epsilon^b(x), \quad \delta \pi^k = -ig \pi^k T^b \epsilon^b(x) \end{aligned} \quad (59)$$

下,拉氏量 $\mathcal{L}_F$ 是不变的. 由拉氏量(49)式描述的色动力学系统,Dirac 猜想有效^[12,14],系统随时间的演化由扩展哈氏量 H_* 决定,

$$H_0 = H + H' = \int d^3x [\mathcal{H}(x) + \lambda^a(x)\pi_a^0(x) + \mu^a(x)\chi_a(x)], \quad (60)$$

其中 λ^a, μ^a 均为拉氏乘子。

在变换(59)式下导致的 GNI 为

$$\begin{aligned} -ig\pi^k T^b \left(\dot{\phi}^k - \frac{\delta H}{\delta \pi^k} \right) + ig \left(-\dot{\pi}^k - \frac{\delta H}{\delta \phi^k} \right) T^b \phi^k + gC_{ab}^c \pi_c^a \left(\dot{A}_\mu^a - \frac{\delta H}{\delta \pi_\mu^a} \right) \\ + \tilde{D}_{0\mu}^a \left(-\dot{\pi}_a^\mu - \frac{\delta H}{\delta A_\mu^a} \right) = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

其中

$$\tilde{D}_{b\mu}^a = -\delta_b^a \partial_\mu + gC_{bc}^a A_\mu^c. \quad (62)$$

沿着约束系统运动的轨线,(61)式化为

$$-ig\pi^k T^b \frac{\delta H'}{\delta \pi^k} + ig \frac{\delta H'}{\delta \phi^k} T^b \phi^k + gC_{ab}^c \pi_c^a \frac{\delta H'}{\delta \pi_\mu^a} + \tilde{D}_{b\mu}^a \left(\frac{\delta H'}{\delta A_\mu^a} \right) = 0. \quad (63)$$

将(53),(55),(58),(59)和(60)式代入(63)式,得

$$C_{bc}^a [\mu^a \partial_i \pi_c^i + gC_{ab}^c \mu^b (\pi_c^i A_i^c - \pi_c^i A_i^a)] = 0. \quad (64)$$

上式给出色动力学系统第一类次级约束所连系的拉氏乘子 $\mu^a(x)$ 适合的关系式。

对于电磁场, Dirac 猜想有效, 沿着约束系统运动的轨线, GNI (43) 式变为平凡的等式。

- [1] P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.*, 2(1950), 129; *Proc. Roy. Soc.*, A246(1958), 326.
- [2] 李子平, 物理学报, 30(1981), 1599; 30(1981), 1699; 33(1984), 814; *Acta Math. Sci.*, 5(1985), 379.
- [3] Li Zi-ping and Li Xi, *Intern. J. Theor. Phys.*, 29(1990), 765.
- [4] 李子平, 物理学报, 35(1986), 553; *Intern. J. Theor. Phys.*, 26(1987), 853; 高能物理与核物理, 12(1988), 782.
- [5] L. Brink and M. Henneaux, *Principles of String Theory*, Plenum Press, (1988).
- [6] D. S. Djukic, *Arch. Mech.*, 12(1974), 782.
- [7] Li Zi-ping and Li Xi, *Intern. J. Theor. Phys.*, 30(1991), 225.
- [8] 李子平, 科学通报, 36(1991), 940.
- [9] D. Mušicki, *J. Phys. A*, 11(1978), 39.
- [10] P. A. M. Dirac, *Lecture on Quantum Mechanics*, Yeshive University Press, New York, (1964).
- [11] R. Sugano and H. Kamo, *Prog. Theor. Phys.*, 67(1982), 1966;
R. Sugano, *Prog. Theor. Phys.*, 68(1982), 1377;
R. Sugano and T. Kimura, *Prog. Theor. Phys.*, 69(1983), 252.
- [12] L. Castellani, *Ann. Phys. (NY)*, 143(1982), 357.
- [13] R. Di Stefano, *Phys. Rev.*, D27(1983), 1725.
- [14] M. E. V. Costa, H. O. Girotti and T. J. M. Simões, *Phys. Rev.*, D32(1985), 405.
- [15] X. Grácia and J. M. Pons, *Ann. Phys.*, (NY), 187(1988), 355.
- [16] G. R. Allcock, *Philos. Trans. R. Soc. London*, A279(1975), 487.
- [17] R. Cawley, *Phys. Rev. Lett.*, 42(1979), 413; *Phys. Rev.*, D21(1980), 2988.
- [18] A. Frenkel, *Phys. Rev.*, D21(1980), 2986.
- [19] Qi Zhi, *Intern. J. Theor. Phys.*, 29(1990), 1309.
- [20] 李子平, 新疆大学学报, 7(1990), 28.
- [21] 李子平, 高能物理与核物理, 6(1982), 555.
- [22] 赵保恒, 阎沫霖, 高能物理与核物理, 2(1978), 501.
- [23] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, (1987).

SYMMETRY IN CANONICAL FORMALISM OF CONSTRAINED SYSTEM

LI ZI-PING

Department of Applied Physics, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022

(Received 9 May 1991)

ABSTRACT

We have derived the generalized Noether's first theorem in canonical formalism for field theory with singular Lagrangian and generalized Noether's identities in canonical formalism for variant Lagrangian. The application to the Dirac's constraint theory was discussed. We point out that some variance system may has a Dirac constraint. A counter-example to a conjecture of Dirac was given which indicates that Dirac's conjecture is invalid in this example. The application of generalized Noether's identities to the chromodynamics is also discussed.

PACC: 1130; 1110; 0320