球对称带电蒸发黑洞的视界与温度*

戴宪新　　赵 峥
北京师范大学物理系，北京 100875

1991年6月6日收到

本文从讨论视界附近的 Klein-Gordon 方程出发，直接准确地算出球对称带电蒸发黑洞事件视界的位置和考虑反作用后的 Hawking 辐射温度，而无需求助于低维能-动张量的近似计算.

PACC: 0420; 9760L

自从 Hawking 发现黑洞存在量子辐射以来，人们在黑洞方面做了大量的工作，但是基本上是从求解相应真空中的重整化能-动张量出发来处理反作用问题，这种方法只能给出在球对称情况下，考虑反作用后的 Hawking 辐射温度的近似值[1,2]. 在本文中，避开求解能-动张量的困难，而从 Klein-Gordon 方程入手进行讨论. 既然黑洞视界附近有 Hawking 辐射，那么粒子在视界附近就应该显示出很强的波动性. 在稳态情况下，这将导致乌龟坐标下的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程在视界附近化成波动方程.我们推测，动态蒸发黑洞也应有类似性质(将在另文中指出，这与乌龟坐标下时空的共形性质有关)从这一设想出发，可以自动地确定出蒸发黑洞的事件视界和 Hawking 辐射温度. 作者已用这一新方法研究 Vaidya, Vaidya-Schwarzschild-de Sitter 等时空的反作用问题[3]，得到与传统方法一致、而且更加精确的结果. 本文的目的是用作者的方法来确定球对称带电蒸发黑洞的视界位置和辐射温度.

描述球对称带电蒸发黑洞的 Vaidya-Bonner 时空度规[4]为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2(v)}{r^2}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{1}$$

描述标量场的 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu\right)\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - ieA_\nu\right)\Phi\right)\right] - \mu^2\Phi = 0, \tag{2}$$

其中 $A_\mu = (-Q/r, 0, 0, 0)$.

令 $\Phi = R(r,v)S(\theta,\varphi)$，方程(1)化为

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2} + \lambda S = 0, \tag{3}$$

$$r^2\frac{\partial^2 R}{\partial v\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\frac{\partial R}{\partial r}\right]$$

* 国家自然科学基金和高等学校博士学科点专项科研基金资助项目.

$$-ieA_0r^2\frac{\partial R}{\partial r}-ie\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_0R)-[\mu^2r^2+\lambda]=0. \tag{4}$$

考虑到球对称性得 $\lambda=l(l+1)\qquad l=0,1,2,\cdots$.

设 $R=r^{-1}\rho(r,v)$，则方程(4)化为

$$\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2}+2\frac{\partial^2\rho}{\partial v\partial r}+2\left(\frac{m}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}+\frac{ieQ}{r}\right)\frac{\partial\rho}{\partial r}$$
$$-\left\{\frac{2}{r^2}\left(\frac{m}{r}-\frac{Q^2}{r^2}\right)+\left(\mu^2+\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{ieQ}{r}\right)\right\}\rho=0. \tag{5}$$

作乌龟型坐标变换

$$r_*=r+\frac{1}{2\kappa(v_0)}\ln(r-r_H),$$
$$v_*=v-v_0. \tag{6}$$

其中 r_H 代表事件视界 $r_H=r_H(v)$，则

$$\frac{\partial}{\partial r}=\left[1+\frac{1}{2\kappa(r-r_H)}\right]\frac{\partial}{\partial r_*},\quad \frac{\partial}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v_*}-\frac{\dot r_H}{2\kappa(r-r_H)}\frac{\partial}{\partial r_*},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}=\left[1+\frac{1}{2\kappa(r-r_H)}\right]^2\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}-\frac{1}{2\kappa(r-r_H)^2}\frac{\partial}{\partial r_*}; \tag{7}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial v\partial r}=\left[1+\frac{1}{2\kappa(r-r_H)}\right]\frac{\partial^2}{\partial v_*\partial r_*}-\left[1+\frac{1}{2\kappa(r-r_H)}\right]$$
$$\times\frac{\dot r_H}{2\kappa(r-r_H)}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}+\frac{\dot r_H}{2\kappa(r-r_H)^2}\frac{\partial}{\partial r_*}.$$

利用(6),(7)式,(5)式可化为

$$\left[\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\left(1+\frac{1}{2\kappa}\frac{1}{(r-r_H)}\right)-\frac{2\dot r_H}{2\kappa(r-r_H)}\right]\frac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2}$$
$$+2\frac{\partial^2\rho}{\partial v_*\partial r_*}+\left[1+\frac{1}{2\kappa(r-r_H)}\right]^{-1}\left[\frac{2\dot r_H}{2\kappa(r-r_H)^2}\right.$$
$$-\frac{1}{2\kappa}\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\frac{1}{(r-r_H)^2}+2\left(\frac{m}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}+i\frac{eQ}{r}\right)$$
$$\left.\times\left(1+\frac{1}{2\kappa}\frac{1}{(r-r_H)}\right)\right]\frac{\partial\rho}{\partial r_*}-\left[1+\frac{1}{2\kappa(r-r_H)}\right]^{-1}$$
$$\cdot\left\{\frac{2}{r^2}\left(\frac{m}{r}-\frac{Q^2}{r^2}\right)+\left(\mu^2+\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{ieQ}{r^2}\right)\right\}\rho=0. \tag{8}$$

下面考查方程（8）在视界附近的渐近行为：为了化成标准波动方程，必须要求在 $r\to r_H(v_0)$ 时，$\dfrac{\partial^2\rho}{\partial r_*^2}$ 的系数趋近于 1，

$$\lim_{\substack{r\to r_H\\ v\to v_0}}\frac{(r^2-2mr+Q^2)[2\kappa(r-r_H)+1]-2r^2\dot r_H}{2\kappa r^2(r-r_H)}\to 1. \tag{9}$$

要使(9)式有意义,必须有

$$\lim_{\substack{r\to r_H\\ v\to v_0}}(r^2-2mr+Q^2)[2\kappa(r-r_H)+1]-2r^2\dot r_H\to 0. \tag{10}$$

化简(10)式得

$$r_{\mathrm{H}}=\frac{m+\sqrt{m^{2}-Q^{2}(1-2\dot{r}_{\mathrm{H}})}}{1-2\dot{r}_{\mathrm{H}}}. \tag{11}$$

将(11)式代入(9)式得

$$\kappa=\frac{r_{\mathrm{H}}-m-2r_{\mathrm{H}}\dot{r}_{\mathrm{H}}}{2mr_{\mathrm{H}}-Q^{2}}. \tag{12}$$

将(11),(12)式代入(8)式且取 $r\to r_{\mathrm{H}}$ 得

$$\frac{\partial^{2}\rho}{\partial r_{*}^{2}}+2\frac{\partial^{2}\rho}{\partial v_{*}\partial r_{*}}+i\frac{eQ}{r_{\mathrm{H}}}\frac{\partial\rho}{\partial r_{*}}=0. \tag{13}$$

(13)式的线性独立解为

$$\rho_{\text{入射}}^{\omega}=\exp(-i\omega v_{*});$$
$$\rho_{\text{出射}}^{\omega}=\exp(-i\omega v_{*})\exp[2i(\omega-\omega_{0})r_{*}], \tag{14}$$

其中 $\omega_{0}=eV$, $V=Q/r_{\mathrm{H}}$ 为视界表面的静电势. (14) 式中 $\rho_{\text{入射}}^{\omega}$ 在视界上是解析的, $\rho_{\text{出射}}^{\omega}$ 在视界上具有对数奇异性,将 $\rho_{\text{出射}}^{\omega}$ 解析延拓到黑洞内部得

$$\begin{aligned}\bar{P}_{\omega}&=\exp(-i\omega v)\exp[2i(\omega-\omega_{0})r_{*}]\quad(r>r_{\mathrm{H}})\\&=\exp\frac{\pi(\omega-\omega_{0})}{\kappa}\exp(-i\omega v)\exp[2i(\omega-\omega_{0})r_{*}]\quad(r<r_{\mathrm{H}}).\end{aligned} \tag{15}$$

按照 Damour, Ruffini 和 Sannan 对 $\bar{P}_{\omega}$ 的解释[5,6], 不难得到出射波的光谱强度分布函数为

$$N_{\omega}=\frac{\Gamma_{\omega}}{\exp\left(\frac{\omega-\omega_{0}}{T}\right)\pm1}, \tag{16}$$

$$T=\frac{\kappa}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{r_{\mathrm{H}}-m-2r_{\mathrm{H}}\dot{r}_{\mathrm{H}}}{2mr_{\mathrm{H}}-Q^{2}}, \tag{17}$$

其中"+"对应费密子,"—"对应玻色子; Γ_{ω} 为由外部引力势垒 ($r_{\mathrm{H}}<r<\infty$) 引起的透射系数.

采用 York 的观点[7],认为表观视界与事件视界差 L 的一级小量,则在 L 的一级近似条件下有

$$\dot{r}_{\mathrm{H}}\approx\dot{r}_{\mathrm{AH}}. \tag{18}$$

1. 当 $\dot{m}(v)=\dot{Q}(v)=0$ 时,由(11),(17),(18)式得

$$r_{\mathrm{H}}=m+\sqrt{m^{2}-Q^{2}}, \tag{19}$$

$$T=\frac{\sqrt{m^{2}-Q^{2}}}{2\pi(m+\sqrt{m^{2}-Q^{2}})^{2}}. \tag{20}$$

此时事件视界和辐射温度均回到稳态 Reissner-Nordström 的情况.

2. 当 $Q\to0$ 时,由(11),(17)和(18)式得

$$r_{\mathrm{H}}=2m(1+4\dot{m}),\quad T=\frac{1}{8\pi m}(1-4\dot{m}). \tag{21}$$

此时恰好回到 Vaidya 蒸发黑洞的情况[2].

下面讨论 $m \gg Q$ 的情况，在 $L(L \equiv dm/dv)$ 的一级近似条件下($\dot{m}$,$(Q/m)\dot{Q}$,Q^2/m^2 皆作为 L 的一级小量)求出事件视界和 Hawking 辐射温度。由(18)式及 $r_{AH} = m + \sqrt{m^2 - Q^2}$[2] 知

$$\dot{r}_H = \dot{r}_{AH} = 2\dot{m} - \frac{Q}{m}\dot{Q}. \tag{22}$$

将(22)式代入(11)和(17)式得

$$r_H = 2m\left(1 + 4\dot{m} - \frac{2Q\dot{Q}}{m} - \frac{1}{4}\frac{Q^2}{m^2}\right), \tag{23}$$

$$T = \frac{1}{8\pi m}\left(1 - 4\dot{m} + \frac{2Q\dot{Q}}{m}\right). \tag{24}$$

由(24)式可以看出，$\dot{m}$ 项所起作用是加快黑洞的蒸发，而 $Q\dot{Q}/m$ 所起作用是减慢黑洞的蒸发。

本文得出球对称蒸发带电黑洞的视界位置和温度的准确值。并指出在带电情况下，视界附近的波动方程应增加一个一次导数项，此项将使辐射谱增加一个类似于化学势的 ω_0 因子。

作者与刘辽教授、梁灿彬教授、王永成副教授作过有益讨论，在此表示衷心感谢。

[1] H. Ford and L. Parker, *Phys. Rev.*, D17(1978), 1485.
[2] R. Balbinot, *Phys. Rev.*, D33(1986), 1611.
[3] Zhao Zheng and Dai Xianxin, *Chinese Phys. Lett.*, 8(1991), 548.
[4] W. B. Bonnor and P. C. Vaidya, *Gen. Rel. Grav.*, 1(1970), 127.
[5] T. Damour and R. Ruffini, *Phys. Rev.*, D14(1976), 332.
[6] S. Sannan, *Gen. Rel. Grav.*, 20(1988), 239.
[7] J. W. York, Jr., Quantum Theory of Gravity: Essays in Honour of the Sixtieth Birthday of B. Dewitt, Hilger, Bristol, (1984), p. 135.

EVENT HORIZON AND TEMPERATURE OF SPHERICALLY CHARGED EVAPORATING BLACK HOLE

DAI XIAN-XIN ZHAO ZHENG
Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875

(Received 6 June 1991)

Abstract

A new method is suggested to determine the event horizon and the Howking temperature of a spherically charged evaporating black hole. The Klein-Gordon equation near the event horizon is solved.

PACC: 0420; 9760L