

柱等离子体中广义磁流体方程组的简化形式与本征模解

杨维斌 胡希伟

中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026

1991年6月10日收到

本文从含有广义欧姆定律的磁流体力学方程组出发, 仅作符合加热托卡马克等离子体具体实验条件的近似, 把广义磁流体方程组简化成4元一阶微分方程组。对均匀密度等离子体柱情况求出解析色散关系(本征模解), 并证明 Appert 理论是本文的极限情况。

PACC: 5235; 5240D

一、引 言

目前, 用 Alfvén 波加热托卡马克等离子体是基于 Alfvén 波在一些特定区域(共振层)的非平方可积性, 即奇异性^[1,2], 用磁流体(MHD)理论解释这一类实验结果时广泛采用的是 Appert 等人^[3]的理论。然而, 该理论假定压强 $p = 0$, 这个假定并不符合实验条件。

本文指出, 一旦等离子体压强 $p \neq 0$, 压强扰动不仅不能忽略, 而且起着极其重要的作用: 它将使 Alfvén 波共振层的奇异性消失^[4]。由此将产生一系列重要结果, 如 Appert 等人^[3]描述的 Alfvén 波离散谱将不在共振层截止等。

本文还证明 Appert 理论是本理论当压强 $p \rightarrow 0$ 时的极限情况, 因而, Appert 理论能够解释的一切实验结果, 本文都能解释。Appert 理论不能解释的一些实验, 如 TCA 托卡马克上观测到的平行扰动电场 $E_{\parallel} \neq 0$ ^[5] 以及密度涨落^[6]等, 用本文也能够解释。并且, 还得到柱等离子体中的慢磁声波离散谱。

二、广义磁流体方程组的最简形式

对于有限压强 $p \neq 0$, 载流柱等离子体, 采用下列螺旋坐标系: 即坐标单位向量为 $e_r, e_{\perp} = e_{\theta} \times e_r, e_{\parallel} = B_0/B_0$, 其中 $B_0 = B_{0\theta}e_{\theta} + B_{0z}e_z$ (e_r, e_{θ}, e_z 为柱坐标单位矢量), 并假定 B_{0z} 为常数, $|B_{0\theta}/B_{0z}| \ll 1$ 。把各物理量 Q 写成 $Q = Q_0 + Q_1$, 其中平衡量 $Q_0 = Q_0(r)$ 仅为半径 r 的函数, 扰动量 $Q_1 = Q_{1r}e_r + Q_{1\perp}e_{\perp} + Q_{1\parallel}e_{\parallel}$, 且 $|Q_1| \ll |Q_0|$ 。设扰动量形式为 $\exp[i(kz + m\theta - \omega t)]$, k, m 分别为柱坐标中的轴向和角向模数。

由于 $p \neq 0$, 这时压强扰动和密度扰动都不能忽略, 则线性广义磁流体方程组为

$$\frac{\nabla p_1}{2\rho_0\omega_{ci}} - \frac{\nabla p_0}{2\rho_0^2\omega_{ci}} \rho_1 + E_1 + v_1 \times B_0 = \frac{1}{\rho_0\omega_{ci}} \left[j_0 \times B_1 + j_1 \times B_0 - \frac{\rho_1}{\rho_0} j_0 \times B_0 \right] \quad (1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + j_1 \times B_0 + j_0 \times B_1, \quad (2)$$

$$\nabla \times \tilde{E}_1 = -\frac{\partial B_1}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times B_1 = j_1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 v_1) = 0, \quad (5)$$

$$v_A^2(0)p_1 = v_A^2(0)T_{e0}(r)\rho_1, \quad (6)$$

其中假定 $v_0 = 0$, 上述方程组中除了等离子体柱中心的 Alfvén 速度 $v_A(0)$ 和声速 $v_s(0)$ 外, 其它各量都是无量纲量. $T_{e0}(r)$ 为平衡电子温度, ω_{ci} 为离子回旋频率. 长度和时间分别用等离子体柱的半径 a 和 Alfvén 波传播时间 $a/v_A(0)$ 归一化. 磁场 B_0 和 B_1 , 电场 E_1 , 电流密度 j_0 和 j_1 分别用 $B_{0z} = \text{常数}$, $B_{0z}v_A(0)/c$, $cB_{0z}/4\pi a$ 归一化. 密度 ρ_0, ρ_1 用平衡柱中心密度 ρ_c 归一化. $T_{e0}(r)$ 用平衡中心电子温度归一化. 压强 p_0, p_1 用 $v_A^2(0)\rho_c$ 归一化.

由于 $|B_{0\theta}| \ll 1$, 忽略 $B_{0\theta}^2, B_{0\theta}^3$, 等, 仅保留到 $B_{0\theta}$ 的一次项.

令 $E_1 = \tilde{E}_1 + \nabla\varphi$,

$$\varphi = -\frac{p_1}{2\rho_0\omega_{ci}}, \quad \tilde{E}_1 = \tilde{E}_r e_r + \tilde{E}_\perp e_\perp + \tilde{E}_\parallel e_\parallel. \quad (7)$$

将上式代入方程(1)可得 $\tilde{E}_\parallel = 0$.

将(7)式代入方程(1)–(4), 化简得

$$\begin{pmatrix} j_r \\ j_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\perp} & \tau_{rp} \\ \sigma_{\perp r} & \sigma_{\perp\perp} & \tau_{\perp p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_r \\ \tilde{E}_\perp \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -i\omega\rho_0(1 - \omega^2/\omega_{ci}^2)^{-1}, \quad \sigma_{r\perp} = \frac{\omega^2\rho_0}{\omega_{ci}}(1 - \omega^2/\omega_{ci}^2)^{-1} - k_\parallel j_0/\omega, \\ \sigma_{\perp r} &= -\sigma_{r\perp}, \quad \sigma_{\perp\perp} = \sigma_{rr}, \quad \sigma_{rp} = (1 - \omega^2/\omega_{ci}^2)^{-1} \left(-ik_\perp + i\frac{\omega}{\omega_{ci}} \frac{\partial}{\partial r} \right), \\ \sigma_{\perp p} &= (1 - \omega^2/\omega_{ci}^2)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\omega}{\omega_{ci}} k_\perp \right), \quad k_\parallel = k + \frac{m}{r} B_{0\theta}, \\ k_\perp &= \frac{m}{r} - k B_{0\theta}. \end{aligned} \quad (9)$$

将方程组(8)代入麦克斯韦方程(3), (4), 可得

$$\begin{aligned} \frac{A}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tilde{E}_\perp) &= k_\perp G\tilde{E}_\perp + (A - k_\perp^2)i\omega B_\parallel \\ &+ i\omega k_\perp(1 - \omega^2/\omega_{ci}^2)^{-1} \left(-k_\perp + \frac{\omega}{\omega_{ci}} \frac{\partial}{\partial r} \right) p_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$A \frac{\partial}{\partial r} B_{\parallel} = \frac{1}{i\omega} (G^2 - A^2) \tilde{E}_{\perp} - k_{\perp} G B_{\parallel} \\ + (1 - \omega^2/\omega_{ci}^2)^{-1} \left[(A\omega/\omega_{ci} - G)k_{\perp} + (G\omega/\omega_{ci} - A) \frac{\partial}{\partial r} \right] p_1, \quad (11)$$

其中

$$A = \varepsilon - k_{\perp}^2, \quad G = \omega/\omega_{ci}\varepsilon - \frac{2}{r} B_{0\theta} k_{\parallel}, \quad \varepsilon = \omega^2 \rho_0 / [1 - (\omega/\omega_{ci})^2]. \quad (12)$$

由方程(2),(3),(5),(6),(8),(10)和(11)消去 $i_r, i_{\perp}, B_r, B_{\perp}, \tilde{E}_r, v_{\perp}, v_{\parallel}$ 和 ρ_1 , 得

$$\frac{\partial}{\partial r} X = HX, \quad (13)$$

其中

$$X = (\tilde{E}_{\perp}, B_{\parallel}, p_1, v_r)^T,$$

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix},$$

$$h_{11} = \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}^2} \left(\omega \omega_{ci} \rho_0 + \frac{2}{r} B_{0\theta} k_{\parallel} \right) - \frac{1}{r}, \quad h_{12} = \frac{i\omega}{k_{\parallel}^2} (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2),$$

$$h_{13} = 0, \quad h_{14} = -\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}^2} \omega \omega_{ci} \rho_0;$$

$$h_{21} = \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega} - \frac{i\omega_{ci}^2}{k_{\parallel}^2 \omega} \rho_0 \left(k_{\parallel}^2 - \omega^2 \rho_0 - \frac{4\omega}{r \omega_{ci}} B_{0\theta} k_{\parallel} \right),$$

$$h_{22} = -\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}^2} \left(\omega \omega_{ci} \rho_0 + \frac{2}{r} B_{0\theta} k_{\parallel} \right), \quad h_{23} = -k_{\perp} \frac{\omega_{ci}}{\omega},$$

$$h_{24} = \frac{i\omega_{ci}^2}{k_{\parallel}^2 \omega} \rho_0 \left(k_{\parallel}^2 - \omega^2 \rho_0 - \frac{2\omega}{r \omega_{ci}} B_{0\theta} k_{\parallel} \right);$$

$$h_{31} = \frac{i\omega_{ci}^2}{k_{\parallel}^2 \omega} \rho_0 \left(k_{\parallel}^2 - \omega^2 \rho_0 - \frac{2\omega}{r \omega_{ci}} B_{0\theta} k_{\parallel} \right), \quad h_{32} = \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}^2} \omega \omega_{ci} \rho_0,$$

$$h_{33} = k_{\perp} \frac{\omega_{ci}}{\omega}, \quad h_{34} = \frac{i\omega_{ci}^2}{k_{\parallel}^2 \omega} \rho_0 \left(\omega^2 \rho_0 - k_{\parallel}^2 + k_{\parallel}^2 \frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2} \right);$$

$$h_{41} = k_{\perp} \omega_{ci} / \omega, \quad h_{42} = 0, \quad h_{43} = \frac{1}{i\omega \rho_0} \left[k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2 v_A^2(0)}{T_{e0}(r) v_i^2(0)} \right],$$

$$h_{44} = -k_{\perp} \omega_{ci} / \omega - \rho_0' / \rho_0 - 1/r, \quad \tilde{E}_{\perp} = E_{\perp} + i \frac{k_{\perp} p_1}{2\omega_{ci} \rho_0}.$$

(13)式即是简化形式的方程组。至此,已将14元一阶微分方程组(1)~(6)简化为4元一阶微分方程组(13)。

三、均匀密度等离子体柱情况

考虑均匀密度 $\rho_0(r) = 1$ 和零轴向电流 $B_{0\theta} = 0$ 情况,此时, $v_A(r) = v_A(0)$, $v_i(r) = v_i(0)$ 。

在方程组(13)中消去 $\tilde{E}_\perp, v_r$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} p_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} p_1 - \left[k_\perp^2 + A \left(\frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{\omega^2 v_A^2}{k_\parallel^2 v_i^2} \right) \right] p_1 \\ = \omega_{ci}^2 \left(\frac{\omega^2}{k_\parallel^2} - 1 \right) B_\parallel, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} B_\parallel + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} B_\parallel - \left[k_\parallel^2 + k_\perp^2 + \omega_{ci}^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{k_\parallel^2} \right) \right] B_\parallel \\ = k_\parallel^2 \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{k_\parallel^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2 v_A^2}{k_\parallel^2 v_i^2} \right) p_1. \end{aligned} \quad (15)$$

进一步消去 $p_1, B_\parallel$, 得

$$L^2 B_\parallel + b_1 L B_\parallel + b_2 B_\parallel = 0, \quad (16)$$

$$L^2 p_1 + b_1 L p_1 + b_2 p_1 = 0, \quad (17)$$

其中

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - k_\perp^2,$$

$$b_1 = A \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2} (1 - \omega^2/\omega_{ci}^2) (\omega^2 v_A^2/k_\parallel^2 v_i^2 - 1) + \omega_{ci}^2 (\omega^2/k_\parallel^2 - 1) - k_\parallel^2,$$

$$b_2 = k_\parallel^4 \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2} (\omega^2 v_A^2/k_\parallel^2 v_i^2 - 1) [(\omega^2/k_\parallel^2 - 1)^2 - \omega^2/\omega_{ci}^2]. \quad (18)$$

1. 有限压强效应

当 $v_i \rightarrow 0$ 对方程(16)取极限, 得

$$v_A^2 \frac{\omega_{ci}^2}{k_\parallel^4} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2} \right) [ALB_\parallel + (A^2 - G^2)B_\parallel] = 0. \quad (19)$$

方程(19)即 Appert 所得出的结果^[3]. 由此可见, Appert 理论是本文的极限情况.

值得注意的是, 这个取极限过程在 Alfvén 波共振层 $A=0$ 引入奇异性. 当 $A \rightarrow 0$ 时, 方程(16), (17)并不奇异, 而方程(19)则出现奇异性, 可见, 把 Appert 理论用于 $A \rightarrow 0$ 情况是有问题的.

另外, 可以看到, 取极限过程使方程降阶, 而降阶会遗失一些解, 这可以在本节末看到.

把对 $v_i \rightarrow 0$ 取极限过程在 $A \rightarrow 0$ 时的不合理性称为有限压强效应.

2. 程函近似结果

对方程(16)作程函近似, 即令

$$L = -k_\perp^2 - k_\parallel^2, \quad (20)$$

代入方程(16)得

$$(k_\perp^2 + k_\parallel^2)^2 - b_1(k_\perp^2 + k_\parallel^2) + b_2 = 0. \quad (21)$$

对 $v_A \gg v_i$, $\omega < \omega_{ci}$ 情况, 有

1) $A \approx 0$ 情况 此时 $|b_1| \gg |b_2|$, 方程(21)有近似解

$$(k_z^2 + k_\perp^2)_1 = b_1, (k_z^2 + k_\perp^2)_2 = b_2/b_1.$$

将 b_1, b_2 的表达式(18)代入, 解出 ω^2 , 写成有量纲形式为

- (1) $\omega^2 = k^2(v_A^2 + v_i^2)$ 快磁声波;
- (2) $\omega^2 = k_\parallel^2 v_A^2 (1 + k^2 v_i^2 / \omega_{ci}^2)$ Alfven 波;
- (3) $\omega^2 = k_\parallel^2 v_i^2 - k^2 v_i^2 \omega^2 / \omega_{ci}^2$ 慢磁声波.

这对应于理想磁流体中熟悉的三支波, 但此时 Alfven 波已不再是严格的剪切波.

2) $A = 0$ 情况 利用 $A = 0$ 和方程(21)联立, 此时 $|b_2| \gg |b_1|$, 可得 ω^2 必须同时满足下列两个方程:

$$\omega^2 = \frac{k_\parallel^2 v_A^2}{1 + k_\parallel^2 v_A^2 / \omega_{ci}^2}, \quad \omega^2 = (k_z^2 + k_\perp^2) v_i v_A. \quad (22)$$

方程组(22)写成为有量纲形式, 这就是 Appert 给出的 Alfven 波连续谱的形式^[3]. 但与他们的结果不同的是, 有限压强效应使波在共振层处可以横越磁力线传播. 这样, 共振层自然就不再是奇异层.

3. 严格解析解

实际上, 对均匀等离子体柱情况, 方程组(13)是可以解析求解的. 假定等离子体柱 ($r \leq 1$) 外为真空, 在 $r = r_s$ ($r_s \geq 1$) 处为超导壳, $r_s = 1$ 就是没有真空区的极限情况.

不难看出, 方程(16), (17)的解为

$$B_\parallel = c_1 J_{1|m}|(k_1 r) + c_2 J_{1|m}|(k_2 r), \quad p_1 = c_3 J_{1|m}|(k_1 r) + c_4 J_{1|m}|(k_2 r), \quad (r < 1), \quad (23)$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为积分常数, $J_{1|m}|(x)$ 为贝塞耳函数, k_1^2 和 k_2^2 为下列方程的根:

$$x^2 - b_1 x + b_2 = 0. \quad (24)$$

真空区的解为

$$B_\parallel = c_5 I_{1|m}|(k_\parallel r) + c_6 K_{1|m}|(k_\parallel r), \quad p_1 = 0, \quad (1 < r < r_s), \quad (25)$$

其中 c_5, c_6 为积分常数, $I_{1|m}|(k_\parallel r)$, $K_{1|m}|(k_\parallel r)$ 为虚宗量贝塞耳函数.

解(23), (25)式共有 6 个积分常数. 利用 $B_\parallel$, p_1 , $E_\perp$ 在 $r = 1$ 的连续性 (暂不考虑有限压强会导致某些量间断的问题) 和 $E_\perp$ 在 $r = r_s$ 为零这 4 个边界条件, 再加上方程(14)对 c_1, c_2, c_3, c_4 的两个限制条件, 消去这些积分常数, 得到色散关系

$$k_1(d_2 k_1^2 + i\omega d_1)D_{J_1} - k_2(d_2 k_1^2 + i\omega d_1)D_{J_2} + (k_1^2 - k_2^2)d_3|_{r=1} - \frac{i\omega}{k_\parallel} d_1(k_1^2 - k_2^2)F_m(k_\parallel, r_s) = 0, \quad (26)$$

其中

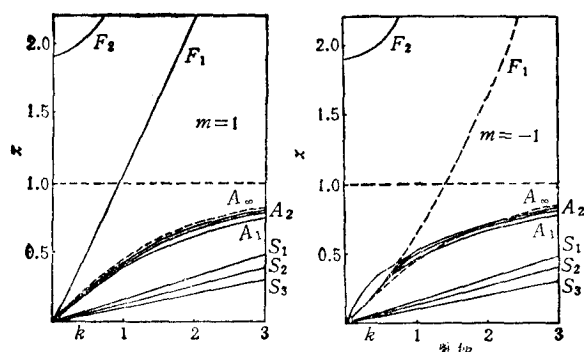
$$D_{J_1} = J'_{1|m}|(k_1)/J_{1|m}|(k_1), \quad D_{J_2} = J'_{1|m}|(k_2)/J_{1|m}|(k_2),$$

$$F_m(k_\parallel, r_s) = \frac{D_m(k_\parallel r_s)I'_{1|m}|(k_\parallel) - K'_{1|m}|(k_\parallel)}{D_m(k_\parallel r_s)I_{1|m}|(k_\parallel) - K_{1|m}|(k_\parallel)},$$

$$D_m(k_\parallel r_s) = K'_{1|m}|(k_\parallel r_s)/I'_{1|m}|(k_\parallel r_s), \quad d_1 = (\omega^2/k_\parallel^2 - 1)^2 - \omega^2/\omega_{ci}^2,$$

$$d_2 = i\omega/k_\parallel^2(1 - \omega^2/k_\parallel^2 - \omega^2/\omega_{ci}^2), \quad d_3 = -i\omega^4 k_\perp/k_\parallel^4 \omega_{ci}.$$

在方程(26)中, 视 ω 为 $k_\parallel$ ($k_\parallel = k$) 的函数, 该方程对 $m = 1$ 和 $m = -1$ 的数值解



(a) $m=1$ (b) $m=-1$, F_1 的虚线部分表示波矢为纯虚数

图 1 无电流均匀密度柱等离子体中的频谱图 $v_A/v_s = 3.3$; $x = \omega/\omega_{ci}$; k 为轴向波数; F_1, F_2 ; A_1, A_2 以及 s_1, s_2, s_3 分别表示快磁声波、Alfven 波和慢磁声波的离散谱; 虚线 A_∞ 代表 Alfven 共振

如图 1(a), (b) 所示。其自由参量 ω_{ci} 和 r_s 取 TCA 托卡马克的典型值 $\omega_{ci} = 2, r_s = 1.5$ 。

由图 1(a), (b) 可见, Appert 得到的本征频谱^[3]只是本文结果的一部分。Alfven 离散谱并不在共振层处消失, 它下降至零点; 慢磁声波的离散谱是本文理论特有的; Appert 等人得到的表面波^[3]只是 $m = -1$ 的第一支快磁声波的一部分, 这可以很清楚地从图 1(b) 中看出, 这支快磁声波 F_1 实际上并不能趋于无穷(图中用虚线标出), 因为当

$$\omega/\omega_{ci} > \frac{1}{2} [k^2/\omega_{ci}^2 + \sqrt{k^4/\omega_{ci}^4 + 4k^2/\omega_{ci}^2}]$$

时, 由(18)式知 $b_2 < 0, b_1 > 0$, 这样由方程(24)知快磁声波的波矢平方

$$k^2 = b_1/2 - \sqrt{b_1^2/4 - b_2} < 0,$$

即这部分波不能传播。

四、结 论

本文从含有广义欧姆定律的磁流体力学方程组出发, 只作符合托卡马克具体实验条件的假定, 得到包含 Appert 等人的理论作为一个特例的更为一般的线性理论, 并对均匀柱等离子情况得到解析的色散关系, 对该色散关系的数值解给出频谱图(图 1(a), (b))。从利用程函近似方法所做的分析可知, 三类典型的磁流体力学波(快磁声波、Alfven 波和慢磁声波)本理论都包括, 其中有界柱等离子体中慢磁声波的离散谱形式以前的理论中尚未见报道。

无论是以前的理想磁流体理论^[1], 还是 Appert 等人的冷柱等离子体理论^[3]都认为: 对于无耗散等离子体, Alfven 波的共振层一定是奇异层。Hasegawa 和 Liu Chen 用动力学理论得到结论^[7]: 离子的有限拉莫尔半径效应可以消除这种奇异性。从本文的分析可知, 在磁流体力学中, 有限频率效应和有限压强效应两者之和对应于动力学理论中的有限拉莫尔半径效应, 两者缺少任何一个都会导致无耗散等离子体中 Alfven 共振层奇异性消失^[9]。Appert 理论是因为令压强为零取了极限; 而以前的理想磁流体理论尽管没

有取这个极限,但却取了另一个极限 $\omega_{ci} \rightarrow \infty$ (即没有考虑有限频率效应)。

- [1] J. Tataronis and W. Grossmann, *Z. Physik*, **261**(1973), 203.
- [2] C.E. Kieras, Ph. D. thesis, Wisconsin University, (1982).
- [3] K. Appert, J. Vaclavik and L. Villard, *Phys. Fluids*, **27**(1984), 432.
- [4] 杨维兹, 博士论文, 中国科学技术大学, 合肥, (1990).
- [5] R. Behn, G. A. Collision, J. B. Lister and H. Weisen, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **29**(1987), 75.
- [6] 韩申生, 博士论文, 中国科学技术大学, 合肥, (1990).
- [7] A. Hasegawa, L. Chen, *Phys. Fluids*, **19**(1976), 1924.

REDUCED FORM AND EIGENMODE SOLUTION OF GENERALIZED MHD EQUATIONS IN A CYLINDRICAL PLASMA

YANG WEI-HONG HU XI-WEI

Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026

(Received 10 June 1991)

ABSTRACT

In this paper, the reduced form (four differential equations of the first order) of generalized MHD equations is obtained, only some approximations satisfied by the experimental condition of heating tokamak plasma are used. An analytical dispersion relation (eigenmode solution) for a homogeneous plasma cylinder is obtained. It is shown that Appert's theory is a limiting case of our theory.

PACC: 5235; 5240D