

圆对称环域 Josephson 结中的零场台阶*

徐昆明 陆道芳 姚希贤

浙江大学物理系, 杭州, 310027

南京大学物理系, 南京, 210008

1991 年 2 月 11 日收到

对计及干涉项的描述圆对称环域 Josephson 结扰动 sine-Gordon 方程数值研究表明: 在无外磁场时, 对于内外半径分别为 $7.5\lambda_J$ 和 $12.5\lambda_J$ 的结, 在它的 $I-V$ 特性曲线上呈现两支零场台阶, 它们分别对应于单孤子和三孤子激发. 双孤子的激发是不稳定的, 它仅存在于暂态过程之中. 三孤子激发相当于一维结中三孤子的对称模式, 且伴随着包括不同振荡周期等的运动不规则性.

PACC: 7450; 7460G

一、引 言

近年来, 人们对大面积 Josephson 结中孤子动力学的研究发生了浓厚兴趣^[1-5]. 在没有外磁场时, 孤子振荡可在其 $I-V$ 特性曲线上出现几乎等于恒定电压的所谓零场台阶; 当有外磁场存在时, 出现所谓 Fiske 台阶. 作者等人^[6]对不同几何尺寸的圆对称环域 Josephson 结的数值研究表明, 当不考虑干涉项时, 其 $I-V$ 特性曲线上出现第一零场台阶. 王伟等人^[7]的最近工作表明, 若用平凡解作为初值进行数值计算, 则只出现 Fiske 台阶. 因此进一步仔细研究计及干涉项的圆对称环域结的 sine-Gordon 方程 (SGE) 就显得十分必要, 这不仅是由于 Josephson 结应用前景的 $I-V$ 特性曲线中那些额外非线性部分与结中所激发的孤子的数目和行为密切相关, 而且由于 $I-V$ 特性曲线可以直接测量, 因而有可能为判断干涉项前的系数符号问题提供导向^[8].

作者等人在研究圆对称扰动 SGE 时指出, 为了获得稳定的孤子波解, 提出了圆对称环域的结模型^[6], 其形状如图 1 所示. 外磁场由电流 I_H 通过坐落在 z 轴的一根导线所产生, 流经环域结的驱动电流 I 由恒流源通过另外的导线提供. 若把此环域结等分成厚度为 $0.05\lambda_J$ 的若干个同轴薄壳圆筒, 则每个圆筒的电力学行为由无量纲的扰动 SGE

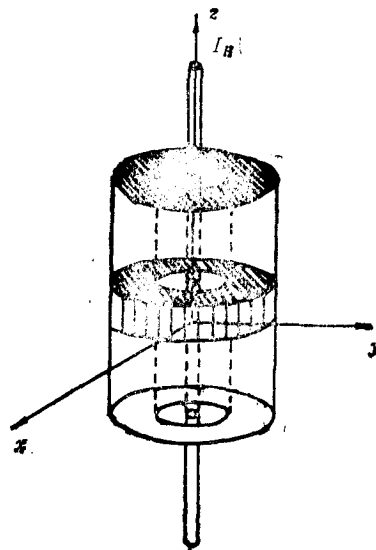


图 1 环域结

* 国家自然科学基金资助的课题.

$$\varphi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \varphi_{\rho} - \varphi_{\tau\tau} - \alpha(1 + \varepsilon \cos \varphi) \varphi_{\tau} - \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

描述。式中 φ 为结两侧超导体序参数的位相差, 其余参数如 ρ, τ, α 和 λ_j 等的定义同文献 [6]。 $\alpha \in \cos \varphi \varphi_{\tau}$ 即为超导电流与准粒子电流间的干涉项, 一般称为 $\cos \varphi$ 项, 其中 ε 即为 $\cos \varphi$ 项前面的系数。理论预言 $\varepsilon = 1$; 而实验表明, 一维隧道结的 ε 值在 -0.6 — -0.8 之间。这是已有理论所不能解释的少数几个例子之一。

方程 (1) 必须满足如下的边界条件:

$$\varphi_{\rho}|_{\rho=\rho_0} = I_H/2\pi\rho_0, \quad (2a)$$

$$\varphi_{\rho}|_{\rho=\rho_1} = (I_H + I)/2\pi\rho_1, \quad (2b)$$

式中 ρ_0 和 ρ_1 分别为归一到 λ_j 的结的内外半径。

二、零场台阶

取 $\rho_0 = 7.5, \rho_1 = 12.5, I_H = 0, \alpha = 0.01$ 和 $\varepsilon = -1$, 并用文献 [6] 的计算方法, 时间步长 $\Delta\tau = 0.01$, 空间步长 $\Delta\rho = 0.05$, 计算得到的圆对称环域结的 I - V 特性曲线的低电压部分, 如图 2 所示, 其纵坐标为再一次归一的馈入电流 $I' = I/\pi(\rho_1^2 - \rho_0^2)$, 横坐标

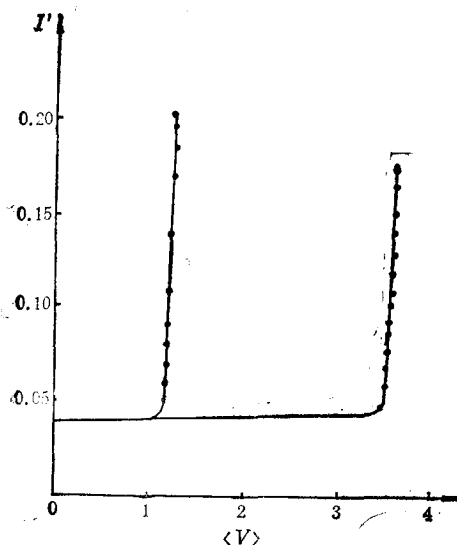


图 2 I - V 特性曲线

标 $\langle V \rangle = \Delta\varphi/T$, 其中 T 为孤子振荡的周期, $\Delta\varphi$ 为在一个周期中环域结径向各点的序参数的位相差。图 2 中呈现出两个零场台阶, 其电压比为 1:3。

对于一维结, 零场台阶的电压由 $V = n\Phi_0\bar{c}/L$ 给出。其中 $\Phi_0 = h/2e$ 称为一个磁通量子, $\bar{c}$ 为电磁波在结中的传播速度, L 为结的长度, n 为一整数, 代表结中所激发的磁通量子的个数。若把 L 用圆对称环域结的结宽度 $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_0$ 代替, 则该式对准一维结也应成立。这个推论已由平均电压 $\langle V \rangle$ 对 $\Delta\rho$ 的依赖关系中获得证实^[6]。因此, 图 2 中 $\langle V \rangle = 1.2$ 的零场台阶对应于单孤子的激发, $\langle V \rangle = 3.6$ 的台阶对应于三孤子的激发, 所以它为一个第三零场台阶^[2]。

1. 第一零场台阶

图 3 所示为一个达到稳定的单孤子振荡运动的典型数值计算结果。其计算初值由

$$\varphi(\rho, 0) = 4 \tan^{-1} \left[\exp \frac{\rho - \rho_c}{\sqrt{1 - u^2}} \right], \quad (3a)$$

$$\varphi_{\tau}(\rho, 0) = -\frac{2u}{\sqrt{1 - u^2}} \operatorname{sech} \frac{\rho - \rho_c}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (3b)$$

给出。式中 ρ_c 为孤子波峰值的初始位置, u 为孤子波峰值位置的移动速度。取 $\rho_c = 11.5$, $u = 0.98$, 计算表明, 经过 $\tau = 1200$ 的暂态过程后才达到稳定态。

我们从 $I' = 0$ 开始计算, 在 $I' \leq 0.048$ 范围内为零电压态, 稳定单孤子解的电流范围为 $0.050 \leq I' \leq 0.210$, 当 $I' > 0.210$ 时, 孤子波解趋向于遵循欧姆定律的旋转周期解(这部分 $I-V$ 曲线未在图 2 中示出)。

图 3(a) 所示为 $I' = 0.092$ 时的 $\varphi_\rho - \rho - \tau$ 曲线, 它代表对应于一个磁通量子激发的孤子波在 τ 从 1200 到 1216 期间内沿着结的径向运动的情况, 它是方程 (1) 的一个行波解。图 3(b) 和 (c) 分别表示 τ 从 1200 到 1250 期间内空间平均电压 $\langle \varphi_\tau \rangle_\rho$ 和结端电压 $\varphi_\tau(\rho_1, \tau)$ 随时间变化的情景。图 3(b) 中的两个高峰之间存在一个低峰(由点划线

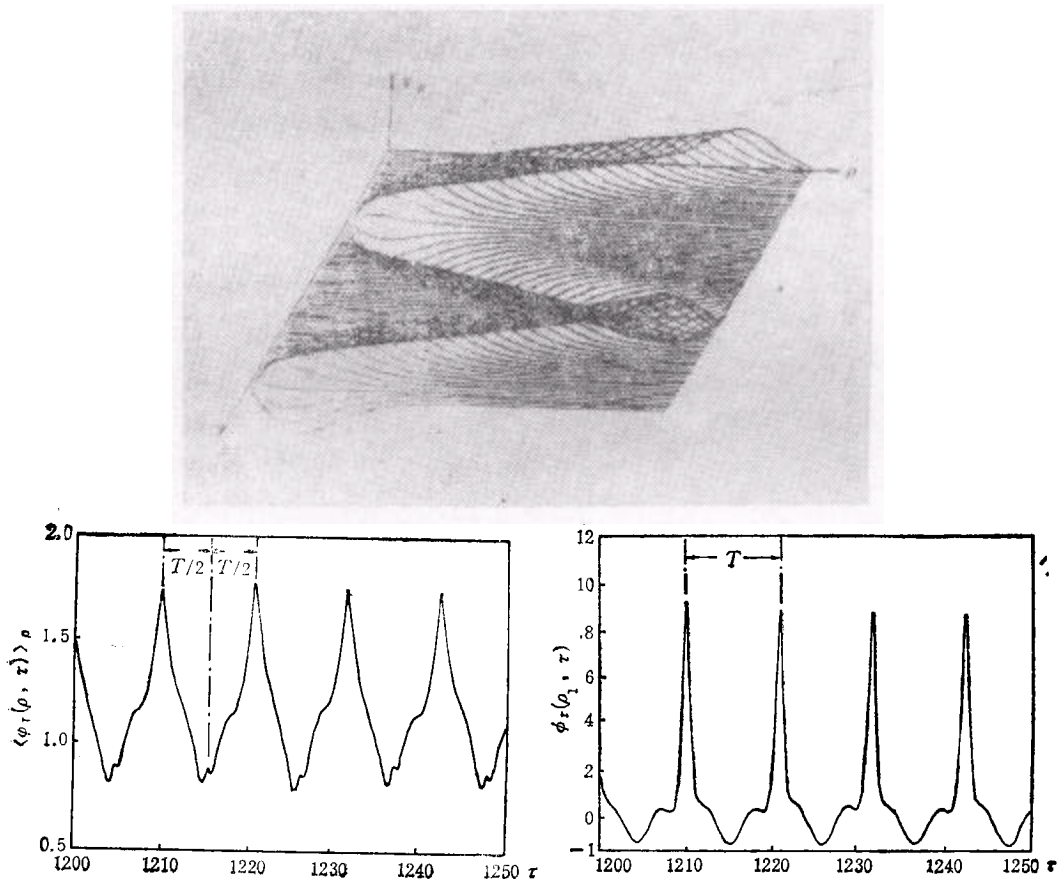


图 3 $I' = 0.092$ 时方程 (1) 的数值解 (a) 为 τ 从 1200 到 1216 期间内 $\varphi_\rho - \rho - \tau$ 曲线, 它代表一个行波解; (b) 和 (c) 分别为 τ 从 1200 到 1250 期间内 $\langle \varphi_\tau \rangle_\rho$ 和 $\varphi_\tau(\rho_1, \tau)$ 曲线

表示), 与图 3(c) 比较便可看出, $\varphi_\tau(\rho_1, \tau)$ 的周期等于 $\langle \varphi_\tau \rangle_\rho$ 的两倍, 因此该解具有 2π -kink 的性质^[3]。在这里孤子振荡周期 $T = 10.50$, 相应的 $\Delta\varphi = 4\pi$, $\langle V \rangle = 1.2$, 所以, 这是第一零场台阶。

2. 第二零场台阶

我们用下式作为计算双孤子激发的初值:

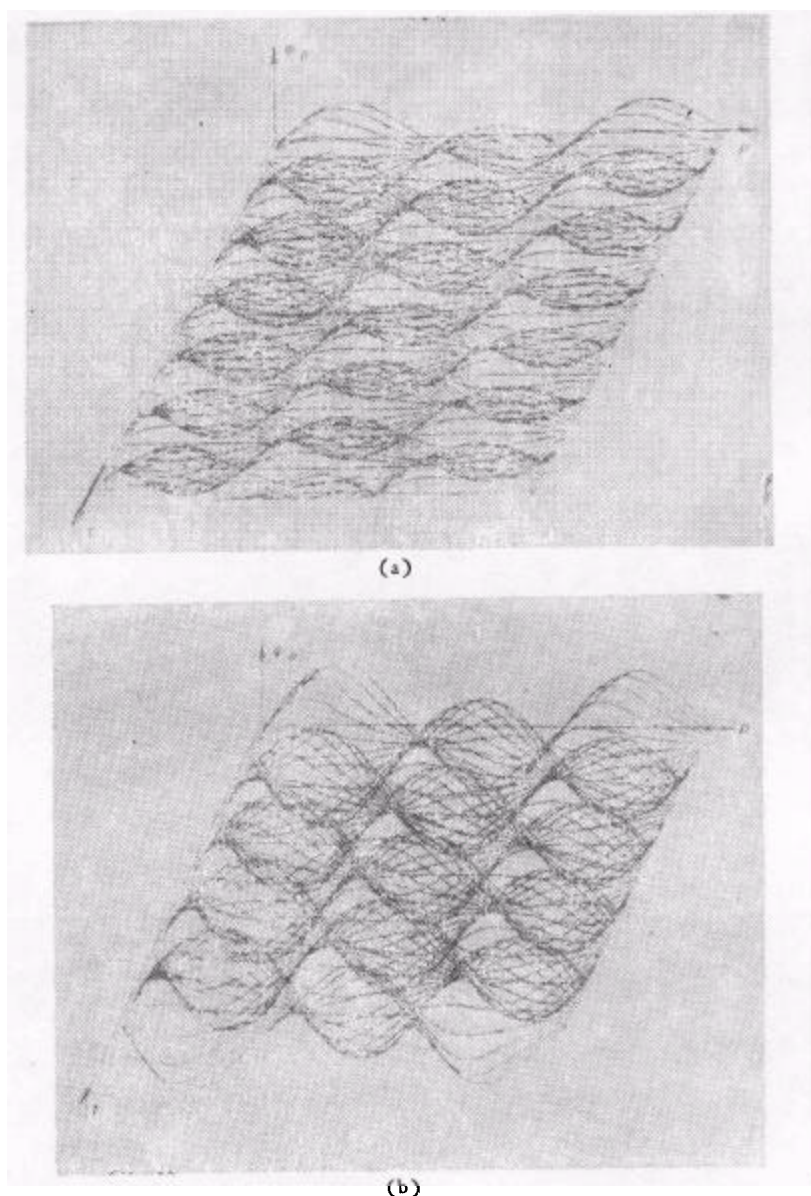
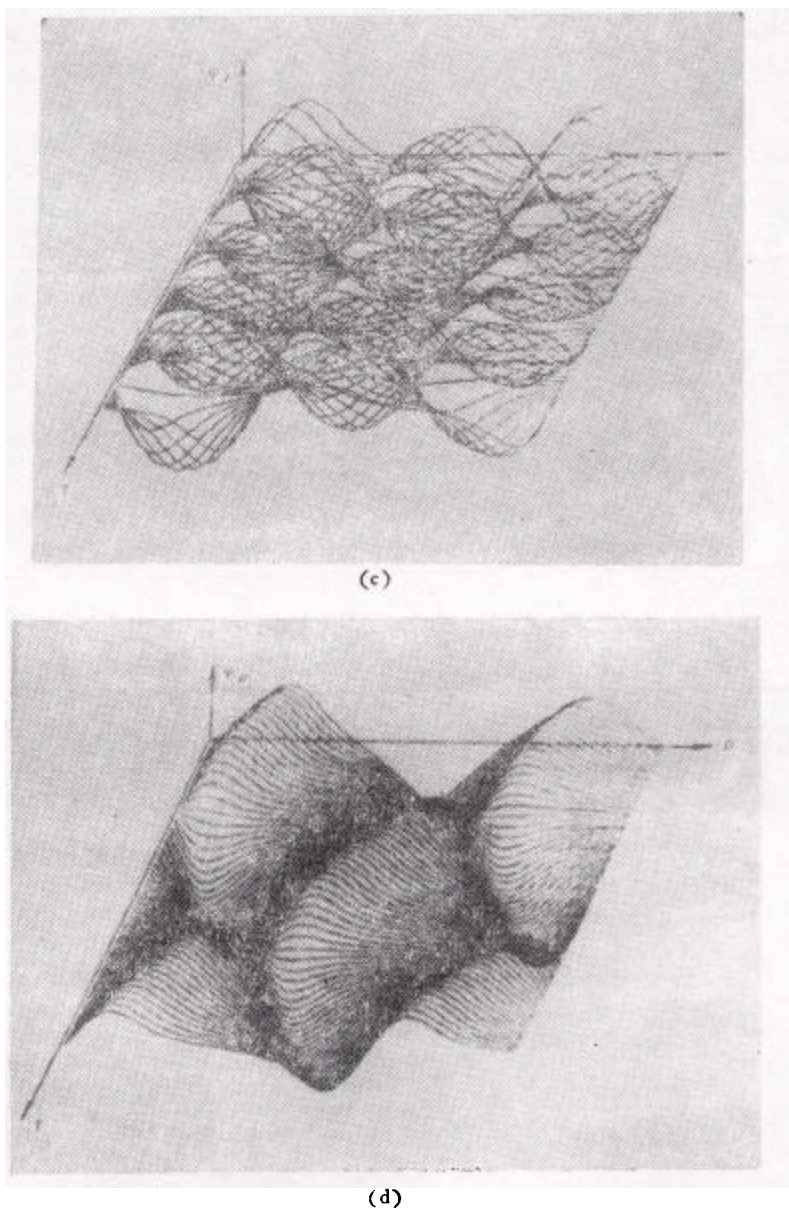


图4 (1)式的三孤子驻波解 (a)为 $I' = 0.062$ 时的 φ_ρ - ρ - τ 曲线;
曲线;(d)为(a)中开始的1/6期间内 φ_ρ - ρ - τ 曲线,它相应于一维结

$$\varphi(\rho, 0) = 4 \tan^{-1} \left[\exp \frac{\rho - \rho_{c1}}{\sqrt{1 - u_1^2}} \right] + 4 \tan^{-1} \left[\exp \frac{\rho - \rho_{c2}}{\sqrt{1 - u_2^2}} \right], \quad (4a)$$

$$\varphi_\tau(\rho, 0) = \frac{-2u_1}{(1 - u_1^2)^{1/2}} \operatorname{sech} \frac{\rho - \rho_{c1}}{(1 - u_1^2)^{1/2}} - \frac{2u_2}{(1 - u_2^2)^{1/2}} \operatorname{sech} \frac{\rho - \rho_{c2}}{(1 - u_2^2)^{1/2}}. \quad (4b)$$

取 ρ_{c1} 和 ρ_{c2} 分别为 8.5 和 11.5, $u_1 = u_2 = 0.9$, 计算结果表明: 若 $I' \leq 0.048$, 则约经过 $\tau = 1200$ 时间后趋向于零电压解; 若 $I' \geq 0.052$, 则经过 $\tau = 1500$ 时间后趋向于三孤子激发。因此, 就我们所取的参数值情况下, 双孤子位形仅存在于暂态过程之中, 故



(b) 为 $I' = 0.082$ 时的 $\varphi_\rho - \rho - \tau$ 曲线; (c) 为 $I' = 0.112$ 时的 $\varphi_\rho - \rho - \tau$ 中三孤子激发的对称模式。在其它电流值时也有与此相似的波形

它是一个不稳定位形, 在 $I-V$ 特性曲线上不出现第二零场台阶。这一结果与一维结中的情况很不相同^[2]。

3. 第三零场台阶

如前所述, 若用 (4) 式作为初值, 当 $I' \geq 0.052$ 时, 约经过 $\tau = 1500$ 时间后, 双孤子位形失稳而转变成三孤子的激发, 大约经过 $\tau = 2500$ 时间后, 才达到稳定的三孤子态, 然后用所得的稳定周期变化的 φ 和 φ_ρ 值作为计算相邻 I' 值的初值。结果发现, $\langle V \rangle = 3.6$ 的这种周期解的电流范围为 $0.052 \leq I' \leq 0.172$ 。在 $0.052 \leq I' \leq 0.077$ 的

电流范围内,存在着周期 $T = 21.00 \pm 0.10$ 的三孤子解,相应的序参数位相差 $\Delta\varphi = 24\pi$; 在 $0.082 \leq I' \leq 0.172$ 的电流范围内,存在着周期 $T = 13.70 \pm 0.10$ 的三孤子解,相应的序参数位相差 $\Delta\varphi = 16\pi$. 这是两种周期不同但平均电压相等的三孤子激发.

图4 (a) 为 $I' = 0.062$ 的 $\varphi_\rho - \rho - \tau$ 曲线,它代表 τ 从 2800 到 2826 期间内 φ_ρ 在结的径向上运动情况. 与图 3 比较可知,这是一个周期 $T = 21.00$ 的相应于三个磁通量

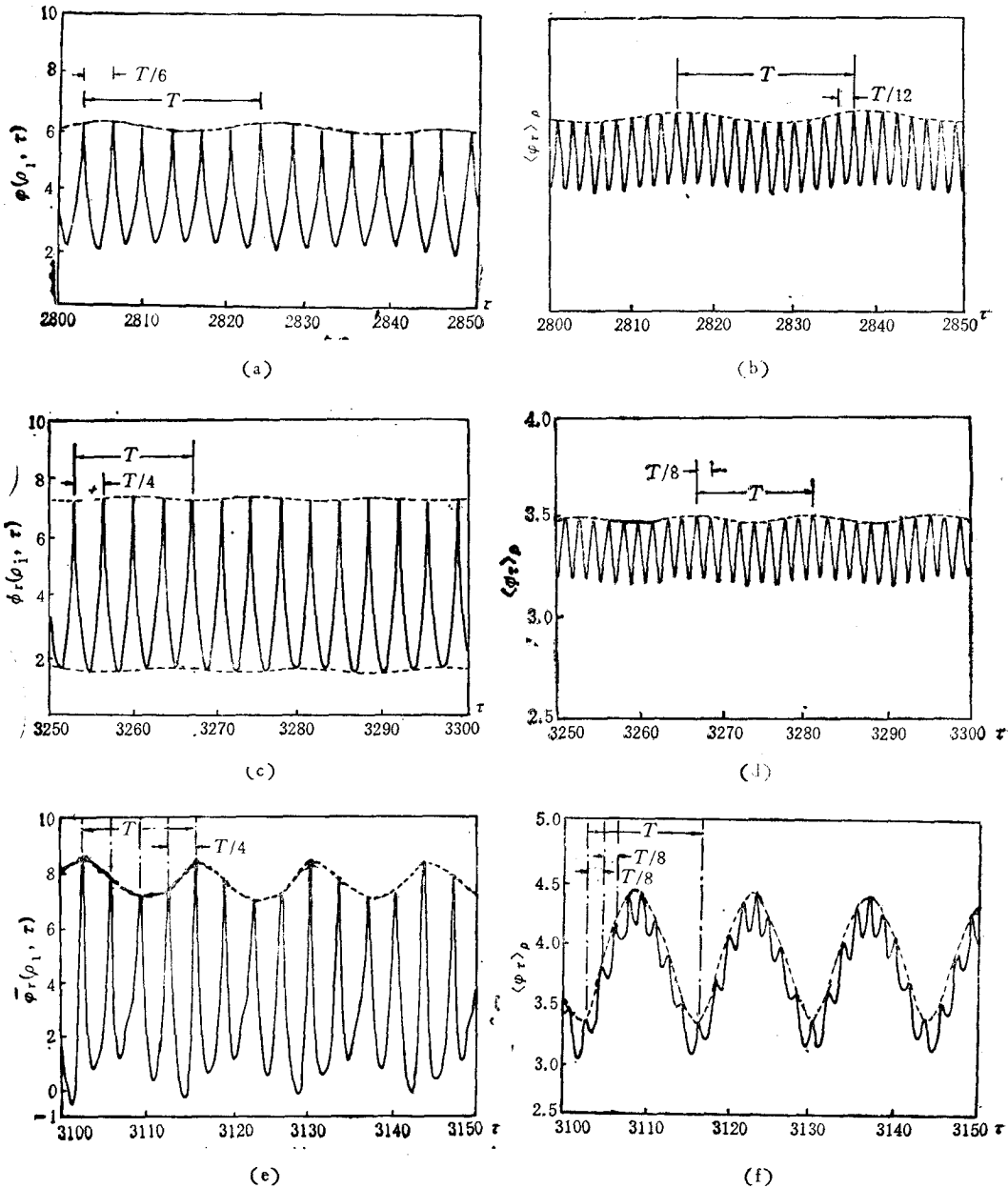


图 5 (a) 和 (b) 分别为 $I' = 0.062$, τ 从 2800 到 2850 期间内 $\varphi_\rho(\rho_1, \tau) - \tau$ 曲线和 $\langle \varphi_\rho \rangle_\rho - \tau$ 曲线; (c) 和 (d) 分别为 $I' = 0.082$, τ 从 3250 到 3300 期间内 $\varphi_\rho(\rho_1, \tau) - \tau$ 曲线和 $\langle \varphi_\rho \rangle_\rho - \tau$ 曲线; (e) 和 (f) 分别为 $I' = 0.112$, τ 从 3100 到 3150 期间内 $\varphi_\rho(\rho_1, \tau) - \tau$ 曲线和 $\langle \varphi_\rho \rangle_\rho - \tau$ 曲线

子激发的三孤子驻波解. 图 4(d) 为 τ 从 2800 到 2804 期间内 $\varphi_\rho - \rho - \tau$ 曲线. 我们发现, 这个图形与 Lomdahl 等人^[2]在一维结中所得到的三孤子激发的对称模式是十分相似的.

图 5 (a) 和 (b) 分别为 $I' = 0.062$, τ 从 2800 到 2850 期间内结端电压 $\varphi_\tau(\rho_1, \tau) - \tau$ 曲线和空间平均电压 $\langle \varphi_\tau \rangle_\rho - \tau$ 曲线. 两组曲线峰值虽呈等间隔分布, 但高低略有不同, 它们都受到如虚线所示的微弱的正弦调制, 其包络的周期 $T = 21.00$ 即为此稳定三孤子激发的振荡周期. 在此周期中, 三孤子激发经历了六个稍有差异的运动阶段, 最后才回复到原来的状态. 这一点也可以从图 4(a) 的 $\varphi_\rho - \rho - \tau$ 曲线中看出.

图 4(b) 和 (c) 分别代表 $I' = 0.082$, τ 从 3250 到 3264 期间内和 $I' = 0.112$, τ 从 3100 到 3116 期间内 $\varphi_\rho - \rho - \tau$ 曲线. 图 5(c), (e) 和 (d), (f) 分别代表在时间间隔 $\Delta\tau = 50$ 内相应的 $\varphi_\tau(\rho_1, \tau) - \tau$ 和 $\langle \varphi_\tau \rangle_\rho - \tau$ 曲线. 其空间平均电压仍等分结端电压的峰值, 因此它仍具有 2π -kink 性质的解^[3]. 与 $I' = 0.062$ 时的情况不同, 这里的三孤子振荡周期 $T = 13.70 \pm 0.10$, 相应的序参数位相差 $\Delta\varphi = 16\pi$, 所以平均电压仍约为 3.6. 对比图 4 和图 5 可以清楚地看出, 在一个周期内出现四组位形基本相似但细节略有差异的磁通量子的运动图象, 并且这种差异随着馈入电流 I' 的增加变得愈来愈明显; 同时 $\langle \varphi_\tau \rangle_\rho - \tau$ 和 $\varphi_\tau(\rho_1, \tau) - \tau$ 曲线的调制也随之加剧, 且调制波也变成愈加复杂的周期函数. 所有这一切清楚地表明, 随着馈入电流 I' 的增加, 伴随着三孤子振荡运动的时空不规则性愈加明显.

三、讨 论

在 $\rho_0 = 7.5$, $\rho_1 = 12.5$, $\epsilon = -1$, $I_H = 0$ 和 $\alpha = 0.01$ 的条件下, 对满足 (2) 式边界条件的扰动 SGE 的数值计算表明, 圆对称环域 Josephson 结的 I - V 特性曲线上呈现两个零场台阶. 它们分别对应于单磁通量子振荡和三个磁通量子振荡, 称为第一零场台阶和第三零场台阶.

计及 $\cos \varphi$ 项后, 扰动 SGE 中的有效衰减系数 $\alpha(1 + \epsilon \cos \varphi)$ 极大地降低, 于是造成了严重的慢化现象. 与 $\epsilon = 0$ 时相比, 其暂态过程大约增加了 10 至 20 倍.

对于单孤子激发, 主要是其暂态过程比 $\epsilon = 0$ 时大大地延长.

在本文的条件下, 不存在稳定的双孤子激发, 因此在 I - V 特性曲线上不出现对应于两个磁通量子振荡的第二零场台阶. 这一点与一维结的情况明显地不同^[2], 而与文献 [6] 中的情况却有些类似. 在那里, 对 $\rho_0 = 5.0$ 的环域结的数值计算表明, 在小电流情况下趋向零电压态的暂态过程中也存在着与此类似的不稳定双孤子激发. 同时, 若令 (1) 式中 $\epsilon = 0$, 且用上节相同的参数和初值条件进行计算, 也得到类似的结果. 这清楚地表明, 在本文中没有发现第二零场台阶, 不是由于计及 $\cos \varphi$ 项的结果, 而很可能是在本文的环域结的几何尺寸下, (1) 式中的 $\frac{1}{\rho} \varphi_\rho$ 项所造成的^[6].

对于三孤子激发, 我们获得了与一维结相似的对称模式的激发^[2]. 与单孤子的情况不同, 这种相应于三个磁通量子振荡的三孤子激发中, 其运动状态随馈入电流 I' 而异. 首先, 磁通量子的振荡周期在不同的电流范围内具有不同的值; 其次, 在同一种周期的电

流范围内,也随 I' 的不同显示其不同的振荡行为。但这种运动的不规则性与一维结的情况并不相同^[9,10],这两者之间存在何种关联以及这种不规则性的起因,目前尚不清楚。

我们曾对 $\varepsilon = 0$ 情况下(其它参数与本文相同)的三孤子激发进行了初步研究,发现它与 $\varepsilon = 1$ 的情况不同。有关 $\cos \varphi$ 项对三孤子激发的讨论,将在另文中进行。

总之,慢化现象以及与此有关的三孤子对称模式的运动不规则性,在不同程度上均受 $\cos \varphi$ 项的影响。因此,进一步深入研究 $\cos \varphi$ 项对孤子运动的影响,不但将能更多地揭示孤子运动的复杂的规律,而且有可能为解决干涉项前面的系数的符号问题提供一个有益的导向。

- [1] Y. S. Kivshar and B. A. Malomed, *Rev. Mod. Phys.*, **61**(1989), 763.
- [2] P. S. Lomdahl, O. H. Soerensen and P. L. Christiansen, *Phys. Rev.*, **B25**(1982), 5737.
- [3] J. J. Chang, J. T. Chen and M. R. Schenermann, D. J. Scalapino, *Phys. Rev.*, **B31**(1985), 1658.
- [4] S. N. Erne' and R. D. Parmentier, *J. Appl. Phys.*, **51**(1980), 5025; B. Duehalm, O. A. Lerring, J. Mygind, N. F. Pedersen, O. H. Soerensen and M. Cirillo, *Phys. Rev. Lett.*, **46**(1981), 1299.
- [5] M. P. Soerensen, P. L. Christiansen, R. D. Parmentier and O. Skovgaard, *Appl. Phys. Lett.*, **42**(1983), 739.
- [6] 徐昆明、沈亚菲、姚希贤,低温物理学报,**11**(1989),187;物理学报,**38**(1989),939.
- [7] Wei Wang, A. L. Thomson and Xixian Yao, 已投 *Phys. Rev. A*.
- [8] K. K. Likharev, *Rev. Mod. Phys.*, **51**(1979), 102; A. Barone and G. Paterno, *Physics and Applications of The Josephson Effect*, Wiley, New York, (1982).
- [9] A. R. Bishop and P. S. Lomdahl, *Physics*, **D18**(1986), 54.
- [10] D. J. Zhang, W. J. Yeh and O. G. Symko, *Phys. Lett.*, **A25**(1989), 225.

ZERO FIELD STEPS IN AN ANNULAR SYMMETRIC JOSEPHSON JUNCTION

XU KUN-MING LU DAO-FANG

Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou, 310013

YAO XI-XIAN

Department of Physics, Nanjing University, Nanjing, 210008

(Received 11 February 1991)

ABSTRACT

A numerical study of a perturbed sine-Gordon equation (SGE) in an annularly symmetric Josephson junction by considering the $\cos\Phi$ -term is carried out in this paper. The numerical results show that in the absence of external applied field there are two branches of the zero field steps (ZFS) in the I - V characteristic; the lower voltage ZFS corresponds to the single soliton excitation (1-ZFS) and the higher voltage one corresponds to three solitons excitation (3-ZFS). In our calculations for the definite size and parameters of the annularly symmetric Josephson junction, the two solitons excitation is unstable. The three solitons excitation is similar to the 3-ZFS with the symmetric mode in the one-dimensional overlap Josephson junction except that there exist amplitude modulation for the time behaviour in both of the voltages $\langle\phi_r\rangle_0$ and $\phi_r(\rho_1, \tau)$.

PACC: 7450; 7460G