

耗散量子隧道系统的变分法研究*

石 云 龙

雁北师范学院物理系, 雁北, 037000

陈 鸿 吴 翔

同济大学物理系, 上海, 200092

1990年6月17日收到

本文用变分法研究了耗散量子系统中的声子基态及其对局域-退局域相变条件的影响。发现: 1. 声子基态不仅存在通常的位移效应, 而且还有形变效应。本文提出的位移-压缩态可同时描述这两种效应; 2. 声子基态的选择对相变条件有很大影响。随着声子基态能量下降, 相变曲线将向强耦合方向移动。

PACC: 7340G, 7450, 6320L

一、引 言

近年来耗散效应对量子隧道系统的影响引起人们的很大兴趣, 如耗散对宏观量子隧道过程的影响^[1], 对晶体和非晶体内部原子隧道态的影响^[2,3], 对电子共振隧道过程的影响^[4]。许多作者发现, 耗散会导致量子隧道系统的对称性发生破缺, 即存在所谓局域-退局域相变^[5-7]。一般认为, 这种相变来源于热库中低频声子所引起的红外发散效应, 因此在很大程度上取决于耦合系统中声子基态的性质。由于耗散量子系统中声子基态难以严格给出, 不同的近似得到不同的声子基态^[8]。这样, 一个重要的问题就是研究不同声子基态的选择对局域-退局域相变的影响。文献[9]已经证明, 已有的理论结果可以在位移声子态近似的基础上得到。从物理上来看, 与量子隧道系统的耦合将对声子波函数产生两种影响: 一种是位移效应, 另一种是形变效应。对高频声子及弱耦合情形, 简单的位移近似是合理的。但对低频声子及强耦合情形, 更精确的声子波函数还应同时考虑形变效应^[10]。本文将通过变分法来研究量子隧道系统对声子基态的影响, 并建立声子基态与局域-退局域相变之间的联系。

二、声 子 基 态

为简单起见, 仅考虑一个粒子在一个双阱势中进行隧道运动, 并与一个声子库相互作用

* 国家自然科学基金资助的课题。

用. 通过 Tomonaga 变换, 一个费密库可与一个玻色库相联系^[11]. 低温下, 双阱势问题可用一个二能级系统描述^[5]. 问题的哈密顿量为 ($\hbar = 1$)

$$H = -\Delta_0 \sigma_x + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k g_k (b_k^\dagger + b_k) \sigma_z + \sum_k g_k^2 / \omega_k. \quad (1)$$

这里 Δ_0 为“裸”隧道参量, σ_x, σ_z 为 Pauli 算符, $b_k^\dagger, b_k$ 为声子算符, ω_k 为声子能量, g_k 为耦合系数. 下面将讨论由(1)式所描述的耦合系统中的声子基态.

将表征坐标位移的么正变换

$$S = \exp \left[\sigma_z \sum_k (g_k / \omega_k) (b_k^\dagger - b_k) \right] \quad (2)$$

作用到 H 上给出

$$\begin{aligned} \tilde{H} = SHS^{-1} = & \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k - \Delta_0 \cosh \left[\sum_k (2g_k / \omega_k) (b_k^\dagger - b_k) \right] \sigma_x \\ & - \Delta_0 i \sinh \left[\sum_k (2g_k / \omega_k) (b_k^\dagger - b_k) \right] \sigma_y. \end{aligned} \quad (3)$$

从上式可以看到隧道粒子对声子库的两种不同影响. σ_x 项代表粒子处于基态或激发态时对声子库的扰动, 这是一种相干过程^[1,12]; 而 σ_y 项则描述粒子的跃迁对声子库的扰动, 这是一种非相干过程, 仅在温度 $T > \Delta_0 / k_B$ 时才起重要作用. 本文主要讨论 $T = 0$ 时的情形, 所以将略去 σ_y 项. 当粒子处于基态时, (3)式给出

$$H_{ph} = \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k - \Delta_0 \cosh \left[\sum_k (2g_k / \omega_k) (b_k^\dagger - b_k) \right], \quad (4)$$

H_{ph} 描述一个具有非线性相互作用的复杂声子体系, 它的基态难以严格求解, 必须借助近似方法. 在零阶近似下 ($g_k / \omega_k \ll 1$, $\cosh x \approx 1$), H_{ph} 的基态为通常的真空态 $|0\rangle$. 回到么正变换前的空间, 声子基态为位移声子态

$$|\phi_{ph}\rangle = S^{-1}|0\rangle. \quad (5)$$

对应(5)式, 重整化的隧道参量为

$$\Delta = \Delta_0 \langle 0 | S(\sigma_z = -1) S^{-1}(\sigma_z = +1) | 0 \rangle = \Delta_0 e^{-w}, \quad (6)$$

式中 $w = \sum_k 2g_k^2 / \omega_k^2$ 为 Debye-Waller 因数. 从上式可以看出, 位移声子态对重整化

隧道参量有着强烈致窄效应, 它来源于声子的无规运动. 对低频及强耦合情形 ($g_k / \omega_k \geq 1$), 位移近似不再适用, 必须考虑形变效应^[10]. 为描述声子波函数的形变效应, 选取表征坐标缩小(或放大)的么正变换^[8]

$$R = \exp \left[\sum_k \gamma_k (b_k b_k - b_k^\dagger b_k^\dagger) \right], \quad (7)$$

式中 γ_k 将在后面决定. 利用恒等式

$$R b R^{-1} = b_k \cosh(2\gamma_k) + b_k^\dagger \sinh(2\gamma_k), \quad (8a)$$

$$R b^\dagger R^{-1} = b_k^\dagger \cosh(2\gamma_k) + b_k \sinh(2\gamma_k), \quad (8b)$$

有

$$\tilde{H}_{ph} = R H_{ph} R^{-1}$$

$$= \sum_k \omega_k [\cosh(4\gamma_k) b_k^\dagger b_k + \sinh(4\gamma_k) (b_k^\dagger b_k^\dagger + b_k b_k) + \sinh^2(2\gamma_k)] - \Delta_0 \cosh \left[\sum_k (2\tilde{g}_k / \omega_k) (b_k^\dagger - b_k) \right], \quad (9)$$

式中

$$\tilde{g}_k = g_k \exp(-2\gamma_k). \quad (10)$$

将(9)式中声子算符排列成正规乘积的形式,并截取到 $\tilde{g}_k$ 的二次项,得到

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{ph} = & \sum_k [\omega_k \cosh(4\gamma_k) + (4\tilde{g}_k^2 \Delta' / \omega_k^4)] b_k^\dagger b_k + \sum_k \omega_k \sinh^2(2\gamma_k) \\ & + \sum_k [\omega_k \sinh(4\gamma_k) - 4\tilde{g}_k^2 \Delta' / \omega_k^4] (b_k^\dagger b_k^\dagger + b_k b_k) - \Delta', \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$\Delta' = \Delta_0 e^{-\varphi}, \quad \tilde{\omega} = \sum_k 2\tilde{g}_k^2 / \omega_k^4. \quad (12)$$

选择参量 γ_k 使 $\tilde{H}_{ph}$ 的二次型对角化,可得

$$\tilde{H}_{ph} = \sum_k \tilde{\omega}_k b_k^\dagger b_k + \sum_k \omega_k \sinh^2(2\gamma_k) - \Delta', \quad (13)$$

式中

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k \exp(4\gamma_k), \quad (14)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{8} \ln [1 + 8\Delta' g_k^4 / \omega_k^4]. \quad (15)$$

回到么正变换前的空间,(13)式的基态为位移-压缩声子态

$$|\phi_{ph}\rangle = S^{-1} R^{-1} |0\rangle, \quad (16)$$

相应的重整化隧道参量为

$$\begin{aligned} \langle 0 | RS(\sigma_z = -1) S^{-1}(\sigma_z = +1) R^{-1} | 0 \rangle \\ = \Delta_0 \exp \left\{ - \sum_k (2g_k^4 / \omega_k^4) \exp(-4\gamma_k) \right\} = \Delta'. \end{aligned} \quad (17)$$

(14)式表明,隧道粒子与声子的相互作用不仅会导致隧道参量的重整化,而且会造成声子能量重整化.比较(17)与(6)式可知,位移-压缩态关于重整化隧道参量的致窄效应要比位移态的有所减弱.事实上,它来自于上述提到的由隧道体系到声子库的相干特性传递.

三、变分计算

由于声子基态难以严格给出,这里将通过变分法加以研究.由于哈密顿量(1)式具有空间反演对称性,即在空间变换 $b_k \rightarrow -b_k, b_k^\dagger \rightarrow -b_k^\dagger, \sigma_z \rightarrow -\sigma_z$ 作用下,哈密顿量保持不变,所采用的变分波函数亦具有同样的对称性.

1. 单参量变分

为描述位移效应,引入变分基态

$$|\phi_1\rangle = \exp\left[-\sigma_z \sum_k c_k(b_k^\dagger - b_k)\right] |\phi_{vac}\rangle, \quad (18)$$

式中 c_k 为变分参数, $|\phi_{vac}\rangle$ 同时代表声子真空态及隧道体系基态 ($\sigma_z |\phi_{vac}\rangle = |\phi_{vac}\rangle$). $|\phi_1\rangle$ 态的能量容易算出

$$\begin{aligned} E_1 &= \langle \phi_1 | H | \phi_1 \rangle \\ &= -\Delta_0 K_1 + \sum_k (\omega_k c_k - 2g_k) c_k + \sum_k g_k^2 / \omega_k, \end{aligned} \quad (19)$$

式中

$$K_1 = \exp\left(-2 \sum_k c_k^2\right). \quad (20)$$

变分条件 $\frac{\partial E_1}{\partial c_k} = 0$ 给出

$$c_k = g_k / (\omega_k + 2\Delta_0 K_1). \quad (21)$$

为进一步计算 c_k , 需知道 g_k, ω_k 与 k 的依赖关系. 为了更具有一般性, g_k 与 ω_k 的定义为

$$g_k = g_0 k^\nu, \quad \omega_k = \omega_0 k^\nu \quad (\nu > 1). \quad (22)$$

这里 k 为约化波矢, 满足 $0 < k < 1$. 一般认为, 耗散量子隧道系统的行为取决于相互作用谱密度^[5]

$$\sum_k g_k^2 \sim \int \omega^s d\omega, \quad (23)$$

$$s = \frac{d + \lambda}{\nu} - 1, \quad (24)$$

式中 d 为声子库维数. 按照文献[5]的分类, 耗散可分为亚欧姆耗散 ($s < 1$), 超欧姆耗散 ($s > 1$) 及欧姆耗散 ($s = 1$) 三种情形. 本文仅讨论欧姆耗散情形, 关于亚欧姆及超欧姆耗散的研究将另文给出. 当 $s = 1$ 时, 利用

$$\sum_k \sim \int_0^1 k^{\nu-1} dk, \quad (25)$$

可求出

$$E_1 = -\Delta_0 K_1 + \frac{\alpha' \omega_0 \Delta_0 K_1}{\omega_0 + 2\Delta_0 K_1}, \quad (26)$$

$$K_1 = \left[\frac{2\Delta_0 K_1}{\omega_0 + 2\Delta_0 K_1} \exp\left(\frac{\omega_0}{\omega_0 + 2\Delta_0 K_1}\right) \right]^{\alpha'}. \quad (27)$$

式中 $\alpha' = \frac{2}{\nu} \frac{g_0^2}{\omega_0^2}$.

为描述形变效应, 引入变分基态

$$|\phi_2\rangle = \exp\left[-\sigma_z \sum_k (g_k / \omega_k) (b_k^\dagger - b_k)\right] \exp\left[-\sum_k r_k (b_k b_k - b_k^\dagger b_k^\dagger)\right] |\phi_{vac}\rangle, \quad (28)$$

式中 r_k 为变分参量. 利用恒等关系(8a)和(8b)式, $|\phi_2\rangle$ 的能量可以算出

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \langle \phi_1 | H | \phi_2 \rangle \\
 &= -\Delta_0 K_2 - \sum_k \omega_k \sinh^2(2\gamma_k),
 \end{aligned} \quad (29)$$

式中

$$K_2 = \exp \left[- \sum_k (2g_k^2/\omega_k^2) \exp(-4\gamma_k) \right]. \quad (30)$$

使 E_2 极小导致

$$\gamma_k = \frac{1}{8} \ln(1 + 8\Delta_0 K_2 g_k^2/\omega_k^2). \quad (31)$$

再利用(22),(25)两式,可得

$$E_2 = -\Delta_0 K_2 + \frac{\alpha \omega_0^3}{4 g_0^2} (\sqrt{1 + 8\Delta_0 K_2 g_0^2/\omega_0^2} - 1), \quad (32)$$

$$K_2 = [(\sqrt{8\Delta_0 K_2 g_0^2/\omega_0^2})/(1 + \sqrt{1 + 8\Delta_0 K_2 g_0^2/\omega_0^2})]^{2\alpha}, \quad (33)$$

式中

$$\alpha = \frac{\nu}{\nu + d} \alpha'. \quad (34)$$

比较(15)与(31)式可以看出,么正变换 R 不仅可使 H_{ph} 的二次型对角化,而且也可自动地使基态能量极小. 对于么正变换 s 却难以同时满足这两点.

下面将比较 $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$ 的稳定性. 由(26)和(32)式可以看出, E_1 和 E_2 均依赖于无量纲参量 $\alpha_0 = \Delta_0/\omega_0$, $\beta_0 = g_0^2/\omega_0^2$. 在绝热条件下 ($\Delta_0/\omega_0 \ll 1$), E_1 和 E_2 分别成为

$$E_1 = -\Delta_0 K_1(1 - \alpha'), \quad (35 a)$$

$$E_2 = -\Delta_0 K_2(1 - \alpha). \quad (35 b)$$

条件 $E_1 = E_2$ 可决定临界参量关系

$$\begin{aligned}
 \alpha_{0c} &= (\Delta_0/\omega_0)_c \\
 &= \frac{1}{2e} \left[(\nu - 2\beta_0) / \left(\nu - \frac{\nu}{\nu + d} 2\beta_0 \right) \right]^{-\frac{\nu - 2\beta_0}{2\beta_0} [1 + (\nu - 2\beta_0)/d]} \left(\frac{\beta_0}{e} \right)^{(\nu - 2\beta_0)/d}.
 \end{aligned} \quad (36)$$

当 $\alpha_0 > \alpha_{0c}$ 时, $E_1 < E_2$, 位移变分基态 $|\phi_1\rangle$ 更稳定, 说明位移效应起主要作用; 当 $\alpha_0 < \alpha_{0c}$ 时, $E_1 > E_2$, 位移-压缩变分态 $|\phi_2\rangle$ 更稳定, 说明形变效应起主要作用. 当 $\beta_0 \rightarrow 0$ 时, 有

$$\alpha_{0c} \sim (\beta_0/e)^{(\nu - 2\beta_0)/d} \rightarrow 0. \quad (37)$$

只要 $\nu > 2\beta_0$. 对 $\alpha_0 \geq 1$ 情形, 临界曲线 $\alpha_{0c} = \alpha_{0c}(\beta_0)$ 可通过数值计算得到. 图 1 给出 $\nu = 1$, $d = 3$ 时的结果. 图 1 中阴影区域对应 $E_2 < E_1$. 没有阴影区域对应 $E_1 < E_2$. 从图 1 可以看出, 在反绝热条件下 ($\Delta_0/\omega_0 \gg 1$), 有 $\alpha_{0c} \approx 2\beta_0$.

2. 双参量变分

从单参量变分的结果知道, 位移和形变效应的影响取决于参量 α_0 和 β_0 . 为同时描

述这两种效应的影响, 将采用双参量变分法. 双参量变分法已被用于单模耗散量子隧道问题^[13,14].

相应于位移态 $|\phi_1\rangle$, 引入 $|\phi_3\rangle$ 态,

$$|\phi_3\rangle = \exp\left[-\sigma_s \sum_k c_k (g_k/\omega_k) \times (b_k^\dagger - b_k)\right] \exp\left[-\gamma \sum_k (b_k b_k - b_k^\dagger b_k^\dagger)\right] |\phi_{vac}\rangle, \quad (38)$$

式中 c_k, γ 为变分参量. 通过类似的计算, 可求得相应的能量

$$\begin{aligned} E_3 &= \langle \phi_3 | H | \phi_3 \rangle \\ &= -\Delta_0 K_3 + \sum_k (c_k - 1)^2 g_k^2 / \omega_k \\ &\quad + \sinh^2(2\gamma) \sum_k \omega_k, \end{aligned} \quad (39)$$

式中

$$K_3 = \exp\left[-2 \sum_k (c_k^2 g_k^2 / \omega_k^2) e^{-4\gamma}\right]. \quad (40)$$

通过变分条件 $\frac{\partial E_3}{\partial c_k} = 0, \frac{\partial E_3}{\partial \gamma} = 0$ 给出

$$\begin{aligned} c_k &= \omega_k / (\omega_k + 2\Delta_0 K_3 e^{-4\gamma}), \\ \gamma &= \frac{1}{8} \ln \left\{ \left[\sum_k \omega_k (1 + 8c_k^2 \Delta_0 K_3 g_k^2 / \omega_k^3) \right] / \sum_k \omega_k \right\} \\ &= \frac{1}{8} \ln \left\{ 1 - \frac{\nu + d}{\nu} A^{-1} K_3 \left[\frac{\omega_0}{\omega_0 + 2\Delta_0 K_3 e^{-4\gamma}} + \ln \left(\frac{2\Delta_0 K_3 e^{-4\gamma}}{\omega_0 + 2\Delta_0 K_3 e^{-4\gamma}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (42)$$

式中 $A = \omega_0^3 / 8\Delta_0 g_0^2$, 则 E_3, K_3 相应可得

$$E_3 = -\Delta_0 K_3 + \frac{\alpha' \omega_0 \Delta_0 K_3 e^{-4\gamma}}{\omega_0 + 2\Delta_0 K_3 e^{-4\gamma}} + \frac{\omega_0}{\nu + d} \sinh^2(2\gamma), \quad (43)$$

$$K_3 = \left[\frac{2\Delta_0 K_3 e^{-4\gamma}}{\omega_0 + 2\Delta_0 K_3 e^{-4\gamma}} \exp\left(\frac{\omega_0}{\omega_0 + 2\Delta_0 K_3 e^{-4\gamma}}\right) \right]^{\alpha' e^{-4\gamma}}. \quad (44)$$

将(43), (44)两式与(26), (27)两式比较可知, $E_3(\gamma = 0) = E_1$, 而由条件(42)式可知, 在 E_3 的极小点 $\gamma > 0$, 所以 $E_3 < E_1$. 即 $|\phi_3\rangle$ 态较 $|\phi_1\rangle$ 态更稳定.

相应于位移-压缩态 $|\phi_2\rangle$, 引入 $|\phi_4\rangle$ 态,

$$|\phi_4\rangle = \exp\left[-c\sigma_s \sum_k (g_k/\omega_k)(b_k^\dagger - b_k)\right] \exp\left[-\sum_k \gamma_k (b_k b_k - b_k^\dagger b_k^\dagger)\right] |\phi_{vac}\rangle, \quad (45)$$

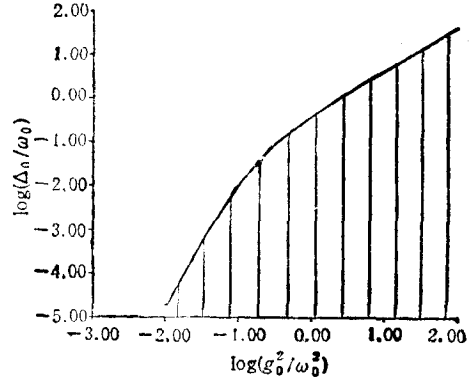


图1 位移变分态能量 E_1 与位移-压缩变分态能量 E_2 比较曲线 阴影区域对应 $E_2 < E_1$; 没有阴影区域对应 $E_1 < E_2$

式中 c, γ_k 为变分参量, 通过类似的计算, 可求得相应的能量

$$\begin{aligned} E_1 &= \langle \phi_1 | H | \phi_1 \rangle \\ &= -\Delta_0 K_1 + (c-1)^2 \sum_k g_k^2 / \omega_k + \sum_k \omega_k \sinh^2(2\gamma_k), \end{aligned} \quad (46)$$

式中

$$K_1 = \exp \left[-2c^2 \sum_k (g_k^2 / \omega_k^2) \exp(-4\gamma_k) \right]. \quad (47)$$

通过变分条件 $\frac{\partial E_1}{\partial c} = 0, \frac{\partial E_1}{\partial \gamma_k} = 0$ 给出

$$\begin{aligned} c &= \sum_k (g_k^2 / \omega_k) / \left\{ \sum_k (g_k^2 / \omega_k) \left[1 + 2 \frac{\Delta_0}{\omega_k} K_1 \exp(-4\gamma_k) \right] \right\} \\ &= \omega_0 / \left[\omega_0 + \frac{4\nu}{\nu+d} \Delta_0 K_1 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + A^{-1} K_1 c^2}}{\sqrt{A^{-1} K_1 c^2}} \right) \right], \end{aligned} \quad (48)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{8} \ln(1 + 8c^2 \Delta_0 K_1 g_k^2 / \omega_k^3). \quad (49)$$

则 E_1, K_1 相应可得

$$E_1 = -\Delta_0 K_1 + \alpha'(c-1)^2 \omega_0 / 2 + \frac{\alpha \omega_0}{4 g_0^2} [\sqrt{1 + A^{-1} K_1 c^2} - 1], \quad (50)$$

$$K_1 = \exp \left[-\frac{4c^2}{\nu+d} (\beta_0^2 / \omega_0^2) \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + A^{-1} K_1 c^2}}{\sqrt{A^{-1} K_1 c^2}} \right) \right], \quad (51)$$

将(50), (51)两式与(32), (33)两式比较可知, $E_1(c=1) = E_2$, 即 $|\phi_1\rangle$ 态较 $|\phi_2\rangle$ 态更稳定.

进一步考虑, 相应于 $|\phi_1\rangle$ 态和 $|\phi_2\rangle$ 态, 还可以引入另外一个双参量变分态 $|\phi_3\rangle$, 它的形式为

$$|\phi_3\rangle = \exp \left[-\sigma_z \sum_k c_k (g_k / \omega_k) (b_k^\dagger - b_k) \right] \exp \left[-\sum_k \gamma_k (b_k b_k - b_k^\dagger b_k^\dagger) \right] |\phi_{vac}\rangle, \quad (52)$$

式中 c_k, γ_k 为变分参量, 同样通过类似的计算, 可得 $|\phi_3\rangle$ 态的相应能量

$$\begin{aligned} E_3 &= \langle \phi_3 | H | \phi_3 \rangle \\ &= -\Delta_0 K_3 + \sum_k [(c_k-1)^2 g_k^2 / \omega_k] + \sum_k \omega_k \sinh^2(2\gamma_k), \end{aligned} \quad (53)$$

式中

$$K_3 = \exp \left\{ -2 \sum_k [(c_k^2 g_k^2 / \omega_k^2) \exp(-4\gamma_k)] \right\}. \quad (54)$$

通过变分条件 $\frac{\partial E_3}{\partial c_k} = 0, \frac{\partial E_3}{\partial \gamma_k} = 0$ 给出

$$c_k = \omega_k / [\omega_k + 2\Delta_0 K_3 \exp(-4\gamma_k)], \quad (55)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{8} \ln(1 + 8c^2 \Delta_0 K_3 g_k^2 / \omega_k^2). \quad (56)$$

将(53), (54), (55)三式与(19), (20), (21)三式比较可知, $E_3(\gamma_k = 0) = E_1$, 而由(56)式可知, E_3 的极小点 $\gamma_k > 0$, 所以有 $E_3 < E_1$, 即 $|\phi_3\rangle$ 态较 $|\phi_1\rangle$ 态更稳定.

同理, 将(53), (54), (56)三式与(29), (30), (31)三式比较可知, $E_3(c_k = 1) = E_2$, 而由(54)式可知, E_3 的极小点 $c_k < 1$, 所以有 $E_3 < E_2$, 即 $|\phi_3\rangle$ 态较 $|\phi_2\rangle$ 态更稳定. 亦即, $|\phi_3\rangle$ 态较 $|\phi_1\rangle$ 态和 $|\phi_2\rangle$ 态均稳定.

四、局域-退局域相变

声子库对量子隧道系统的影响主要反映在交迭积分 K 上. 当 $K = 0$ 时, 隧道粒子处于不同势阱所对应的声子波函数相互正交, 即出现 Anderson 正交灾难 (orthogonality catastrophe)^[15]. 这时重整化隧道参量 $\Delta = \Delta_0$, $K = 0$, 量子隧道运动不再发生, 系统的对称性发生破缺. 这种现象被称为局域相变^[5]. 上节的研究表明, 交迭积分 K 依赖于声子基态的选择. 因此, 期待不同的基态选择, 将给出不同的局域-退局域相变条件.

对于变分态 $|\phi_1\rangle$, 交迭积分 K_1 的表达式(27)可变为

$$\left(\frac{1}{\alpha'} - 1\right) \ln K_1 = \omega_0 / (\omega_0 + 2\Delta_0 K_1) + \ln [2\Delta_0 / (\omega_0 + 2\Delta_0 K_1)]. \quad (57)$$

从上式容易看出, 当 $\alpha' < 1$ 时, K_1 有非零解, 系统处于退局域相. 而当 $\alpha' > 1$ 时, K_1 的解比较复杂. 当 $\Delta_0/\omega_0 < 1/2e$ 时, $K_1 = 0$ 是稳定的唯一解, 系统处于局域相. 当 $\Delta_0/\omega_0 > 1/2e$ 时, K_1 的解由关系式

$$(\Delta_0/\omega_0)_c = \frac{(\sqrt{\alpha'})^{\alpha'}}{2(\sqrt{\alpha'} - 1)^{\alpha'-1}} e^{-\sqrt{\alpha'}} \quad (58)$$

决定. (58) 式的推导见附录一. 当 $\Delta_0/\omega_0 < (\Delta_0/\omega_0)_c$ 时, $K_1 = 0$; 当 $\Delta_0/\omega_0 = (\Delta_0/\omega_0)_c$ 时, K_1 有唯一非零解; 当 $\Delta_0/\omega_0 > (\Delta_0/\omega_0)_c$ 时, K_1 存在两个非零解. 可以证明 (见附录二), 其中 K_1 值较大的解为稳定解. 变分态 $|\phi_1\rangle$ 的相图如图 2 所示. 此相图与重整化群的结果相符^[6,7,16].

对于变分态 $|\phi_2\rangle$, (33) 式给出

$$K_2^{(\alpha-1)/2\alpha} = A^{1/2} + (A + K_2)^{1/2}. \quad (59)$$

当 $\alpha < 1$ 时, K_2 有非零解, 当 $\alpha > 1$ 时, K_2 的解取决于 $A = \omega_0^3/8\Delta_0 g_2^2$ 的大小. $A > 1/4$ 时, $K_2 = 0$ 是稳定的唯一解. $A < 1/4$ 时, K_2 的解由下式决定 (见附录一):

$$(\Delta_0/\omega_0)_c = \frac{1}{4(\nu+d)} \frac{(\alpha+1)^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha-1)^{\alpha-1}}. \quad (60)$$

当 $\Delta_0/\omega_0 < (\Delta_0/\omega_0)_c$ 时, $K_2 = 0$; $\Delta_0/\omega_0 = (\Delta_0/\omega_0)_c$ 时, K_2 有唯一的非零解; 当 $\Delta_0/\omega_0 > (\Delta_0/\omega_0)_c$ 时, K_2 存在两个非零解. 同样可以证明 (见附录二), K_2 值较大的解为稳定解. $|\phi_2\rangle$ 的相图如图 3 所示. 比较图 3 与图 2 并利用(34)式, 发现 $|\phi_2\rangle$ 态将局域-退局域相变曲线推向强耦合方向. 上节的计算表明, $|\phi_2\rangle$ 态比 $|\phi_1\rangle$ 态更为稳定. 因此

从变分的观点而言, $|\phi_2\rangle$ 态所给出的相变曲线更加可靠。

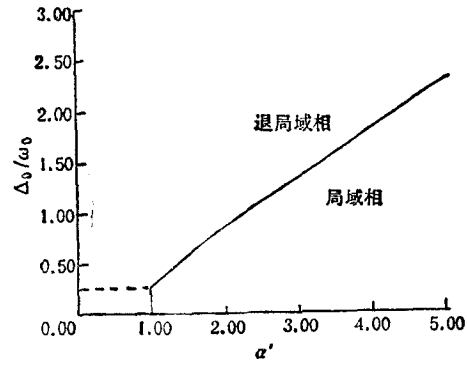
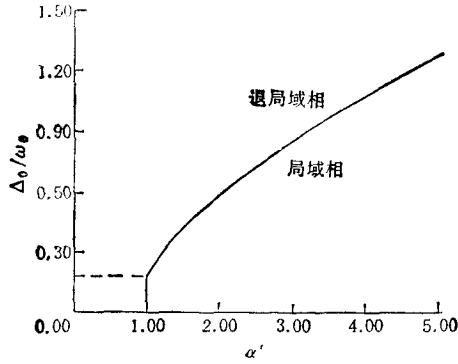


图2 位移变分态的局域-退局域相变曲线 图3 位移-压缩变分态的局域-退局域相变曲线 ($\nu = 1, d = 3$)

同理, 可以导出 $|\phi_3\rangle$ 态, $|\phi_4\rangle$ 态和 $|\phi_5\rangle$ 态的局域-退局域相变条件。定性地讲, 由于 $|\phi_3\rangle$, $|\phi_4\rangle$ 和 $|\phi_5\rangle$ 态较 $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$ 态的能量更低, 相应的相变曲线将推向强耦合方向。定量的结果需要进行数值计算, 下面给出一些定性的分析。

对于 $|\phi_3\rangle$ 态, 在 $\Delta_0/\omega_0 \ll 1$ 条件下, (42)式可近似写为

$$\gamma = \frac{1}{8} \ln \left(1 + \frac{5}{6} A^{-1} \right), \quad (61)$$

相应的(44)式可近似地表达为

$$K_3 \frac{1 + \frac{5}{12} A^{-1} - \alpha'}{\alpha'} = 2e \left(1 - \frac{5}{12} A^{-1} \right) \Delta_0/\omega_0. \quad (62)$$

从上式容易看出, 当 $\alpha' < 1 + \frac{5}{12} A^{-1}$ 时, K_3 有非零解; 当 $\alpha' > 1 + \frac{5}{12} A^{-1}$ 时, K_3 只有零解。

则 $\alpha'_c = 1 + \frac{5}{12} A^{-1}$ 即为 $|\phi_3\rangle$ 态在 $\Delta_0/\omega_0 \ll 1$ 条件下的相变曲线。与 $|\phi_1\rangle$ 态的结果 $\alpha'_c = 1$ 比较, 相变曲线移向强耦合方向。

对于 $|\phi_4\rangle$ 态, 在 $\Delta_0/\omega_0 \ll 1$ 条件下, (48)式可近似写为

$$c \approx 1 / \left[1 + \frac{4\nu}{\nu + d} (\Delta_0/\omega_0) \right], \quad (63)$$

相应的(51)式可变为

$$K_4 \frac{\alpha - 1 - \frac{8\nu}{\nu + d} (\Delta_0/\omega_0)}{\alpha} = 2A\nu^2. \quad (64)$$

从上式容易导出 $|\phi_4\rangle$ 态的相变曲线为 $\alpha_c = 1 + \frac{8\nu}{\nu + d} \frac{\Delta_0}{\omega_0}$ 。与 $|\phi_2\rangle$ 态的结果 $\alpha_c = 1$

比较, 相变曲线亦向强耦合方向移动。

五、结 语

本文的研究表明,耗散量子隧道系统中声子基态的选择对局域-退局域相变条件有很大影响。随着声子基态能量下降,相变条件向强耦合方向移动。当基态为位移声子态时,变分法所得到的相变条件与重整化群的结果相符。应该指出,现有的重整化群结果是建立在稀薄 instanton 气体或 flip 气体近似的基础上。对此近似的合理性,迄今仍缺乏严格证明。最近 Zwerger 指出^[17],在耗散量子隧道系统中, instanton 气体会发生凝聚现象,这时稀薄气体近似不再适用。变分结果告诉我们,耗散量子系统中的声子态不仅要考虑位移效应,还要考虑形变效应。本文提出的位移-压缩态可同时描述这两种效应,并使系统处于更稳定的状态。

附 录 一

1) 当 $\alpha' > 1$ 时,位移态相变点的临界 K_1 值一定同时满足(57)式以及它的导方程

$$\left(\frac{1}{\alpha'} - 1\right)/K_1 = -2\omega_0\Delta_0/(\omega_0 + 2\Delta_0K_1)^2 - 2\Delta_0/(\omega_0 + 2\Delta_0K_1). \quad (\text{A} \cdot 1)$$

从 (A·1) 式可解得

$$K_1 = \frac{\sqrt{\alpha'} - 1}{2} (\omega_0/\Delta_0) \quad (\alpha' \geq 1). \quad (\text{A} \cdot 2)$$

将 (A·2) 式代入(27)式,可得(58)式。且因为

$$\lim_{\alpha' \rightarrow 1+0} (\sqrt{\alpha'} - 1)^{\alpha'-1} = 1, \quad (\text{A} \cdot 3)$$

所以对于(58)式有

$$\lim_{\alpha' \rightarrow 1+0} (\Delta_0/\omega_0)_c = 1/2e. \quad (\text{A} \cdot 4)$$

说明 $\left(\frac{\Delta_0}{\omega_0}\right)_c - \alpha'$ 曲线与 $\alpha' = 1$ 垂线相接于 $\Delta_0/\omega_0 = 1/2e$ 点。

2) 当 $\alpha > 1$ 时,位移-压缩态相变点的临界 K_2 值一定满足(33)式以及它的导方程。而(33)式可变为

$$K_2^{-1/\alpha} - 1 - 2A^{1/2}K_2^{-(\alpha+1)/2\alpha} = 0, \quad (\text{A} \cdot 5)$$

将上式两边对 K_2 求导数可得

$$K_2 = (1 + \alpha)^{2\alpha/(\alpha-1)} A^{\alpha/(\alpha-1)}, \quad (\text{A} \cdot 6)$$

将 (A·6) 式代入 (A·5) 式,有

$$A = \frac{(\alpha - 1)^{\alpha-1}}{(\alpha + 1)^{\alpha+1}}, \quad (\text{A} \cdot 7)$$

再利用(34)式,便可得(60)式。且因为

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1+0} (\alpha - 1)^{\alpha-1} = 1, \quad (\text{A} \cdot 8)$$

所以对于(60)式有

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1+0} (\Delta_0/\omega_0)_c = 1/(\nu + d). \quad (\text{A} \cdot 9)$$

说明 $\left(\frac{\Delta_0}{\omega_0}\right)_c - \alpha$ 曲线与 $\alpha = 1$ 垂线相接于 $\Delta_0/\omega_0 = 1/(\nu + d)$ 点。

附 录 二

1) 对于位移态,当 $\alpha' > 1$ 时,相应于(27)式其解 K_1 有两个不相等的非零值。可以证明,其中较大值对应的能

量较低. 事实上, (26) 式可写为

$$E_1 = -\Delta_0 K_1 [1 - \omega_0 \alpha / (\omega_0 + 2\Delta_0 K_1)], \quad (\text{A} \cdot 10)$$

设一函数

$$f_1(K_1) = (\omega_0 + 2\Delta_0 K_1) / \omega_0 \alpha, \quad (\text{A} \cdot 11)$$

由于

$$\frac{df_1(K_1)}{dK_1} = \frac{2\Delta_0}{\omega_0 \alpha} > 0, \quad (\text{A} \cdot 12)$$

所以 $f_1(K_1)$ 为单调增函数. 从 (A·10) 式可以看出, 因此较大 K_1 值对应的能量 E_1 较低, 从而体系较稳定.

2) 对于位移-压缩态, 当 $\alpha' > 1$ 时, 相应于 (33) 式其解 K_1 亦有两个非零值. 同样可以证明, 其中较大值对应的能量较低. 事实上, (32) 式可写为

$$E_2 = -\left\{ \Delta_0 K_2 - \frac{\alpha}{4} (\omega_0^2 / g_0^2) [(1 + 8\Delta_0 K_2 g_0^2 / \omega_0^2)^{1/2} - 1] \right\}. \quad (\text{A} \cdot 13)$$

设

$$f_2(K_2) = \frac{\Delta_0 K_2}{\frac{\alpha}{4} (\omega_0^2 / g_0^2) (1 + 8\Delta_0 K_2 g_0^2 / \omega_0^2)^{1/2}}, \quad (\text{A} \cdot 14)$$

则

$$\frac{df_2(K_2)}{dK_2} = \frac{4}{\alpha} (\Delta_0 g_0^2 / \omega_0^2) (1 + 4\Delta_0 K_2 g_0^2 / \omega_0^2) / (1 + 8\Delta_0 K_2 g_0^2 / \omega_0^2)^{3/2} > 0. \quad (\text{A} \cdot 15)$$

所以 $f_2(K_2)$ 为单调增函数. 从 (A·13) 式可以看出, 因此较大 K_2 值对应的能量 E_2 较低, 从而体系较稳定.

- [1] A. Grag and G. H. Kim, *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989), 2512.
- [2] J. P. Sethna, *Phys. Rev., B*, **24**(1981), 698; *ibid.*, **25**(1982), 5050.
- [3] H. Chen and X. Wu, *Phys. Lett. A*, **116**(1986), 63.
- [4] N. S. Wingreen *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988), 1396.
- [5] A. J. Leggett *et al.*, *Rev. Mod. Phys.*, **50**(1987), 1.
- [6] S. Chakravarty, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 681.
- [7] J. Bray and M. A. Moore, *Phys. Rev. Lett.*, **49**(1982), 1546.
- [8] H. Chen, Y. M. Zhang and X. Wu, *Phys. Rev., B* **39**(1989), 546.
- [9] 陈鸿、章豫梅、吴翔, *物理学报*, **38**(1989), 1497.
- [10] H. Chen, Y. M. Zhang and X. Wu, *Phys. Rev., B* **40**(1989), 11326.
- [11] F. Guinea, V. Hakim and A. Muramatsu, *Phys. Rev., B* **32**(1985), 4410.
- [12] G. D. Mahan, *Many-particle Physics*, Plenum, New York, (1980).
- [13] A. M. Jayannavar, *Solid State Commun.*, **71**(1989), 689.
- [14] J. Stolze and L. Müller, Preprint.
- [15] P. W. Anderson, *Phys. Rev. Lett.*, **18**(1967), 1049.
- [16] F. Guinea and G. Schön, *Europhys. Lett.*, **1**(1986), 585; *J. Low. Temp. Phys.*, **69**(1987), 219.
- [17] W. Zwerger, *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988), 1533.

VARIATIONAL STUDY OF A DISSIPATIVE QUANTUM TUNNELING SYSTEM

Shi Yun-long

Department of Physics, Shanxi, Yanbai Normal University, Yanbai, 037000

Chen Hong Wu Xiang

Department of Physics, Tongji University, Shanghai, 200092

(Received 17 June 1990)

ABSTRACT

The ground states of phonons in a dissipative quantum tunneling system and their influences on the localization-delocalization transition are investigated by a variational approach. We find that: 1. There are two kind of influences, displacement and deformation, on phonon states due to coupling with a tunneling particle, and displaced -squeezed states are proposed to describe both these influences. 2. The localization-delocalization transition depends on the choice of phonon ground state. The transition will occur at strong coupling as the energy of the ground state decreases.

PACC: 7340G; 7450; 6320L