

高 Q Kerr 介质腔中非简并双光子 Jaynes-Cummings 模型中光场的性质*

李高翔 彭金生

华中师范大学物理系, 武汉 430070

1992年10月14日收到

研究了一位于高 Q Kerr 介质腔中的二能级原子与双模光场相互作用系统中, Kerr 效应对光场单模平均光子数、单模二阶相干度、两模间的相关性, 以及 Cauchy-Schwartz 不等式的影响.

PACC: 4250; 3280; 4265

一、引 言

由于 Jaynes-Cummings (J-C) 模型是描述原子与光场相互作用最简单和最典型的模型, 近年来, 对它已有极为广泛的研究^[1]. 近期, Bužek 和 Jex 将 J-C 模型进行推广^[2,3], 即考虑一个与光场发生单光子相互作用的二能级原子位于充满 Kerr 介质的高 Q 腔中(即不考虑腔体的单光子损耗^[4], 这里称之为 B-J 模型), 分别研究了 Kerr 介质对原子动力学行为^[2,5]以及光场性质^[2,3,6]的影响. Werner 和 Risken 计及腔体单光子损耗的影响, 讨论了 B-J 模型中原子和光场的性质, 发现由于 Kerr 介质的存在, 将使得原子粒子布居差的回复效应更具有规律, 光场压缩效应几乎不受腔损耗和热光场的影响^[7]. Joshi 和 Puri 将 B-J 模型中的单光子过程推广为简并双光子过程^[8], 通过考察准概率分布函数(Q 函数)随时间的演化, 揭示了 Kerr 介质对原子动力学行为的影响. 但是, 上述研究均是基于单模光场与原子的相互作用.

另一方面, 文献[9—11]研究了一、二能级原子通过非简并双光子过程与双模光场的耦合, 与单模光场情况下相比, 光场和原子的性质有着重要的不同. 但这些研究尚未考虑 Kerr 效应^[12—14]的影响.

本文对 B-J 模型进行了另一种推广, 考虑一个位于高 Q Kerr 介质腔中(即不计及腔体的单光子损耗)的具有相同宇称的二能级原子与双模光场发生相互作用, 研究了 Kerr 效应对光场的平均光子数、二阶相干性以及 Cauchy-Schwartz 不等式的影响.

二、模型与态矢

我们知道, Kerr 介质与双模光场的耦合在绝热近似下其相互作用 Hamiltonian 表示

* 国家自然科学基金资助的课题.

为^[12,13]

$$V_1 = \frac{1}{4}x_1(a_1^\dagger a_1)^2 + \frac{1}{4}x_2(a_2^\dagger a_2)^2 + xa_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2, \quad (1)$$

其中 x_1, x_2 和 x 是与介质三阶极化系数有关的常数, $a_i^\dagger, a_i (i=1, 2)$ 分别是频率为 ω_i 的光场的产生、湮没算符, $\frac{1}{4}x_i(a_i^\dagger a_i)^2 (i=1, 2)$ 描述光场的相位自调制效应, $xa_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2$ 则反映介质的 Kerr 效应^[12]. 在旋波近似下, 二能级原子与双模光场通过非简并双光子过程发生作用的相互作用 Hamiltonian 为

$$V_2 = \epsilon(a_1^\dagger a_2^\dagger S_- + a_1 a_2 S_+). \quad (2)$$

这里考虑一个具有相同宇称的二能级原子处在充满 Kerr 介质的高 Q 腔中(不计及腔体的单光子损耗), 与双模光场发生相互作用, 描述该系统的总 Hamiltonian 可写为

$$H = H_0 + V_1 + V_2, \quad (3)$$

式中

$$H_0 = \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 + \omega_0 S_z \quad (\hbar = 1) \quad (4)$$

(2), (4) 两式中的 S_z 和 $S_\pm$ 为原子的能量和跃迁算符, ω_0 为其跃迁频率, ϵ 为原子与光场的耦合常数. 为计算简单起见, 这里只考虑原子本征跃迁频率与光场频率满足非简并双光子共振情况, 即 $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

若在初始时刻, 原子处在激发态 $|a\rangle$, 双模光场处在相干态 $|\alpha_1, \alpha_2\rangle$,

$$|\alpha_1, \alpha_2\rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} F_{n_1, n_2} |n_1, n_2\rangle, \quad F_{n_1, n_2} = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)\right] \frac{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}}, \quad (5)$$

于是, 系统在初始时刻的态矢为

$$|\psi_{(0)}\rangle = |a\rangle \otimes |\alpha_1, \alpha_2\rangle. \quad (6)$$

随着时间的演化, 在相互作用绘景中, 系统在 $t > 0$ 时刻的态矢可写为

$$|\psi_{(t)}\rangle = \sum_{n_1, n_2} a_{n_1, n_2}(t) |a, n_1, n_2\rangle + b_{n_1, n_2}(t) |b, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle. \quad (7)$$

利用相互作用绘景中的 Schrödinger 方程, 并考虑到(6)式, 立即可得

$$a_{n_1, n_2}(t) = F_{n_1, n_2} \left[\cos \frac{\gamma(n_1, n_2)t}{2} + i \frac{\delta(n_1, n_2)}{\gamma(n_1, n_2)} \sin \frac{\gamma(n_1, n_2)t}{2} \right] \times \exp \left\{ -i \left[\frac{1}{4} \chi_1 n_1^2 + \frac{1}{4} \chi_2 n_2^2 + \chi n_1 n_2 + \frac{\delta(n_1, n_2)}{2} \right] t \right\}, \quad (8)$$

$$b_{n_1+1, n_2+1}(t) = -i \frac{2\epsilon \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)}}{\gamma(n_1, n_2)} \sin \frac{\gamma(n_1, n_2)t}{2} F_{n_1, n_2} \times \exp \left\{ -i \left[\frac{1}{4} \chi_1 (n_1+1)^2 + \frac{1}{4} \chi_2 (n_2+1)^2 + \chi (n_1+1)(n_2+1) - \frac{\delta(n_1, n_2)}{2} \right] t \right\}, \quad (9)$$

其中

$$\delta(n_1, n_2) = \left(\frac{\chi_1}{4} + \frac{\chi}{2} \right) (2n_1 + 1) + \left(\frac{\chi_2}{4} + \frac{\chi}{2} \right) (2n_2 + 1), \quad (10)$$

$$\gamma(n_1, n_2) = \sqrt{\delta^2(n_1, n_2) + 4\epsilon^2(n_1+1)(n_2+1)}, \quad (11)$$

$\gamma(n_1, n_2)$ 是与原子 Rabi 振荡频率有关的参数. 这样, 就确定了系统在相互作用绘景中的态矢, 从(7)–(9)式出发, 就可方便地讨论高 Q 腔中的 Kerr 介质对光场性质的影响.

三、Kerr 效应对光场性质的影响

由于描述相位自调制效应强度的 $\chi_i (i=1, 2)$ 仅与光场的第 i 模有关, 而反映 Kerr 效应强度的 χ 与光场的两模均相关, 这里为讨论简单起见, 可通过调节光场的频率使得 $\chi_1 = \chi_2 = 0$ ^[12], 从而忽略相位自调制效应对系统性质的影响. 以下仅讨论 Kerr 效应对光场的平均光子数、二阶相干性以及 Cauchy-Schwartz 不等式的影响, 即令 $\chi_1 = \chi_2 = 0$.

1. 平均光子数

利用(7)–(9)式不难得到 t 时刻双模光场第 i 模的平均光子数为

$$\langle n_i(t) \rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \left\{ n_i + \frac{2\epsilon^2(n_1+1)(n_2+1)}{\gamma^2(n_1, n_2)} [1 - \cos \gamma(n_1, n_2)t] \right\} |F_{n_1, n_2}|^2 \quad (i=1, 2). \quad (12)$$

(12)式表明, 双模光场的每一模的平均光子数具有相同的时间演化规律. 下面以双模光场的第一模的平均光子数随时间的演化规律为例, 讨论 Kerr 效应和光场初始平均光子数对其的影响.

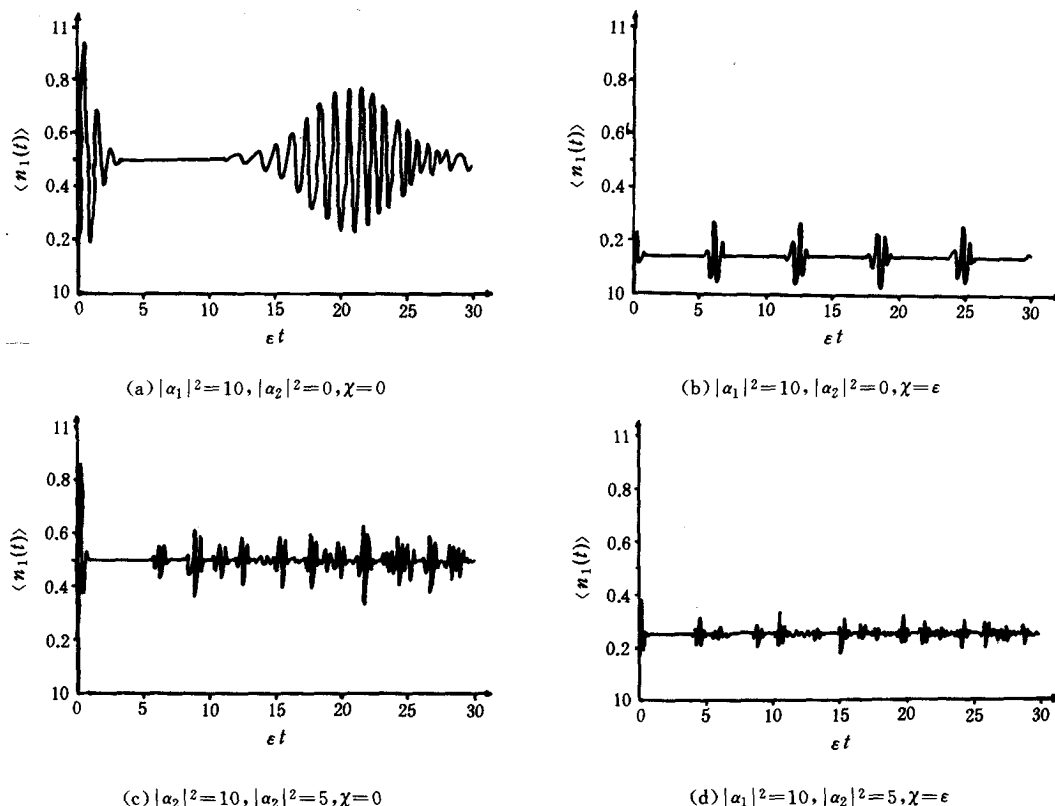
当 $|\alpha_2|^2 = 0$, 即初始时双模光场的第二模处于真空态时, (12)式简化为

$$\begin{aligned} \langle n_1(t) \rangle &= |\alpha_1|^2 + \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{2\epsilon^2(n_1+1)}{4\epsilon^2(n_1+1) + \chi^2(n_1+1)^2} \\ &\times (1 - \cos \sqrt{4\epsilon^2(n_1+1) + \chi_1^2(n_1+1)^2} t) |F_{n_1, n_2}|^2, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\langle n_2(t) \rangle = \langle n_1(t) \rangle - |\alpha_1|^2. \quad (14)$$

如果在(13)式中令 $\chi=0$, 即不考虑 Kerr 效应的影响, 此时腔体即是不计及腔损耗的高 Q 腔, 这时(13)式的时间演化规律与高 Q 腔中的单光子 J-C 模型中平均光子数所呈现的回复-崩塌规律^[15]一致(如图1(a)所示). 当 $x \neq 0$ 时, 即考虑腔中 Kerr 效应, 随着 χ 的增大, $\langle n_1(t) \rangle$ 表现出的崩塌规律与 B-J 模型中原子粒子布居差的规律^[2, 5, 7]相同, 即随着 χ 的增大, $\langle n_1(t) \rangle$ 的回复现象明显, 回复周期变短. 而且 $\langle n_1(t) \rangle$ 的振荡幅度变小, $\langle n_1(t) \rangle$ 保持为常数的值明显变小(如图1(b)所示). 这是由于良腔中 Kerr 效应的影响, 使得初始时处于激发态的原子跃迁到基态的概率减小, 导致原子-光场的耦合程度减弱, 从而使得 $\langle n_1(t) \rangle$ 的值及其振荡幅度明显减小. 如果 Kerr 效应较强, 满足 $\chi^2(|\alpha_1|^2 + 1) \gg 4\epsilon^2$, 这时原子将完全处在激发态而不跃迁至基态, 发生激发态能量的相干捕获, 因而光场的平均光子数 $\langle n_1(t) \rangle = |\alpha_1|^2$, $\langle n_2(t) \rangle = 0$.

图1(c)表明, 如果不考虑 Kerr 效应的影响, 此时本模型退化成为高 Q 腔中的非简并双光子 J-C 模型, 由于 $|\alpha_2|^2 \neq 0$, 光场的平均光子数 $\langle n_1(t) \rangle$ 呈现出不同于简并双光子 J-C 模型的崩塌-回复规律^[16]. 由图1(a)和图1(c)可以发现, 对于非简并双光子 J-C 模型, 其平均光子数的回复周期与光场初始光强明显有关. 当 $x = \epsilon$ 时, 即考虑腔中 Kerr 效应, 图1(d)表明, 此时 Kerr 效应对 $\langle n_1(t) \rangle$ 的影响与 $|\alpha_2|^2 = 0$ 时的情况(图1(b))相似, 使得 $\langle n_1(t) \rangle$ 的

图1 光场第一模的平均光子数 $\langle n_1(t) \rangle$ 随时间的演化

回复周期变短, 回复次数增加, 并且 $\langle n_1(t) \rangle$ 的振荡幅度变小. 但比较图1(b)与图1(d)可以发现, 此时图1(d)中 $\langle n_1(t) \rangle$ 的振荡幅度比图1(b)更小, 而 $\langle n_1(t) \rangle$ 保持为常数的值却比 $|\alpha_2|^2=0$ 时要大, 这表明, 光场第二模的初始光强强烈地影响着原子从激发态向基态跃迁的概率.

从上面的讨论可以发现, 与通常的高 Q 腔(不计及腔体的单光子损耗)中的非简并双光子J-C模型相比, 对于充满Kerr介质的高 Q 腔中的非简并双光子J-C模型, 由于Kerr效应的影响, 其光场的平均光子数的回复周期变短, 振荡幅度减小; 并且双模光场中一模的初始光强强烈地影响着另一模的平均光子数随着时间的演化规律.

2. 二阶相干性

为讨论光场的统计性质, 引入函数^[17]

$$\gamma_{ij}^{(2)} = \frac{\langle a_i^+ a_j^+ a_j a_i \rangle}{\langle a_i^+ a_i \rangle \langle a_j^+ a_j \rangle} \quad (i, j = 1, 2). \quad (15)$$

这里 $\gamma_{ii}^{(2)}$ 表示双模光场第 i 模的二阶相干度, $\gamma_{12}^{(2)}$ 描述光场两模之间的相关度.

首先讨论腔中Kerr效应对双模光场第 i 模的二阶相干性的影响. 由(15)式知, 光场第 i 模的二阶相干度为

$$\gamma_{ii}^{(2)} = 1 + \frac{\langle :(\Delta N_i)^2: \rangle}{\langle N_i \rangle^2}, \quad (16)$$

其中 $N_i = a_i^+ a_i$, 并且

$$\langle :(\Delta N_i)^2: \rangle = \langle a_i^+ a_i^+ a_i a_i \rangle - \langle n_i(t) \rangle^2. \quad (17)$$

上式中

$$\langle a_i^+ a_i^+ a_i a_i \rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} |F_{n_1, n_2}|^2 \left\{ n_i(n_i - 1) + n_i \frac{4\varepsilon^2(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{\gamma^2(n_1, n_2)} [1 - \cos \gamma(n_1, n_2)t] \right\}. \quad (18)$$

显然,如果 $r_n^{(2)} < 1$ 或者 $\langle :(\Delta N_i)^2: \rangle < 0$, 则光场的第 i 模处于亚泊松分布. 图2表明, 当 $|\alpha_2|^2 = 0$ 时, $\langle :(\Delta N_2)^2: \rangle < 0$, 即光场的第二模恒处于亚泊松分布; 并且光场的第一模也在较长时间区域内呈亚泊松分布. 同时, 从图2可以发现, 随着 χ 的增大, 腔中 Kerr 效应对 $\langle :(\Delta N_2)^2: \rangle$ 的影响比 $\langle :(\Delta N_1)^2: \rangle$ 要显著得多, 其中 $\langle :(\Delta N_2)^2: \rangle$ 在 $\chi = \varepsilon$ 时已接近于零, 即此时光场第二模呈现出并不明显的亚泊松分布, 而光场第一模则仍然呈现出较明显的亚泊松分布.

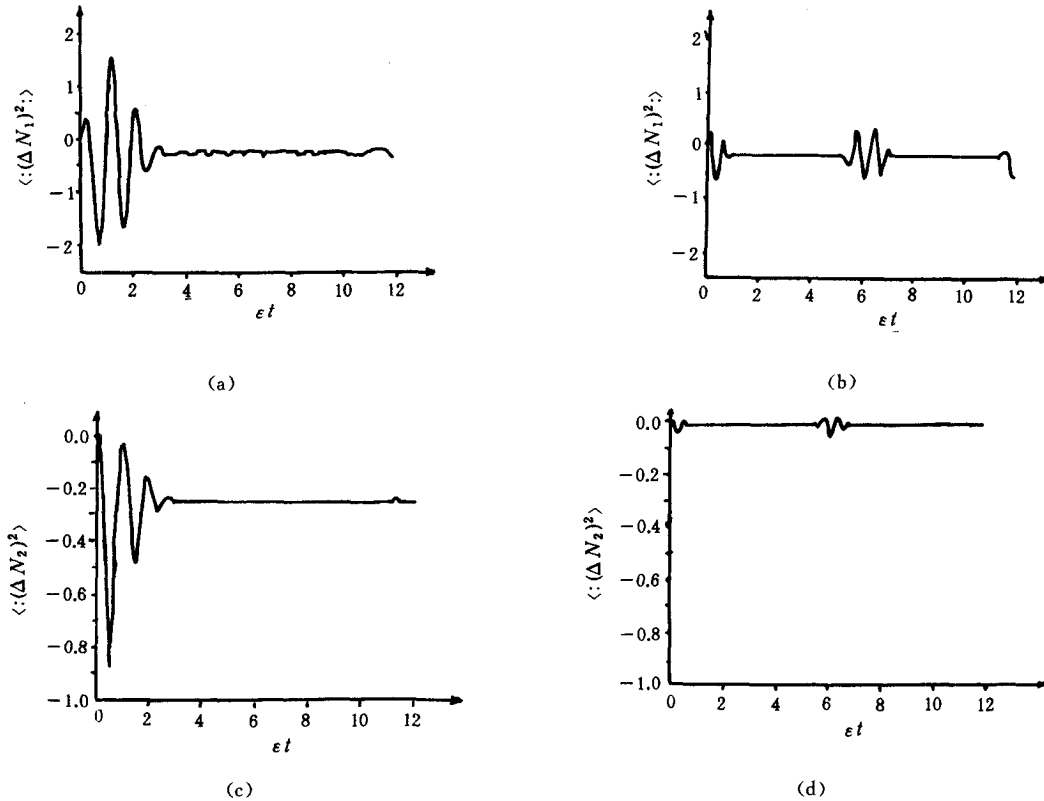


图2 $|\alpha_1|^2 = 10$, $|\alpha_2|^2 = 0$, 光场二阶相干度随时间的演化

(a) $\chi = 0$, (b) $\chi = \varepsilon$ 时, $\langle :(\Delta N_1)^2: \rangle$ 随时间的演化;

(c) $\chi = 0$, (d) $\chi = \varepsilon$ 时, $\langle :(\Delta N_2)^2: \rangle$ 随时间的演化

图3显示的是光场第二模的初始光强 $|\alpha^2|_2 \neq 0$ 的情况. 与图2(a)、图2(c)相比, 在不考虑腔中 Kerr 效应即 $\chi = 0$ 时, 随着光场第二模的初始光强的增大, 其第二模并不象 $|\alpha^2|_2 = 0$ 恒处于亚泊松分布, 但其第一模处于亚泊松分布的时间增加. 当 $\chi = \varepsilon$ 时, 此时计及腔中

Kerr 介质的影响,图3(d)表明,光场第二模只在极短的几个时间区域内呈现出亚泊松分布,而图3(b)则显示出 Kerr 效应虽然使得光场第一模的亚泊松分布程度减弱,但对光场第一模亚泊松分布性质的影响不如对光场第二模的影响明显.

总之,从图2和图3可以发现,腔中 Kerr 效应使得光场的二阶相干度发生明显的变化,导致光场的亚泊松分布减弱,其减弱的程度强烈依赖于光场的初始光强.

其次讨论 Kerr 介质对光场两模间相关度的影响.由(15)式可知,光场的两模间相关度定义为

$$\gamma_{12}^{(2)} = \frac{\langle a_1^+ a_2^+ a_2 a_1 \rangle}{\langle a_1^+ a_1 \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle}. \quad (19)$$

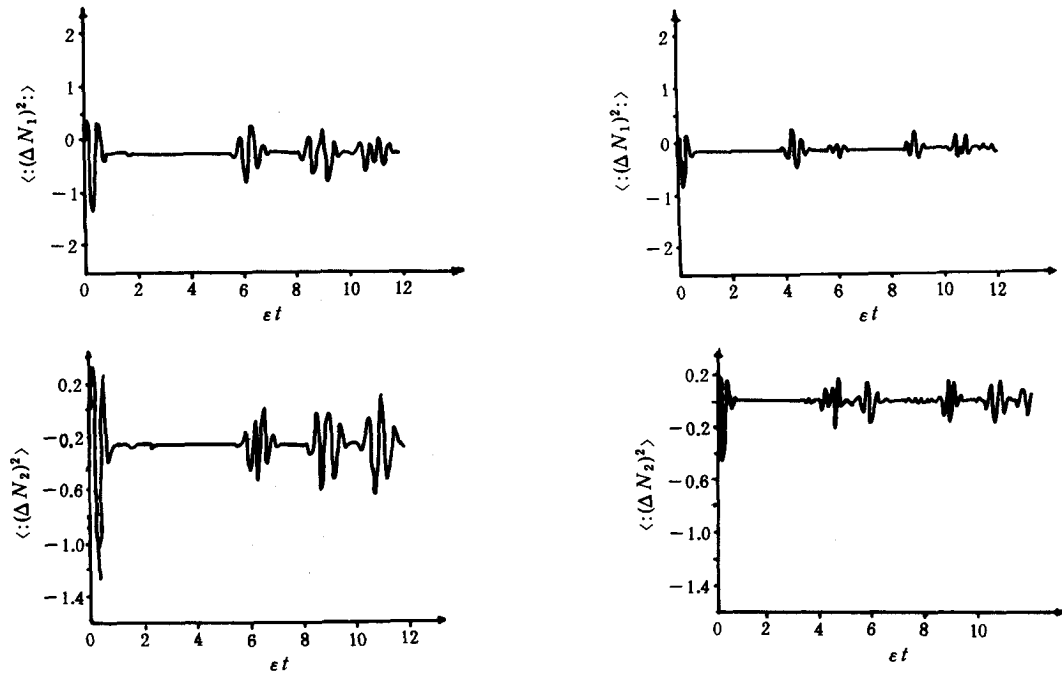


图3 $|a_1|^2=10, |a_2|^2=5$, 光场二阶相干度随时间的演化 图注同图2

上式中

$$\langle a_1^+ a_2^+ a_2 a_1 \rangle = \sum_{n_1, n_2} \left\{ n_1 n_2 + (n_1 + n_2 + 1) \frac{2\epsilon^2 (n_1 + 1)(n_2 + 1)}{\gamma^2(n_1, n_2)} \right\} |F_{n_1, n_2}|^2. \quad (20)$$

与光场的单模二阶相干度一样,将上式改写为

$$\gamma_{12}^{(2)} = 1 + \frac{c(t)}{\langle a_1^+ a_1 \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle}, \quad (21)$$

式中

$$c(t) = \langle a_1^+ a_2^+ a_2 a_1 \rangle - \langle a_1^+ a_1 \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle. \quad (22)$$

这里 $\gamma_{12}^{(2)}=1$ (或 $c(t)=0$) 表示光场两模间是不相关的, $\gamma_{12}^{(2)}>1$ (或 $c(t)>0$) 表明光场两模间是相关的, 而 $\gamma_{12}^{(2)}<1$ (或 $c(t)<0$) 则表示两模间呈反相关 (anti-correlation). 由于这里的

模型是双光子过程,即原子从激发态(基态)向光场的每一模各发射(吸收)一个光子跃迁到基态(激发态),因此随着时间的演化,光场的两模在绝大多数时间区域内是相关的,即 $c(t) > 0$ 占据主导地位. 图4表明, $c(t)$ 在绝大部分时间区域内大于零. 图4(a)和图4(c)显示的是不考虑腔中 Kerr 效应,即 $x=0$ 时 $c(t)$ 随时间的变化,可以发现,随着 $|a_2|^2$ 的增大,出现 $c(t) > 0$ 的时间区域增加,并且其幅度也增大,这表明光场的两模间的相关程度与光场初始光强明显有关. 另外,从图4可以看到,在计及腔中 Kerr 效应后,光场两模间的相关程度明显减小(如图4(b)和(d)),这是由于 Kerr 效应使得原子-光场的耦合程度减弱的缘故. 同时,从图4可以发现, Kerr 效应对 $c(t)$ 的影响程度与 $|a_2|^2$ 明显相关.

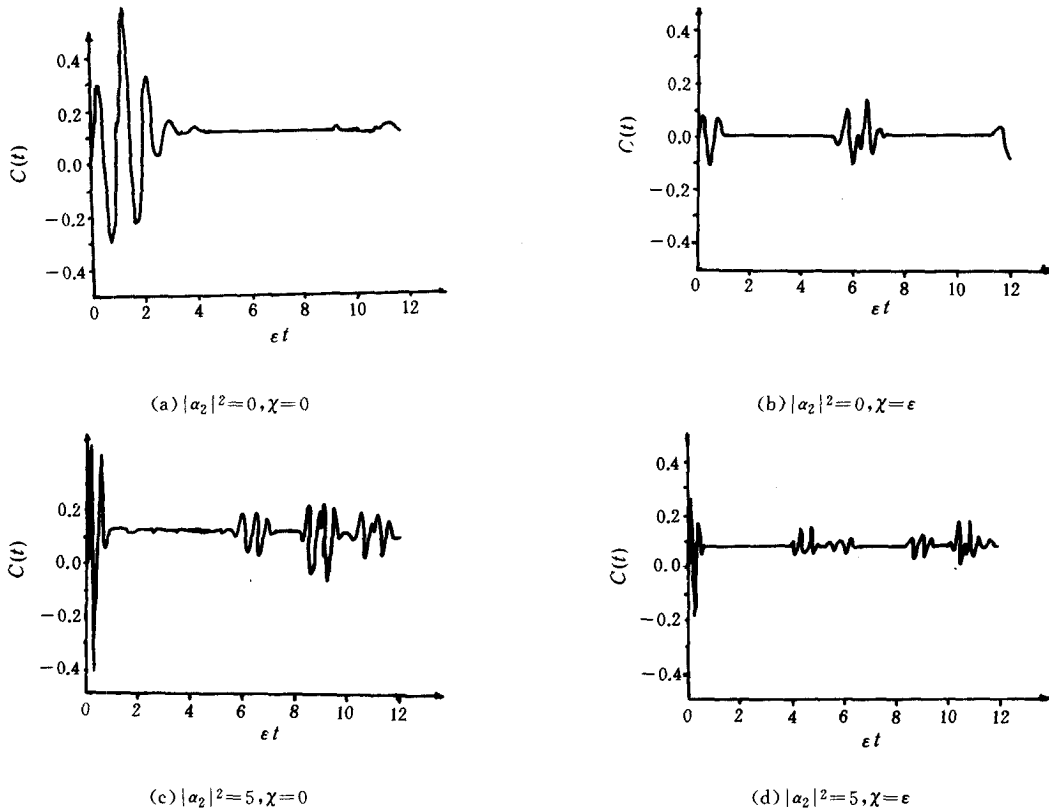


图4 光场模间相关函数随时间的演化, $|a_1|^2=10$

3. Cauchy-Schwartz 不等式

下面讨论腔中 Kerr 介质对 Cauchy-Schwartz 不等式的影响. 对于 Cauchy-Schwartz 不等式,

$$(\gamma_{12}^{(2)})^2 \leq \gamma_{11}^{(2)} \gamma_{22}^{(2)}. \quad (23)$$

如果上述不等式不成立,即 $(\gamma_{12}^{(2)})^2 - \gamma_{11}^{(2)} \gamma_{22}^{(2)} > 0$,则表示光场的两模之间是一种非经典相关^[17]. 为此,定义:

$$V(t) = \langle a_1^+ a_2^+ a_2 a_1 \rangle^2 - \langle a_1^+ a_1^+ a_1 a_1 \rangle \langle a_2^+ a_2^+ a_2 a_2 \rangle. \quad (24)$$

当 $V(t) > 0$ 时, Cauchy-Schwartz 不等式就不成立.

图5表明, $V(t)$ 恒大于零, 这说明光场的两模之间是一种非经典相关. 从图5可以看到, 腔中 Kerr 效应使得光场两模间的这种非经典相关程度减弱, 而且对于不同的 $|\alpha_2|^2$, 其影响程度明显不同, $|\alpha_2|^2$ 越小, Kerr 效应的影响就越显著.

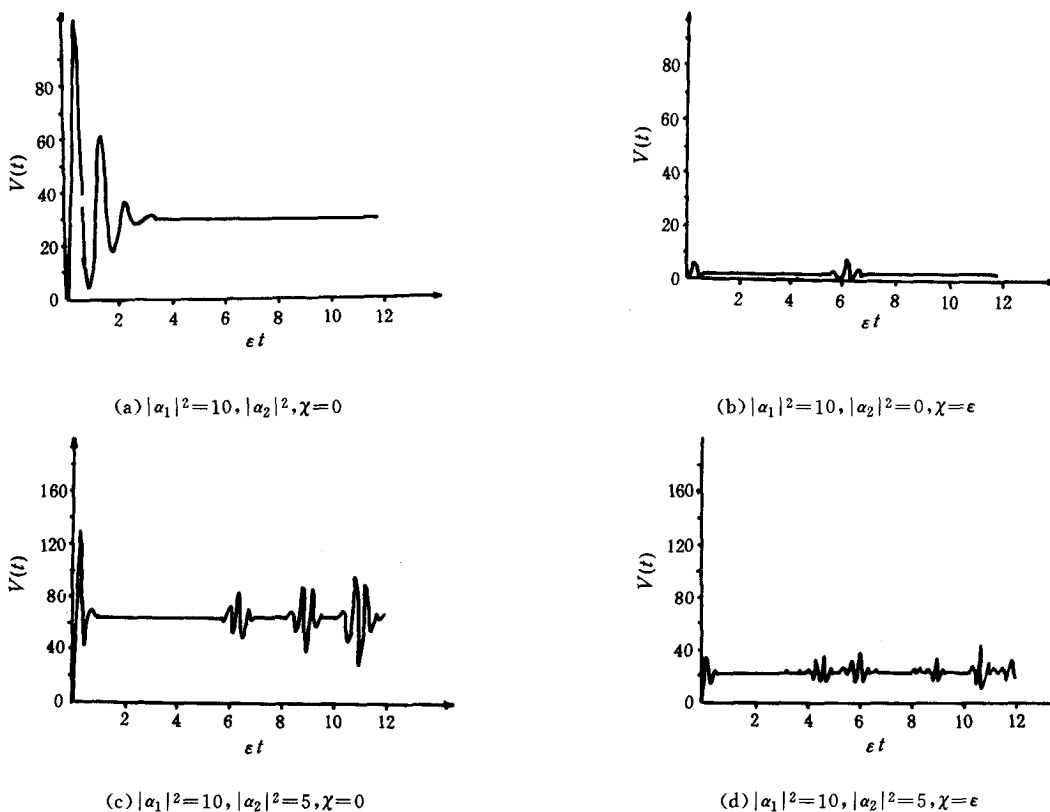


图5 $V(t)$ 随时间的演化

四、结 语

总之, 本文推广了 B-J 模型, 研究了一位于充满 Kerr 介质的高 Q 腔 (不计及腔体的单光子损耗) 中的二能级原子与双模相干光场的相互作用系统中, 考察了 Kerr 效应对光场单模平均光子数、单模二阶相干度、两模间的相关性以及 Cauchy-Schwartz 不等式的影响. 结果表明, Kerr 效应使得光场单模平均光子数的回复周期变短、回复次数增加, 振荡幅度减小; 光场的亚泊松分布因 Kerr 效应的影响将减弱, 两模间的相关程度明显减小, 并且光场两模间的非经典相关程度 (由 Cauchy-Schwartz 不等式描述) 减弱. 并且 Kerr 效应对光场性质的影响强烈依赖于光场两模的初始光强.

- [1] H. I. Yoo, J. H. Eberly, *Phys. Rep.*, **118** (1985), 232;
G. Rempe, H. Walther, N. Klein, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987), 353
P. Alsing, D. S. Guo, H. J. Carmichael, *Phys. Rev.*, **A45** (1992), 5235;
J. S. Peng, G. X. Li, *Phys. Rev.*, **A45** (1992), 3289;
李高翔、彭金生, *物理学报*, **41** (1992), 766.
- [2] V. buzek and I. Jex, *Opt. Commun.*, **78** (1990), 425
- [3] V. Buzek and I. Jex, *J. Mod. Opt.*, **38** (1991), 987.
- [4] W. H. Louisell Quantum statistical properties of radiation (John Wiley, 1973);
T. Quang, P. L. Knight and V. Buzek, *Phys. Rev.*, **A44** (1991), 6092.
- [5] H. T. Dung, and A. S. Shumovsky, *Phys. Lett.*, **A160** (1991), 437.
P. Gora and C. Jedrzejek, *Phys. Rev.*, **A45** (1992), 6816.
- [6] 李高翔、彭金生, *光电子·激光*, (6) (1992), 将发表.
李高翔、彭金生、周鹏, *光学学报*, **13** (1993), 将发表.
- [7] M. J. Werner and H. Risken, *Phys. Rev.*, **A44** (1991), 4623.
- [8] A. Joshi and R. R. Puri, *Phys. Rev.*, **A45** (1992), 5056.
- [9] S. C. Gou, *Phys. Rev.*, **A40** (1989), 5116.
- [10] C. C. Gerry and J. H. Eberly, *Phys. Rev.*, **A42** (1990), 6805.
- [11] M. H. Mahran, *Phys. Rev.*, **A45** (1992), 5113.
- [12] N. Imoto, H. A. Haus, Y. Yamamoto, *Phys. Rev.*, **A32** (1985), 2287.
- [13] J. Perina, R. Horak, Z. Hradid, *J. Mod. Opt.*, **36** (1989), 571.
- [14] R. Tanas and Ts. Gantsog, *J. Opt. Soc. Am.*, **B8** (1991), 2505
- [15] J. H. Eberly, N. B. Narozhy, J. Sanchez-Mondragon, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1980), 1323.
- [16] 彭金生、李高翔、周鹏, *物理学报*, **40** (1991), 1042.
- [17] R. Loudon, *Rep. Prog. Phys.*, **43** (1979).

PROPERTIES OF THE FIELD IN THE NONDEGENERATE TWO-PHOTON JAYNES-CUMMINGS MODEL INSIDE A HIGH-Q CAVITY FILLED WITH A KERR-LIKE MEDIUM

LI GAO-XIANG PENG JIN-SHENG

Department, of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070

(Received 14 October 1992)

ABSTRACT

We have studied the influence of the Kerr effect on the average photon numbers, the degrees of second-order coherence, the degree of interbeam second-order coherence and the Cauchy-Schwartz inequality in the system consisting of an nondegenerate two-photon J-C model in a high- Q cavity filled with a Kerr-like medium.

PACC: 4250; 3280; 4265